

JOAQUÍN PÉREZ MUÑOZ

---

# Geometría de Convexos

# Introducción

Estos son los apuntes de la asignatura **Geometría de Convexos**, optativa de 6 créditos en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada. Son de libre distribución, y pueden bajarse de la página web

<http://www.ugr.es/local/jperez/docencia/GeomCovexos/index.html>

Están basados en apuntes previos del profesor Manuel Ritoré, y en ellos encontrarás los enunciados y demostraciones de los resultados contenidos en el programa de la asignatura, distribuidos por temas tal y como ésta se estructuró y aprobó en Consejo de Departamento. Algunas veces, las demostraciones están resumidas y dejan que el lector compruebe los detalles como ejercicio. Además de éstos, al final de cada tema hay una relación de ejercicios propuestos.

Como siempre en estos casos, los apuntes no estarán libres de errores, y es labor conjunta del autor y de los lectores mejorarlos, un trabajo que nunca se termina. Si encuentras algún error, por favor envía un e-mail a la dirección de correo electrónico [jperez@ugr.es](mailto:jperez@ugr.es). Todo lo que se dice en los apuntes puede encontrarse, a menudo explicado con más profundidad, en numerosos textos básicos. Son recomendables los siguientes:

- T. Bonnesen y W. Fenchel, **THEORY OF CONVEX BODIES**, BCS Associates, Moscow, ID, 1987, Translated from the German and edited by L. Boron, C. Christenson and B. Smith.
- Yu. D. Burago y V. A. Zalgaller, **GEOMETRIC INEQUALITIES**, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 285, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- I. Chavel, **ISOPERIMETRIC INEQUALITIES**, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol 145, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, Differential geometric and analytic perspectives.
- H. G. Eggleston, **CONVEXITY**, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 47, Cambridge University Press, New York, 1958.

- R. Schneider, CONVEX BODIES: THE BRUNN-MINKOWSKI THEORY, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

GRANADA, SEPTIEMBRE DE 2012  
Joaquín Pérez Muñoz

# Índice general

<b>1. Conjuntos convexos</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos básicos. . . . .	1
1.2. Proyección sobre un conjunto convexo . . . . .	11
1.3. Dimensión de un conjunto convexo . . . . .	18
1.4. Hiperplanos soporte . . . . .	19
1.5. Separación . . . . .	23
1.6. Envolverte convexa . . . . .	26
1.7. Función soporte de un conjunto convexo . . . . .	31
1.8. Dualidad . . . . .	42
1.9. Teorema de Helly y consecuencias . . . . .	50
1.10. Polígonos, poliedros y politopos . . . . .	53
1.11. Ejercicios. . . . .	55
<b>2. Distancia de Hausdorff y <math>T^a</math> de selección de Blaschke</b>	<b>57</b>
2.1. Distancia de Hausdorff . . . . .	57
2.2. El teorema de selección de Blaschke . . . . .	62
2.3. Continuidad respecto a la distancia de Hausdorff . . . . .	66
2.4. Resultados de densidad en distancia de Hausdorff . . . . .	72
2.5. Ejercicios. . . . .	74
<b>3. La desigualdad isoperimétrica</b>	<b>77</b>
3.1. Area del borde de una hipersuperficie compacta en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	77
3.2. Estructura de caras en un convexo . . . . .	79
3.3. Volumen del $\varepsilon$ -entorno de un politopo . . . . .	86
3.4. Contenido de Minkowski . . . . .	92
3.5. Simetrización de Steiner . . . . .	93
3.6. La desigualdad isoperimétrica . . . . .	106
3.7. La desigualdad isodiamétrica . . . . .	111
3.8. Ejercicios. . . . .	117

# Capítulo 1

## Conjuntos convexos

### 1.1. Conceptos básicos.

Dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , se define

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \quad (\text{segmento cerrado}),$$

$$(x, y) = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 < \lambda < 1\} \quad (\text{segmento abierto}),$$

y análogamente definimos los segmentos semiabiertos  $[x, y)$ ,  $(x, y]$ .

Un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  se dice *convexo* si  $\forall x, y \in A$ ,  $[x, y] \subset A$ . Son ejemplos de conjuntos convexos:

- Un subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$ .
- Una bola abierta:  $\mathbb{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$ , centrada en  $x \in \mathbb{R}^n$  y de radio  $r > 0$  (por la desigualdad triangular).
- Dado  $B \subset \mathbb{S}^{n-1}(x, r) = \partial\mathbb{B}(x, r)$ , el conjunto  $\mathbb{B}(x, r) \cup B$  es convexo. En particular,  $\overline{\mathbb{B}}(x, r) = \mathbb{S}^{n-1}(x, r) \cup \mathbb{B}(x, r)$  es convexo.

Una función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un convexo  $A \subset \mathbb{R}^n$  se dice *convexa* (ver figura 1.1) si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1].$$

$f$  se dice *cóncava* si  $-f$  es convexa, es decir, si la desigualdad anterior se da para la desigualdad contraria. Se define el *epigrafo* y el *hipografo* de  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

$$\text{hipo}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

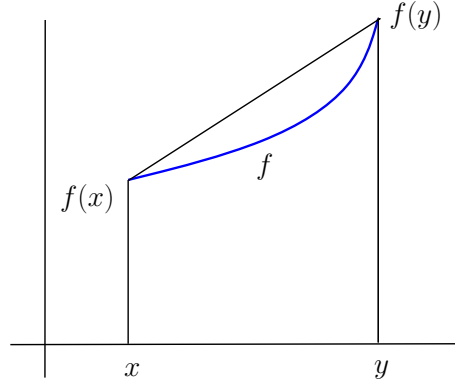


Figura 1.1: Gráfica de una función convexa.

**Lema 1.1.1** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo, y  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función.

1. Si  $f$  es convexa, entonces  $\text{epi}(f)$  es un convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
2. Si  $f$  es cóncava, entonces  $\text{hipo}(f)$  es un convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

*Demostración.* 2 es consecuencia directa de 1. Veamos 1: Dados  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{epi}(f)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \stackrel{(A)}{\leq} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \stackrel{(B)}{\leq} \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2,$$

donde en (A) hemos usado que  $f$  es convexa, y en (B) que  $(x_i, y_i) \in \text{epi}(f)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Por tanto,  $\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) \in \text{epi}(f)$ .  $\square$

**Proposición 1.1.1**

- (1) Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia arbitraria de conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\bigcap_{i \in I} A_i$  es vacío o convexo.
- (2) Si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación afín y  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^m$  son conjuntos convexos, entonces  $f(A)$  es convexo de  $\mathbb{R}^m$  y  $f^{-1}(B)$  es vacío o convexo de  $\mathbb{R}^n$ .
- (3) Si  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  son convexos y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $A + B, \lambda A$  son convexos. Además, si  $\lambda, \mu \geq 0$ , entonces  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ .

*Demostración.* 1 es por comprobación directa de la definición de convexo. Veamos 2: Como  $f$  es afín,  $f(x) = Ax + b$  con  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = \lambda(Ax_1 + b) + (1 - \lambda)(Ax_2 + b) = A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + b = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

Si tomamos  $x_1, x_2$  en el convexo  $A$ , entonces el miembro de la derecha anterior está en  $f(A)$  luego  $f(A)$  es convexo. Y si tomamos  $x_1, x_2$  en  $f^{-1}(B)$ , entonces el miembro de la izquierda está en  $B$  (por ser  $B$  convexo) luego  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in f^{-1}(B)$ , es decir,  $f^{-1}(B)$  es convexo.

Para el apartado 3, sean  $x, y \in A + B$  y  $\delta \in [0, 1]$ . Por definición de suma afín de conjuntos, podemos escribir  $x = a_x + b_x$ ,  $y = a_y + b_y$  con  $a_x, a_y \in A$ ,  $b_x, b_y \in B$ . Así,

$$\delta x + (1 - \delta)y = \delta(a_x + b_x) + (1 - \delta)(a_y + b_y) = [\delta a_x + (1 - \delta)a_y] + [\delta b_x + (1 - \delta)b_y].$$

Por ser  $A$  y  $b$  convexos, los corchetes anteriores están en  $A$  y  $B$  respectivamente, luego  $A + B$  es convexo. La convexidad de  $\lambda A$  es también un cálculo directo y la dejamos al lector.

Terminaremos probando que  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ : la inclusión  $\boxed{\subseteq}$  es cierta para cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  (sólo usa la propiedad distributiva). Para el recíproco, tomemos  $z \in \lambda A + \mu A$ . Así,  $z = \lambda x + \mu y$  para ciertos  $x, y \in A$ . Discutimos casos:

$\lambda + \mu = 0$ . Como  $\lambda, \mu \geq 0$ , entonces  $\lambda = \mu = 0$  luego  $\lambda A + \mu A$  y  $(\lambda + \mu)A$  se reducen a  $\{\vec{0}\}$ .

$\lambda + \mu \neq 0$ . En este caso,

$$z = \lambda x + \mu y = (\lambda + \mu) \left[ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} x + \frac{\mu}{\lambda + \mu} y \right].$$

Como los coeficientes de la combinación lineal dentro del corchete son no negativos y suman 1, la convexidad de  $A$  asegura que el corchete anterior está en  $A$ . Por tanto,  $z \in (\lambda + \mu)A$ .

□

Tomemos  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo y  $r > 0$ . Como  $\mathbb{B}(\vec{0}, r)$  es convexo, el apartado (3) de la Proposición 1.1.1 implica que  $A + \mathbb{B}(\vec{0}, r)$  es convexo. Pero

$$A + \mathbb{B}(\vec{0}, r) = \{x = a + b \mid a \in A, \|b\| < r\} \stackrel{(\star)}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) < r\},$$

donde  $(\star)$  se prueba fácilmente por doble inclusión: Si  $x = a + b \in A + \mathbb{B}(\vec{0}, r)$ , entonces  $d(x, A) = \inf_{a' \in A} d(x, a') \leq d(x, a) = \|(a + b) - a\| = \|b\| < r$ . Recíprocamente, si  $x \in \mathbb{R}^n$  cumple  $d(x, A) < r$  entonces existe  $a \in A$  tal que  $d(x, a) < r$ , y por tanto  $x = a + (x - a) \in A + \mathbb{B}(\vec{0}, r)$ .

**Definición 1.1.1** Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ , al conjunto  $\mathcal{U}(A, r) = A + \mathbb{B}(\vec{0}, r)$  se le llama *entorno tubular abierto* de  $A$  de radio  $r$ . Por lo anterior,  $\mathcal{U}(A, r)$  es convexo si  $A$  lo es.

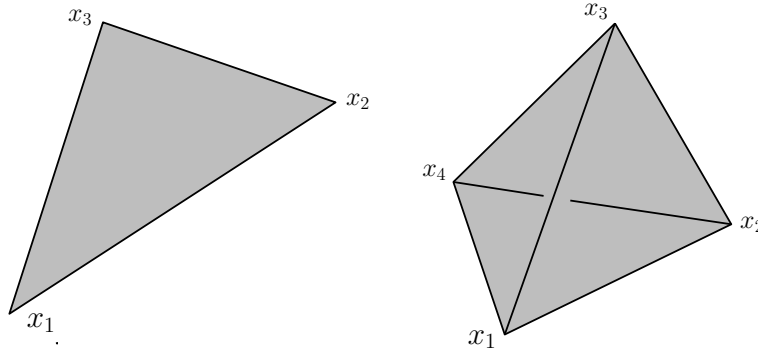


Figura 1.2: Combinación lineal convexa de 3 y 4 puntos.

**Corolario 1.1.1** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo, entonces  $\overline{A}$  es convexo.

*Demostración.*  $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) = 0\} = \bigcap_{r>0} \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) < r\} = \bigcap_{r>0} \mathcal{U}(A, r)$ . Ahora sólo hay que aplicar la convexidad de  $\mathcal{U}(A, r)$  y el apartado (1) de la Proposición 1.1.1.  $\square$

**Definición 1.1.2** Diremos que  $x \in \mathbb{R}^n$  es *combinación lineal convexa* de  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  si existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  no negativos con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  y  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ .

Algunos comentarios sencillos:

- ( $k = 1$ ): El conjunto de combinaciones lineales convexas de cualquier  $x \in \mathbb{R}^n$  se reduce a  $\{x\}$ .
- ( $k = 2$ ):  $x \in \mathbb{R}^n$  es combinación lineal convexa de  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  si y sólo si  $x \in [x_1, x_2]$ .
- ( $k = 3$ ): Si  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$  son afínmente independientes, entonces  $x \in \mathbb{R}^n$  es combinación lineal convexa de  $x_1, x_2, x_3$  si y sólo si  $x$  está en el triángulo cerrado de  $\mathbb{R}^n$  con vértices  $x_1, x_2, x_3$ .
- ( $k = 4$ ): Si  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^n$  son afínmente independientes, entonces  $x \in \mathbb{R}^n$  es combinación lineal convexa de  $x_1, x_2, x_3, x_4$  si y sólo si  $x$  está en el tetraedro sólido cerrado de  $\mathbb{R}^n$  con vértices  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

**Definición 1.1.3** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  no vacío. La *envolvente convexa* de  $A$ ,  $\text{conv}(A)$ , es el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^n$  que pueden escribirse como combinación lineal convexa de una cantidad finita de puntos de  $A$ .



Una forma intuitiva de ver la envolvente convexa de un conjunto finito  $A$  de puntos en el plano, es imaginar una banda elástica estirada que los encierra a todos. La elasticidad de la banda hará que ésta tome elástica de la envolvente convexa de los puntos de  $A$ . Dicho de forma algo más geométrica, en este caso y si no todos los puntos de  $A$  están alineados, entonces su envolvente convexa corresponde a un polígono convexo cuyos vértices son algunos de los puntos del conjunto inicial de puntos.

Volviendo a la situación general, de la definición se tienen:

- $A \subset \text{conv}(A)$ .
- Si  $A \subset B$ , entonces  $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(B)$ .
- $\text{conv}(A)$  es convexo: dados  $x, y \in \text{conv}(A)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ , existen  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m \in A$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{i=1}^m \mu_i = 1$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = x$ ,  $\sum_{i=1}^m \mu_i y_i = y$ . Por tanto,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i y_i,$$

y basta ver que la combinación lineal anterior de  $k + m$  sumandos es convexa, es decir, que sus coeficientes son no negativos y suman 1. Lo primero es evidente, y

$$\lambda \sum_{i=1}^k \lambda_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \mu_i = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 = 1.$$

**Proposición 1.1.2** Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  no vacíos.

- (1) Si  $A$  es convexo, entonces  $A = \text{conv}(A)$ .
- (2)  $\text{conv}(A)$  es la intersección de todos los conjuntos convexos<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $A$ .
- (3)  $\text{conv}(A) + \text{conv}(B) = \text{conv}(A + B)$ .

*Demostración.* Para (1), ya sabíamos que  $A \subset \text{conv}(A)$ . Recíprocamente, supongamos que  $A$  es convexo y veamos que  $\text{conv}(A) \subset A$ . Si  $x \in \text{conv}(A)$  entonces existen  $x_1, \dots, x_k \in A$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  y  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = x$ . Razonamos por inducción sobre  $k$ :

- Si  $k = 1$ , es evidente que  $x \in A$ .
- Si  $k = 2$ , entonces  $x \in [x_1, x_2] \subset A$  (por ser  $A$  convexo).

<sup>1</sup>Mejoraremos este resultado bajo la hipótesis de compacidad para  $A$ , probando que en este caso  $\text{conv}(A)$  es la intersección de todos los semiespacios cerrados de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $A$ . Esto será consecuencia del Teorema 1.6.1.

- Supongamos por hipótesis de inducción que si  $y \in \text{conv}(A)$  se escribe como combinación lineal de *menos* de  $k$  puntos de  $A$ , entonces  $y \in A$ . Tomemos  $x \in \text{conv}(A)$  como arriba. Si  $\lambda_k = 0$ , entonces podemos aplicar a  $x$  la hipótesis de inducción luego  $x \in A$ . Si  $\lambda_k = 1$ , entonces  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k-1} = 0$  luego  $x$  es combinación lineal convexa de *un* sólo punto de  $A$ , luego  $x \in A$ . Supongamos ahora que  $\lambda_k \in (0, 1)$ . Entonces,

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = (1 - \lambda_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} x_i + \lambda_k x_k.$$

El miembro de la derecha es combinación lineal convexa de  $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} x_i$  y de  $x_k$ . Como  $A$  es convexo, bastará probar que  $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} x_i \in A$  para que  $x$  esté en  $A$ . Pero  $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} x_i$  es combinación lineal convexa de  $x_1, \dots, x_{k-1} \in A$ , luego por hipótesis de inducción,  $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} x_i \in A$ . Esto prueba el apartado (1).

Para el apartado (2), llamemos  $\mathcal{D}(A)$  a la intersección de todos los convexos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $A$ . Como  $A \subset \text{conv}(A)$  y  $\text{conv}(A)$  es convexo, entonces  $\mathcal{D}(A) \subset \text{conv}(A)$ . Recíprocamente, sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  convexo con  $A \subset C$ . Tomando envolventes convexas,  $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(C) = C$  (por el apartado (1)). Como  $C$  es cualquier convexo conteniendo a  $A$ , concluimos que  $\text{conv}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ . Esto prueba (2).

Para (3), veamos primero que  $\text{conv}(A + B) \subset \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$ :

Dado  $x \in \text{conv}(A+B)$ , existen  $a_1, \dots, a_k \in A, b_1, \dots, b_k \in B, \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  y  $\sum_{i=1}^k \lambda_i(a_i + b_i) = x$ . Así,

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i \in \text{conv}(A) + \text{conv}(B).$$

Recíprocamente, veamos que  $x + y \in \text{conv}(A + B) \forall x \in \text{conv}(A), y \in \text{conv}(B)$ :

Existen  $a_1, \dots, a_k \in A, b_1, \dots, b_m \in B, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{i=1}^m \mu_i = 1, x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$  e  $y = \sum_{i=1}^m \mu_i b_i$ . Así,

$$x + y = \left( \sum_{j=1}^m \mu_j \right) \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \right) + \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \right) \left( \sum_{j=1}^m \mu_j b_j \right) = \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, m}} \lambda_i \mu_j (a_i + b_j).$$

El miembro de la derecha es una combinación lineal convexa de  $a_i + b_j \in A + B$ , ya que los coeficientes  $\lambda_i \mu_j$  son no negativos y suman 1. Por tanto,  $x + y \in \text{conv}(A + B)$  y (3) está probado.  $\square$

Sabemos que si  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $x \in \text{conv}(A)$ , entonces  $x$  es combinación lineal convexa de puntos de  $A$ . Pero ¿existe una cota superior sobre la longitud de esta combinación lineal? Veamos antes un lema previo.

**Lema 1.1.2**  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  son afínmente dependientes si y sólo si existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  no todos nulos tales que  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$  y  $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \vec{0}$ .

*Demostración.* Si los puntos  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  son afínmente dependientes, entonces los vectores  $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$  son linealmente dependientes. Por tanto, existen  $\lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  no todos nulos tales que

$$\vec{0} = \sum_{i=2}^k \lambda_i (x_i - x_1) = \sum_{i=2}^k \lambda_i x_i + \alpha_1 x_1,$$

donde  $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^k \lambda_i$ . Llamamos  $\alpha_i = \lambda_i \forall i = 2, \dots, k$ , que cumplen las condiciones deseadas.

Recíprocamente, supongamos que existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  no todos nulos tales que  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$  y  $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \vec{0}$ . Entonces,

$$\sum_{i=2}^k \alpha_i (x_i - x_1) = \sum_{i=2}^k \alpha_i x_i - \left( \sum_{i=2}^k \alpha_i \right) x_1 = \sum_{i=2}^k \alpha_i x_i + \alpha_1 x_1 = \vec{0},$$

luego los vectores  $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$  son linealmente dependientes.  $\square$

**Teorema 1.1.1 (Caratheodory)** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $x \in \text{conv}(A)$ , entonces  $x$  es combinación lineal convexa de puntos de  $A$  afínmente independientes (en particular, no más de  $n + 1$ ).

*Demostración.* Sea  $x \in \text{conv}(A)$ , que será de la forma  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$  para ciertos  $x_1, \dots, x_k \in A$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . Elegimos esta combinación lineal lo más corta posible, en particular  $\lambda_i > 0$  para todo  $i$ . Por reducción al absurdo, supongamos que  $x_1, \dots, x_k$  son afínmente dependientes. Por el Lema 1.1.2, existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  no todos nulos tales que  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$  y  $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \vec{0}$ . Salvo reordenación de los índices, podemos suponer que

$$\frac{\lambda_k}{\alpha_k} = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \mid \alpha_i > 0 \right\}.$$

Si escribimos  $x$  como combinación lineal convexa de  $x_1, \dots, x_{k-1}$  tendremos una contradicción (se había supuesto la combinación original lo más corta posible).

$$(1.1) \quad x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \left( \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i x_i + \lambda_k x_k.$$

Los dos últimos términos en el miembro de la derecha suman cero, ya que

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i x_i + \lambda_k x_k = \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i + \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_k x_k = \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \vec{0} = \vec{0}.$$

Por tanto, sólo nos queda ver que el primer término del miembro de la derecha de (1.1) es una combinación lineal convexa.

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left( \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) = \left( \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i + \lambda_k \right) - \left( \lambda_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) = 1 - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} 0 = 1,$$

luego sólo queda ver que cada coeficiente  $\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i$  es no negativo:

- Si  $\alpha_i > 0$ , entonces  $\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \leq \frac{\lambda_i}{\alpha_i}$  luego  $\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \geq 0$ .
- Si  $\alpha_i = 0$ , entonces  $\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i = \lambda_i \geq 0$ .
- Si  $\alpha_i < 0$ , entonces  $\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \geq 0 \geq \frac{\lambda_i}{\alpha_i}$  luego  $\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \leq \lambda_i$ .

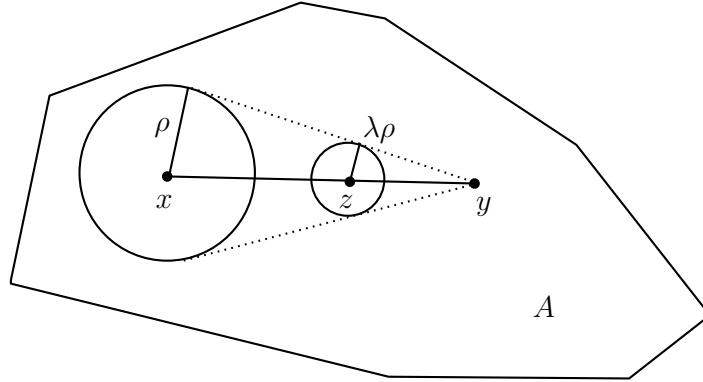
□

Nuestro siguiente objetivo es comprender cómo se comporta la envolvente convexa frente a propiedades topológicas básicas como el interior, clausura, compacidad, etc. Necesitamos dos lemas previos.

**Lema 1.1.3** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo,  $x \in \text{int}(A)$ ,  $y \in \bar{A}$ . Entonces,  $[x, y) \subset \text{int}(A)$ .

*Demostración.* Discutiremos dos casos.

CASO I:  $y \in A$ . Sea  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  con  $\lambda \in (0, 1]$  cualquier punto de  $[x, y)$ . Como  $x \in \text{int}(A)$ , existe  $\rho > 0$  tal que  $\mathbb{B}(x, \rho) \subset A$ . Si vemos que  $\mathbb{B}(z, \lambda\rho) \subset A$  habremos terminado este caso.



Dado  $w \in \mathbb{B}(z, \lambda\rho) = z + \lambda\mathbb{B}(\vec{0}, \rho)$ , existe  $u \in \mathbb{B}(\vec{0}, \rho)$  tal que  $w = z + \lambda u$ . Así,  $w = [\lambda x + (1 - \lambda)y] + \lambda u = \lambda(x + u) + (1 - \lambda)y$ . Como  $x + u \in \mathbb{B}(x, \rho) \subset A$ ,  $y \in A$  y  $A$  es convexo, concluimos que  $w \in A$ .

CASO II:  $y \in \overline{A} - A$ . Veamos primero que  $[x, y) \subset A$ . Sea  $z \in [x, y)$ . Si  $z = x$  tenemos  $z \in \text{int}(A)$  como queríamos. Supongamos entonces  $z \in (x, y)$ , y por tanto existe  $\lambda \in (0, 1)$  tal que  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ . Como  $x \in \text{int}(A)$ , existe  $\rho > 0$  tal que  $\mathbb{B}(x, \rho) \subset A$ . Como  $y \in \overline{A}$ , existe  $a \in A \cap \mathbb{B}(y, \frac{\lambda}{1-\lambda}\rho)$ , luego  $a = y + \frac{\lambda}{1-\lambda}v$  para algún  $v \in \mathbb{B}(\vec{0}, \rho)$ . Despejando  $(1 - \lambda)y$  y sustituyendo en la ecuación de  $z$ , obtenemos  $z = \lambda(x - v) + (1 - \lambda)a$ , que es una combinación lineal convexa de  $x - v, a$ . Como  $x - v \in \mathbb{B}(x, \rho) \subset A$ ,  $a \in A$  y  $A$  es convexo, deducimos que  $z \in A$ , y por tanto  $[x, y) \subset A$ .

Finalmente, dado  $z \in [x, y)$ , el párrafo anterior permite aplicar el caso I a  $[x, z)$  luego  $[x, z) \subset \text{int}(A)$ . Como esto es cierto  $\forall z \in [x, y)$ , concluimos que  $[x, y) \subset \text{int}(A)$ .

□

**Lema 1.1.4** *Dados  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  y  $r > 0$ , se tiene:*

$$\mathbb{B}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, r\right) \subset \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{B}(x_i, r).$$

*Demostración.* Dado  $y \in \mathbb{B}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, r\right)$ , existe  $u \in \mathbb{B}(\vec{0}, r)$  tal que  $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + u$ . Por tanto,  $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right)u = \sum_{i=1}^k \lambda_i(x_i + u) \in \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{B}(x_i, r)$ . □

**Proposición 1.1.3** *Sea  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .*

- (1) *Si  $A$  es convexo, entonces  $\text{int}(A)$  y  $\overline{A}$  son convexos (supuesto que  $\text{int}(A) \neq \emptyset$ ).*
- (2) *Si  $A$  es abierto, entonces  $\text{conv}(A)$  es abierto.*
- (3) *Si  $A$  es acotado, entonces  $\text{conv}(A)$  es acotada.*
- (4) *Si  $A$  es compacto, entonces  $\text{conv}(A)$  es compacta.*
- (5) *Si  $A$  es convexo e  $\text{int}(A) \neq \emptyset$ , entonces  $\text{int}(A) = \text{int}(\overline{A})$  y  $\overline{\text{int}(A)} = \overline{A}$ .*

*Demostración.* Para el apartado (1), supongamos que  $A$  es convexo y sean  $x, y \in \text{int}(A)$ . Por el Lema 1.1.3,  $[x, y) \subset \text{int}(A)$ . Como  $y \in \text{int}(A)$ , entonces  $[x, y) \subset \text{int}(A)$  luego  $\text{int}(A)$  es convexo. Por otro lado  $\overline{A}$  es convexo por el Corolario 1.1.1.

Veamos el apartado (2). Sea  $z \in \text{conv}(A)$ . Así, existen  $x_1, \dots, x_k \in A$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$  tales que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  y  $z = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ . Como  $A$  es abierto, existe  $r > 0$  tal que  $\mathbb{B}(x_i, r) \subset A$

$\forall i = 1, \dots, k$ . Si vemos que  $\mathbb{B}(z, r) \subset A$  concluiremos que  $z$  interior a  $A$  y esto probará (2). Usando el Lema 1.1.4,

$$\mathbb{B}(z, r) = \mathbb{B}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, r\right) \subset \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{B}(x_i, r) \subset \text{conv}(A).$$

Para el apartado (3), si  $A$  es acotado existe  $r > 0$  talque  $A \subset \mathbb{B}(\vec{0}, r)$  luego  $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(\mathbb{B}(\vec{0}, r)) = \mathbb{B}(0, r)$  luego  $\text{conv}(A)$  es acotado.

Para el apartado (4), consideremos el *símplex estándar* en  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\Delta^{n+1} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}.$$

$\Delta^{n+1}$  es un compacto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  (es cerrado y acotado). Consideremos el producto cartesiano  $A^{n+1} = A \times \dots \times A$  y la aplicación

$$f: \Delta^{n+1} \times A^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$

Así,  $\text{conv}(A)$  es la imagen de  $f$  por el Teorema de Caratheodory. Como  $A$  es compacto,  $\Delta^{n+1} \times A^{n+1}$  también es compacto. Como  $f$  es continua, concluimos que  $f(\Delta^{n+1} \times A^{n+1}) = \text{conv}(A)$  también es compacto.

Terminamos con el apartado (5). La inclusión  $\text{int}(A) \subset \text{int}(\bar{A})$  es trivial (y no necesita ninguna hipótesis sobre  $A$ ). Recíprocamente, supongamos que  $A$  es convexo con interior no vacío, sea  $z \in \text{int}(\bar{A})$  y veamos que  $z \in \text{int}(A)$ . Tomemos  $x_0 \in \text{int}(A)$ . Si  $z = x_0$  no hay nada que probar. Supongamos entonces  $z \neq x_0$ . Como  $z \in \text{int}(\bar{A})$ , existe  $r > 0$  tal que  $\mathbb{B}(z, r) \subset \bar{A}$ . Consideremos el punto

$$w = z + \frac{r}{2} \frac{z - x_0}{\|z - x_0\|} \in \mathbb{B}(z, r) \subset \bar{A}.$$

Aplicando el Lema 1.1.3 concluimos que  $[x_0, w) \subset \text{int}(A)$  (aquí estamos usando la convexidad de  $A$ ). Por otro lado, despejando  $z$  de la definición de  $w$  obtenemos  $z = \lambda x_0 + (1 - \lambda)w$  donde  $\lambda = \frac{r}{r+2\|z-x_0\|} \in (0, 1)$ , de donde  $z \in (x_0, w) \subset [x_0, w) \subset \text{int}(A)$ . Esto prueba la primera igualdad de (5). En cuanto a la segunda, que  $\overline{\text{int}(A)} \subset \bar{A}$  es evidente (y no usa ninguna propiedad de  $A$ ). Recíprocamente, supongamos que  $A$  es convexo con interior no vacío y tomemos  $x_0 \in \text{int}(A)$  como antes. Dado  $z \in \bar{A}$ , el Lema 1.1.3 y la convexidad de  $A$  implican que  $[x_0, z) \subset \text{int}(A)$ . Por tanto,  $z$  es límite de puntos del interior de  $A$ , luego  $z \in \overline{\text{int}(A)}$ .  $\square$

**Nota 1.1.1** No es cierto que si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado entonces  $\text{conv}(A)$  sea necesariamente cerrada. Como contraejemplo podemos considerar  $A$  como la unión de una recta  $r$  en  $\mathbb{R}^2$  con un punto  $x_0$  exterior a  $r$ ; en este caso,  $\text{conv}(A)$  es la banda semiabierta bordeada por  $r$  y la recta paralela  $r'$  a  $r$  que pasa por  $x_0$ , unión con  $\{x_0\}$  (Figura 1.3 izquierda).

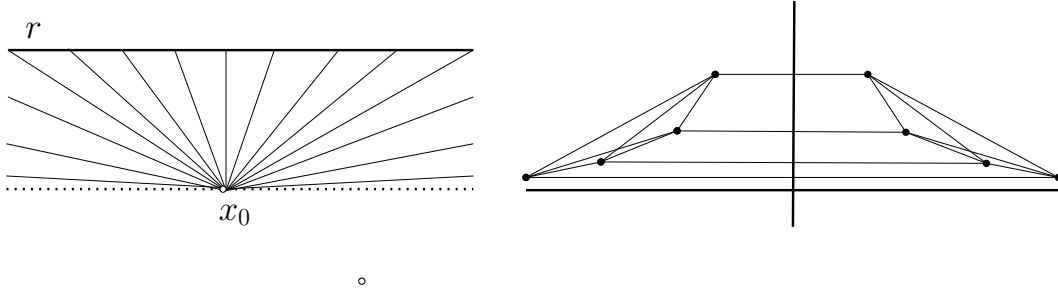


Figura 1.3: Aunque  $A \subset \mathbb{R}^2$  sea cerrado,  $\text{conv}(A)$  no tiene porqué serlo.

Otro contraejemplo es el conjunto  $A = \{(\pm n, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ , cerrado de  $\mathbb{R}^2$ . Sin embargo,  $\text{conv}(A)$  no es cerrado ya que el eje de abscisas está en  $\overline{\text{conv}(A)} - \text{conv}(A)$  (Figura 1.3 derecha).

## 1.2. Proyección sobre un conjunto convexo

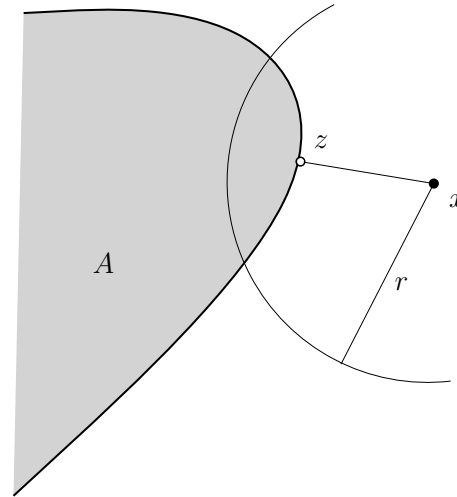
**Proposición 1.2.1** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto no vacío, cerrado y convexo. Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , existe un único  $p_A(x) \in A$  que minimiza la distancia a  $x$ , i.e., tal que  $d(x, p_A(x)) = d(x, A)$ .

*Demostración.* Veamos la existencia. Empezamos eligiendo  $r > 0$  tal que  $A \cap \overline{\mathbb{B}}(x, r)$  es un compacto no vacío. Consideramos la función distancia  $d_x: A \cap \overline{\mathbb{B}}(x, r) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $d_x(z) = d(x, z)$ . Como  $d_x$  es continua sobre el compacto  $A \cap \overline{\mathbb{B}}(x, r)$ , admitirá un mínimo  $z \in A \cap \overline{\mathbb{B}}(x, r)$ .

Este  $z$  es el punto  $p_A(x)$  buscado: si  $y \in A \cap \overline{\mathbb{B}}(x, r)$  entonces  $d(x, y) = d_x(y) \geq d_x(z) = d(x, z)$ . Y si  $y \in A - \overline{\mathbb{B}}(x, r)$ , entonces  $d(x, y) > r \geq d(x, z)$ . Por tanto,  $\inf_{y \in A} d(x, y) \geq d(x, z)$ , es decir,  $z$  minimiza la distancia de  $x$  a  $A$ . Notemos que no hemos usado que  $A$  es convexo.

Para la unicidad, supongamos que  $z_1, z_2 \in A$  minimizan  $d(x, A)$ . Consideremos el punto medio  $z$  de  $[z_1, z_2]$ , que está en  $A$  por ser  $A$  convexo. Veamos que  $z$  también minimiza  $d(x, A)$ :

$$\langle z_1 - z_2, x - z \rangle = \langle z_1 - z_2, x - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \rangle = \frac{1}{2} \langle z_1 - z_2, 2x - z_1 - z_2 \rangle$$

Figura 1.4: Encontrando  $z = p_A(x)$ .

Sustituyendo  $z_1 - z_2 = (x - z_2) - (x - z_1)$  y  $2x - z_1 - z_2 = (x - z_1) + (x - z_2)$  en la última expresión obtendremos  $\langle z_1 - z_2, x - z \rangle = \frac{1}{2} (\|x - z_2\|^2 - \|x - z_1\|^2) = \frac{1}{2} (d(x, A)^2 - d(x, A)^2) = 0$ . Esto nos dice que el triángulo  $xz_1z_2$  es rectángulo en el vértice  $z$ . Por el Teorema de Pitágoras,

$$\|x - z\|^2 \leq \|x - z_1\|^2 + \|z_1 - z_2\|^2 = \|x - z_2\|^2 = d(x, A)^2.$$

Como  $z \in A$ , se da la igualdad en la cadena anterior, luego  $z = z_2$  y por tanto  $z_1 = z_2$ .  $\square$

**Nota 1.2.1** El recíproco de la Proposición 1.2.1 es cierto, se conoce como Teorema de Bunt-Motzkin (1934-35): *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  cerrado tal que  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , existe un único  $a(x) \in A$  con  $d(x, a(x)) = d(x, A)$ . Entonces,  $A$  es convexo.* No probaremos (ni usaremos) este resultado, que puede encontrarse en el Teorema 1.2.4 de [2].

**Definición 1.2.1** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto no vacío, cerrado y convexo. Se define la *proyección métrica sobre  $A$* ,  $p_A: \mathbb{R}^n \rightarrow A$ , como la aplicación que a cada  $x \in \mathbb{R}^n$  le asocia el único  $p_A(x) \in A$  tal que  $d(x, p_A(x)) = d(x, A)$ .

**Proposición 1.2.2** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto no vacío, cerrado y convexo.*

- (1) *Si  $x \in \mathbb{R}^n - A$ , entonces  $p_A(x) \in \partial A$ .*
- (2)  *$x \in A$  si y sólo si  $p_A(x) = x$ .*

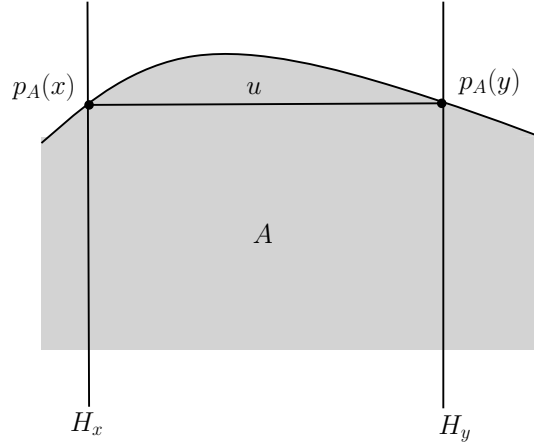


(3)  $p_A$  es una aplicación contractiva, i.e.  $d(p_A(x), p_A(y)) \leq d(x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  (en particular,  $p_A$  es Lipschitziana).

*Demostración.* Para el apartado (1), tomemos  $x \in \mathbb{R}^n - A$ . Si fuera  $p_A(x) \in \text{int}(A)$ , es claro que podríamos decrecer la distancia a  $x$  dentro de  $A$  (consideremos puntos dentro de una bola centrada en  $x$  contenida en  $A$ ).

En cuanto al apartado (2),  $p_A(x) = x \iff d(x, A) = d(x, x) = 0 \iff x \in \bar{A} = A$ .

Veamos (3): tomemos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Si  $p_A(x) = p_A(y)$ , no hay nada que probar. Así que supongamos que  $p_A(x) \neq p_A(y)$ . Sea  $u = p_A(x) - p_A(y) \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ . Sean  $H_x, H_y$  los hiperplanos afines de  $\mathbb{R}^n$  ortogonales a  $u$  que pasan por  $p_A(x), p_A(y)$  respectivamente.

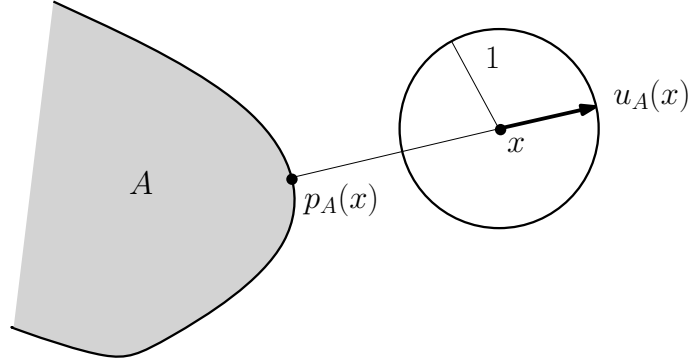


Sea  $B$  la banda abierta bordeada por  $H_x \cup H_y$ . Veamos que  $x \notin B$ : Si  $x \in B$ , consideremos el triángulo  $p_A(x)xp_A(y)$ , que tiene ángulos agudos en  $p_A(x)$  y en  $p_A(y)$ , luego  $x$  está a menor distancia a cierto punto del segmento  $(p_A(x), p_A(y))$  que de sus extremos. Pero  $(p_A(x), p_A(y)) \subset A$  por ser  $A$  convexo, lo que contradice la definición de  $p_A(x)$ . Esto nos dice que  $x \notin B$ , y razonando análogamente,  $y \notin B$ . Por tanto,  $d(x, y) \geq d(H_x, H_y) = \|u\| = d(p_A(x), p_A(y))$ .  $\square$

Nuestro próximo objetivo es probar que la frontera de un compacto convexo con interior no vacío es homeomorfa a la esfera  $(n-1)$ -dimensional. Necesitaremos algo de notación y tres lemas previos.

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado convexo no vacío. Definimos

$$(1.2) \quad u_A: \mathbb{R}^n - A \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}(1), \quad u_A(x) = \frac{x - p_A(x)}{\|x - p_A(x)\|}.$$



Así,  $u_A(x)$  es una 'especie' de normal unitario asociado a  $x$  en el punto  $p_A(x) \in \partial A$ :

También definimos la semirrecta 'normal' a  $\partial A$  en  $p_A(x)$  exterior a  $A$ :

$$R_A(x) = \{p_A(x) + \lambda u_A(x) \mid \lambda \geq 0\}$$

**Lema 1.2.1** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado convexo no vacío y  $x \in \mathbb{R}^n - A$ . Entonces,  $p_A(y) = p_A(x)$  para todo  $y \in R_A(x)$ .

*Demostración.* Tomemos  $y \in R_A(x)$ .

CASO I:  $y \in [p_A(x), x]$ .

$$\begin{aligned} d(x, p_A(y)) &\leq d(x, y) + d(y, p_A(y)) \\ &\leq d(x, y) + d(y, p_A(x)) \quad (\text{porque } p_A(x) \in A \text{ y por def. de } p_A(y)) \\ &= d(x, p_A(x)) \quad (\text{porque } y \in [p_A(x), x]). \end{aligned}$$

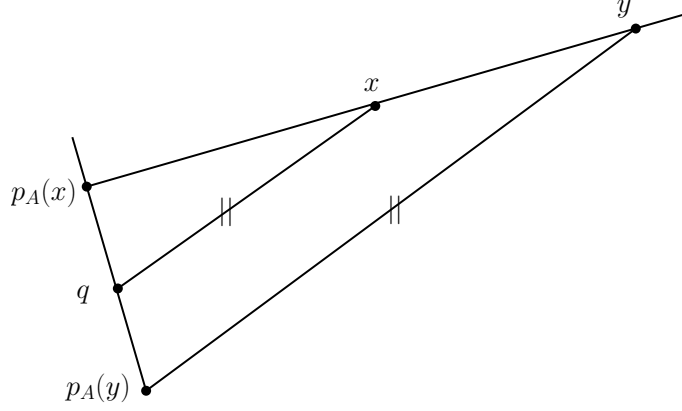
Aplicando la definición de  $p_A(x)$ , concluimos que  $p_A(y) = p_A(x)$ .

CASO II:  $y \notin [p_A(x), x]$  (luego  $x \in [p_A(x), y]$ ).

Consideremos el segmento  $[p_A(x), p_A(y)]$  (queremos ver que se reduce a un punto), que está contenido en  $A$  por ser  $A$  convexo. Tomemos el punto  $q \in [p_A(x), p_A(y)]$  tal que la recta  $\overline{qx}$  es paralela a la recta  $p_A(y)y$ :

Por proporcionalidad,  $\frac{d(y, p_A(x))}{d(x, p_A(x))} = \frac{d(y, p_A(y))}{d(x, q)}$  luego

$$\begin{aligned} d(x, q) &= d(x, p_A(x)) \frac{d(y, p_A(y))}{d(y, p_A(x))} \\ &\leq d(x, p_A(x)) \quad (\text{por def. de } p_A(y)). \end{aligned}$$



Pero  $q \in A$  por ser  $A$  convexo, luego la igualdad debe darse en la última desigualdad. Esto implica que  $d(y, p_A(y)) = d(y, p_A(x))$ . Por tanto,  $p_A(y) = p_A(x)$  (por definición de  $p_A(y)$ ).

□

**Lema 1.2.2** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado convexo no vacío, y  $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{n-1}(p, r)$  una esfera en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $A \subset \mathbb{B}(p, r)$  (en particular,  $A$  es compacto). Entonces,  $p_A(\mathbb{S}) = \partial A$ .

*Demostración.* Sabemos que  $p_A(\mathbb{R}^n - A) \subset \partial A$ . Como  $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n - A$ , tenemos  $p_A(\mathbb{S}) \subset \partial A$ . Recíprocamente, sea  $x \in \partial A$ . Tomemos una sucesión  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{B}(p, r) - A$  tal que  $d(x_i, x) < \frac{1}{i}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Así,

$$\begin{aligned} d(p_A(x_i), x) &= d(p_A(x_i), p_A(x)) \quad (x = p_A(x) \text{ porque } x \in A) \\ &\leq d(x_i, x) \quad (\text{por ser } p_A \text{ contractiva}) \\ &< 1/i, \end{aligned}$$

y por tanto  $p_A(x_i)$  converge a  $x$  cuando  $i \rightarrow \infty$ . Ahora consideremos para cada  $i \in \mathbb{N}$  la semirrecta  $R_A(x_i)$ , que tiene sentido porque  $x_i \notin A$ . Llamemos  $z_i$  al único punto de  $R_A(x_i) \cap \mathbb{S}$ . Como  $\mathbb{S}$  es compacta, tras pasar a una parcial podemos suponer que  $\{z_i\}_i$  converge a un punto  $z \in \mathbb{S}$ . Por último,

$$\begin{aligned} p_A(z) &= p_A(\lim_{i \rightarrow \infty} z_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} p_A(z_i) \quad (\text{por ser } p_A \text{ continua}) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} p_A(x_i) \quad (\text{por el Lema 1.2.1}) \\ &= x. \end{aligned}$$

□

**Lema 1.2.3** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado convexo y  $z \in \text{int}(A)$ . Si  $R$  es una semirrecta que parte de  $z$ , entonces  $R$  no puede cortar a  $\partial A$  en más de un punto.*

*Demostración.* Supongamos que  $R$  corta a  $\partial A$  en dos puntos  $x, y$  distintos. Entonces, uno de estos dos puntos, digamos  $x$ , es interior al segmento  $[z, y]$ . Como  $z \in \text{int}(A)$ , existe  $\rho > 0$  tal que  $\mathbb{B}(z, \rho) \subset A$ . Por convexidad de  $A$ , para todo  $w \in \mathbb{B}(z, \rho)$  el segmento  $[w, y]$  está contenido en  $A$ . Pero  $\cup_{w \in \mathbb{B}(z, \rho)} [w, y]$  es un entorno de  $x$ , luego  $x$  admite un entorno contenido en  $A$ . Esto contradice que  $x \in \partial A$ .  $\square$

**Teorema 1.2.1** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un compacto convexo con interior no vacío. Entonces,  $\partial A$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^{n-1}$ .*

*Demostración.* Tomemos un punto  $x_0 \in \text{int}(A)$ . Así, existe  $r > 0$  tal que  $\overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset \text{int}(A)$ . Sea  $\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$  y  $\mathbb{S} = \partial \overline{\mathbb{B}}$ . Como  $\overline{\mathbb{B}}$  es cerrado y convexo, tiene sentido la proyección métrica  $p_{\overline{\mathbb{B}}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{B}}$ . Por el apartado (1) de la Proposición 1.2.2,  $p_{\overline{\mathbb{B}}}(x) \in \mathbb{S} \forall x \in \mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{B}}$ . Como  $\partial A \subset \mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{B}}$ , tenemos  $p_{\overline{\mathbb{B}}}(\partial A) \subset \mathbb{S}$ . Esto nos permite considerar la restricción

$$(1.3) \quad F = (p_{\overline{\mathbb{B}}})|_{\partial A}: \partial A \rightarrow \mathbb{S}.$$

El teorema estará probado si vemos que la siguiente propiedad es cierta:

**Afirmación 1.2.1**  *$F$  es un homeomorfismo.*

*Demostración de la afirmación.*  $F$  es continua, por ser restricción de  $p_{\overline{\mathbb{B}}}$ , que era Lipschitziana.  $F$  es cerrada, por ir de un compacto a un espacio Hausdorff. Por tanto,  $F$  será un homeomorfismo si vemos que  $F$  es biyectiva.

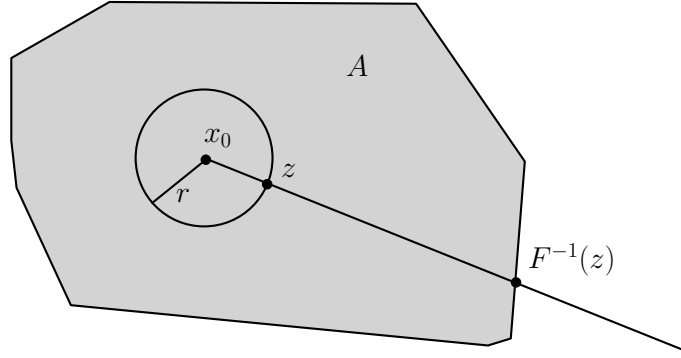
**$F$  ES SOBREYECTIVA.** Sea  $z \in \mathbb{S}$ . Tomemos una sucesión  $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{int}(A) - \overline{\mathbb{B}}$  convergiendo a  $z$  y consideremos la semirrecta  $R_{\overline{\mathbb{B}}}(z_i)$ , para cada  $i \in \mathbb{N}$ .  $R_{\overline{\mathbb{B}}}(z_i)$  corta a  $\partial A$  en al menos un punto  $w_i$  (porque la semirrecta  $R_{\overline{\mathbb{B}}}(z_i)$  empieza en  $z_i \in \text{int}(A)$  y es no acotada, mientras que  $A$  sí es acotado). Por el Lema 1.2.3,  $R_{\overline{\mathbb{B}}}(z_i) \cap \partial A$  se reduce al punto  $w_i$ . Como  $\{w_i\}_i$  es una sucesión en el compacto  $\partial A$ , tras pasar a una parcial podemos suponer que  $\{w_i\}_i$  converge a un punto  $w \in \partial A$ . Por último,

$$\begin{aligned} p_{\overline{\mathbb{B}}}(w) &= p_{\overline{\mathbb{B}}}(\lim_{i \rightarrow \infty} w_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} p_{\overline{\mathbb{B}}}(w_i) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} p_{\overline{\mathbb{B}}}(z_i) && \text{(por el Lema 1.2.1)} \\ &= p_{\overline{\mathbb{B}}}(\lim_{i \rightarrow \infty} z_i) \\ &= p_{\overline{\mathbb{B}}}(z) \\ &= z && \text{(porque } z \in \mathbb{S} = \partial \overline{\mathbb{B}}) \end{aligned}$$

**$F$  ES INYECTIVA.** Supongamos que  $a, b \in \partial A$  cumplen  $p_{\overline{\mathbb{B}}}(a) = p_{\overline{\mathbb{B}}}(b)$ . Esto nos dice que  $a, b$  están sobre la misma semirrecta  $R_{\overline{\mathbb{B}}}(a) = R_{\overline{\mathbb{B}}}(b)$ . Esto contradice el Lema 1.2.3.

□

**Nota 1.2.2** En la Afirmación 1.2.1 se ha visto que si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un compacto convexo con interior no vacío, y  $\bar{\mathbb{B}} = \bar{\mathbb{B}}(x_0, r)$  es una bola cerrada contenida en  $\text{int}(A)$ , entonces la aplicación  $F = (p_{\bar{\mathbb{B}}})|_{\partial A}: \partial A \rightarrow \mathbb{S} = \partial \bar{\mathbb{B}}$  es un homeomorfismo. La inversa de  $F$  es la aplicación que a cada  $z \in \mathbb{S}$  le asocia el *único* punto de  $\partial A$  obtenido al cortar la semirrecta  $\{x_0 + \lambda(z - x_0) \mid \lambda \geq 0\}$  con  $\partial A$ .



**Corolario 1.2.1** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un compacto convexo con interior no vacío, entonces  $A$  es homeomorfo a una bola cerrada  $n$ -dimensional.

*Demostración.* Tomemos una bola cerrada  $\bar{\mathbb{B}} = \bar{\mathbb{B}}(x_0, r)$  contenida en  $\text{int}(A)$ . Sea  $\phi = F^{-1}: \mathbb{S} = \partial \bar{\mathbb{B}} \rightarrow \partial A$  la aplicación inversa de  $F = (p_{\bar{\mathbb{B}}})|_{\partial A}$ . Construimos ahora una aplicación  $\Phi: \bar{\mathbb{B}} \rightarrow A$  de manera que  $\forall z \in \mathbb{S}$ , el segmento  $[x_0, z]$  se transforme linealmente en el segmento  $[x_0, \phi(z)]$ . Esto significa que debe cumplirse que  $\forall x \in \bar{\mathbb{B}} - \{x_0\}$ ,

$$(1.4) \quad \frac{\|x - x_0\|}{r} = \frac{\|\Phi(x) - x_0\|}{\|\phi(z) - x_0\|}, \quad \text{donde } z = r \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

Por tanto, debemos definir

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= x_0 + \|\Phi(x) - x_0\| \frac{z - x_0}{\|z - x_0\|} \\ &= x_0 + \frac{\|\phi(z) - x_0\|}{r} \|x - x_0\| \frac{z - x_0}{\|z - x_0\|} \quad (\text{por la ecuación (1.4)}) \\ &= x_0 + \frac{\|\phi(z) - x_0\|}{r} (x - x_0) \quad (\text{el normalizado de } z - x_0 \text{ coincide con el de } x - x_0), \end{aligned}$$

es decir, definimos

$$\Phi(x) = \begin{cases} x_0 + \frac{\|\phi\left(r \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) - x_0\|}{r} (x - x_0) & \text{si } x \in \bar{\mathbb{B}} - \{x_0\}, \\ x_0 & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que  $\Phi: \overline{\mathbb{B}} \rightarrow A$  es un homeomorfismo.  $\square$

### 1.3. Dimensión de un conjunto convexo

**Definición 1.3.1** Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$ , denotaremos por  $\text{aff}(A)$  al menor subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  que contenga a  $A$ . La dimensión de  $A$  es por definición

$$\dim A = \dim \text{aff}(A).$$

En la situación anterior, tomemos puntos  $x_0, \dots, x_k \in A$  afínmente independientes. Sea  $V \subset \mathbb{R}^n$  el subespacio afín generado por  $x_0, \dots, x_k$ . Entonces,  $V \subset \text{aff}(A)$ . Claramente,  $\text{aff}(A)$  se obtiene tomando la *mayor* cantidad de puntos posible en  $A$  afínmente independientes, es decir, si  $x_0, \dots, x_k \in A$  es un conjunto *maximal* de puntos afínmente independientes, entonces

$$\begin{aligned} \text{aff}(A) &= \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_i - x_0) \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k \right\} \\ &= \left\{ \left( 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) x_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k \right\} \quad \left( \text{llamo } \begin{cases} \lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i \\ \lambda_i = \alpha_i \quad \forall i \geq 1 \end{cases} \right) \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i \mid \lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

En particular,  $\text{conv}(A) \subset \text{aff}(A)$ . En la situación anterior,  $\dim A = \dim \text{aff}(A) = k$  y dado  $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i$  con  $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ , a  $(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$  se les llama *coordenadas afines*<sup>2</sup> de  $x$  respecto a  $x_0, \dots, x_k$ .

También definimos el *interior relativo* de  $A$  como

$$\text{rel int}(A) = \text{int}(A)^{\text{aff}(A)},$$

y la *frontera relativa* de  $A$  como

$$\text{rel fr}(A) = \text{fr}(A)^{\text{aff}(A)}$$

(ambos se refieren a la topología inducida en  $\text{aff}(A)$ ). Nótese que la clausura relativa de  $A$  sería  $\overline{A}^{\text{aff}(A)} = \overline{A} \cap \text{aff}(A) = \overline{A}$ , siendo esta última igualdad cierta porque  $\text{aff}(A)$  es cerrado de  $\mathbb{R}^n$ . Así que no usaremos la clausura relativa de  $A$  por coincidir con la clausura de  $A$  en  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup>Como  $x_0, \dots, x_k$  son puntos afínmente independientes, los vectores  $\{x_i - x_0 \mid i = 1, \dots, k\}$  son linealmente independientes, luego los escalares  $\alpha_i$  tales que  $x = x_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_i - x_0)$  son únicos. De aquí deducimos que las coordenadas afines  $(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$  también son únicas.

**Proposición 1.3.1** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un convexo no vacío. Entonces,  $\text{rel int}(A) \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Sea  $x_0, \dots, x_k \in A$  puntos afínmente independientes que generan  $\text{aff}(A)$ . Así,  $\forall x \in \text{aff}(A)$  existen únicos  $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  con  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$  y  $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i$ . Además,  $\lambda_i = \lambda_i(x)$  es función *continua* de  $x$  (se obtiene resolviendo un sistema de ecuaciones lineales). Consideremos el punto  $c = \frac{1}{k+1}(x_0 + \dots + x_k) \in \text{aff}(A)$ , obtenido tomando  $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = \frac{1}{k+1}$ . Salvo una transformación afín de  $\text{aff}(A) \cong \mathbb{R}^k$ , podemos suponer que  $x_0, \dots, x_k$  forman los vértices de un poliedro regular cuyo baricentro es  $c$  (es decir, los puntos  $x_i$  equidistan entre ellos y están en una  $(k-1)$ -esfera centrada en  $c$ ). De aquí es fácil deducir que existe  $\rho > 0$  tal que  $\mathbb{B}^k(c, \rho) \subset \text{conv}(\{x_0, \dots, x_k\})$ . Deshaciendo la transformación afín, concluimos que existe  $\rho_1 > 0$  tal que  $\mathbb{B}^k(c, \rho_1) \subset \{\sum_{i=0}^k \mu_i x_i \mid \mu_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \mu_i = 1\}$ . Ahora consideramos la bola  $n$ -dimensional  $\mathbb{B}^n(c, \rho_1)$  en  $\mathbb{R}^n$ , que cumple  $\mathbb{B}^n(c, \rho_1) \cap \text{aff}(A) \subset A$ , luego  $c \in \text{rel int}(A)$ .  $\square$

La misma idea de la última demostración prueba que

**Proposición 1.3.2** *Si  $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  son puntos afínmente independientes, entonces*

$$\text{rel int}[\text{conv}(\{x_0, \dots, x_k\})] = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i \mid \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \forall i \right\}.$$

## 1.4. Hiperplanos soporte

Dado  $H \subset \mathbb{R}^n$  un hiperplano, denotaremos por  $H^+, H^-$  a los dos semiespacios *cerrados* cuyo borde es  $H$ .

**Definición 1.4.1** Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $x_0 \in A$ , un hiperplano  $H \subset \mathbb{R}^n$  se dice *hiperplano soporte de  $A$  en  $x_0$*  si cumple

- (a)  $x_0 \in A \cap H$ .
- (b)  $A \subset H^+$  ó  $A \subset H^-$  (si  $A \subset H^+$  decimos que  $H^+$  es un *semiespacio soporte* de  $A$  en  $x_0$ ; análogamente si  $A \subset H^-$ ).

Notemos que si existe un hiperplano soporte  $H$  de  $A$  en  $x_0 \in A$ , entonces  $x_0 \notin \text{int}(A)$  (la condición (b) anterior es imposible si existe una bola centrada en  $x_0$  contenida en  $A$ ). Por tanto,  $x_0 \in A - \text{int}(A) \subset \partial A$ . Tampoco es posible esperar unicidad del hiperplano soporte: por ejemplo, si  $A$  es un triángulo en  $\mathbb{R}^2$ , el hiperplano soporte de  $S$  en cualquiera de sus vértices no es único. ¿Bajo qué condiciones existe siempre un hiperplano soporte  $\forall x_0 \in \partial A$ ?

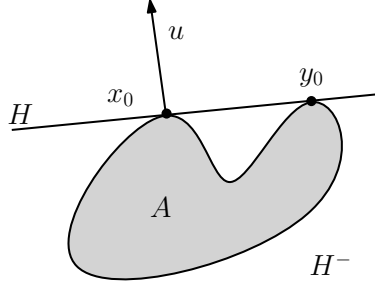


Figura 1.5:  $H$  es hiperplano soporte de  $A$  en los puntos  $x_0, y_0$ .  $u$  es un vector normal exterior a  $A$  en ambos puntos.

Supongamos que  $H$  es un hiperplano soporte de  $A$  en  $x_0 \in \partial A$ , con  $A \subset H^-$ . Siempre podremos escribir  $H, H^-$  como

$$H = H_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}, \quad H^- = H_{u,\alpha}^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \leq \alpha\}$$

para ciertos  $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Como  $A \subset H^-$ , diremos que  $u$  es un *vector normal exterior* a  $A$  en  $x_0$  ( $u$  no tiene porqué ser único, como tampoco lo es el hiperplano soporte a  $A$  en  $x_0$  caso de existir).

**Lema 1.4.1** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado convexo no vacío. Consideremos la proyección métrica  $p_A: \mathbb{R}^n \rightarrow A$  y la aplicación  $u_A: \mathbb{R}^n - A \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}(1)$  definida en (1.2). Entonces, dado  $x \in \mathbb{R}^n - A$  el hiperplano  $H = p_A(x) + \langle u_A(x) \rangle^\perp$  es un hiperplano soporte de  $A$  en  $p_A(x)$ , y  $u_A(x)$  es un vector normal exterior a  $A$  en  $p_A(x)$ .*

*Demostración.* Sólo queda comprobar que  $A \subset H^- = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - p_A(x), u_A(x) \rangle \leq 0\}$ . Por reducción al absurdo, supongamos que existe  $z \in A$  tal que  $\langle z - p_A(x), u_A(x) \rangle > 0$ . Consideremos el punto  $z_t = p_A(x) + t(z - p_A(x))$  que está en  $A$  para cada  $t \in [0, 1]$  por convexidad de  $A$ , y la función  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) = \|z_t - x\|^2 = \|p_A(x) - x\|^2 + 2t\langle p_A(x) - x, z - p_A(x) \rangle + t^2\|z - p_A(x)\|^2$$

(polinómica de grado 2, luego de clase  $C^\infty$ ). Así,

$$f'(0) = 2\langle p_A(x) - x, z - p_A(x) \rangle = -2\|x - p_A(x)\|\langle u_A(x), z - p_A(x) \rangle < 0.$$

Por tanto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(t) < f(0)$  para cada  $t \in (0, \varepsilon)$ . Esto es,  $d(z_t, x) < d(p_A(x), x)$  para cada  $t \in (0, \varepsilon)$ , lo que contradice la definición de  $p_A(x)$ .  $\square$



**Corolario 1.4.1** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado convexo no vacío. Entonces,  $A$  es la intersección de todos sus semiespacios soporte.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{S}$  el conjunto de los semiespacios soporte de  $A$ . Así,  $A \subset S \forall S \in \mathcal{S}$ , luego  $A \subset \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S$ . Y existiera  $x \in (\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S) - A$ , entonces  $p_A(x) + \langle u_A(x) \rangle^\perp$  sería un hiperplano soporte de  $A$  que no pasa por  $x$ , luego el semiespacio soporte de  $A$  en  $p_A(x)$  no contendría a  $x$ , contradicción.  $\square$

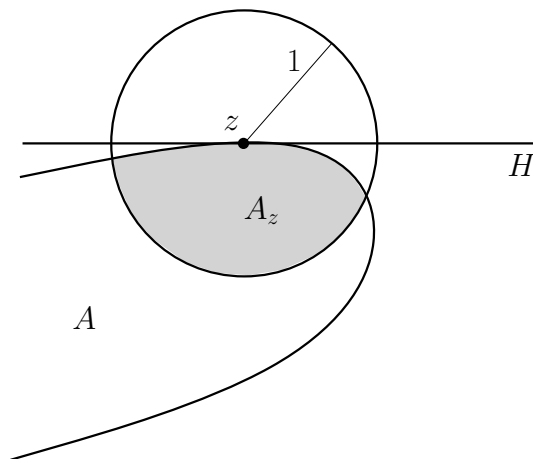
Asociados a cada hiperplano soporte tenemos el punto base y el vector normal exterior. Nos preguntamos ahora por la existencia de hiperplanos soporte con cualquiera de estos datos prefijados.

**Teorema 1.4.1** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado no vacío.*

- (1) *Si  $A$  es convexo, dado  $z \in \partial A$ , existe un hiperplano soporte de  $A$  en  $z$ .*
- (2) *Si  $A$  es acotado, dado  $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  existe un hiperplano soporte de  $A$  con vector normal exterior  $u$ .*

*Demostración.* Veamos el apartado (1). Empezaremos suponiendo que  $A$  es acotado. Por tanto, existe  $R > 0$  tal que  $A \subset \mathbb{B}(\vec{0}, R)$ . Por el Lema 1.2.2,  $p_A(\mathbb{S}) = \partial A$  donde  $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{n-1}(\vec{0}, R)$ . Por tanto dado  $z \in \partial A$ , existe  $x \in \mathbb{S}$  tal que  $p_A(x) = z$ . Como  $x \in \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n - A$ , el Lema 1.4.1 asegura que  $H = p_A(x) + \langle u_A(x) \rangle^\perp$  es un hiperplano soporte de  $A$  en  $p_A(x) = z$ .

Ahora probaremos el apartado (1) en el case de que  $A$  no sea acotado. Tomemos  $z \in \partial A$  y consideremos el conjunto cerrado, acotado y convexo  $A_z = A \cap \overline{\mathbb{B}}(z, 1)$ .



Como  $z \in \partial A_z$ , el párrafo anterior garantiza que existe un hiperplano  $H$  soporte de  $A_z$  en  $z$ . Queda probar que  $H$  es también hiperplano soporte de  $A$  en  $z$ . Sea  $H^-$  el semiespacio cerrado bordeado por  $H$  que contiene a  $A_z$ . Si existiera  $y \in A - H^-$ , entonces  $(z, y)$  estaría contenido en  $\mathbb{R}^n - H^-$ . Como  $z, y$  están en el convexo  $A$ , entonces  $[z, y] \subset A$ , luego  $(z, y) \cap [A \cap \mathbb{B}(z, 1)] \neq \emptyset$ . Esto contradice que  $(z, y) \subset \mathbb{R}^n - H^-$  y  $A_z \subset H^-$ .

En cuanto al apartado (2), sea  $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ . Consideremos la función altura  $f_u: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_u(x) = \langle x, u \rangle$ . Como  $A$  es compacto (es cerrado y acotado) y  $f_u$  es continua,  $f_u$  admite un máximo absoluto  $x_0 \in A$ . Esto nos dice que  $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \leq f_u(x_0)\} = H_{u, f_u(x_0)}^-$ , de donde  $H_{u, f_u(x_0)}$  es un hiperplano soporte de  $A$  en  $x_0$  con vector normal exterior  $u$ .  $\square$

**Nota 1.4.1** (a) El apartado (1) del Teorema 1.4.1 sigue siendo cierto si  $A$  está contenido en un hiperplano  $H$  de  $\mathbb{R}^n$ , independientemente de que  $A$  sea convexo o no: es este caso,  $H$  es un hiperplano soporte de  $A$  en cada  $x_0 \in A = \partial A$ .

(b) El apartado (2) del Teorema 1.4.1 no es cierto si eliminamos la hipótesis de acotación sobre  $A$ . Por ejemplo,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$  es convexo, cerrado, no acotado, y el conjunto de los vectores  $u \in \mathbb{S}^1(1)$  para los que existe un hiperplano (recta) soporte de  $A$  con vector normal exterior  $u$  es  $\mathbb{S}_-^1 = \{u \in \mathbb{S}^1(1) \mid u_2 < 0\}$ , donde  $u = (u_1, u_2)$ .

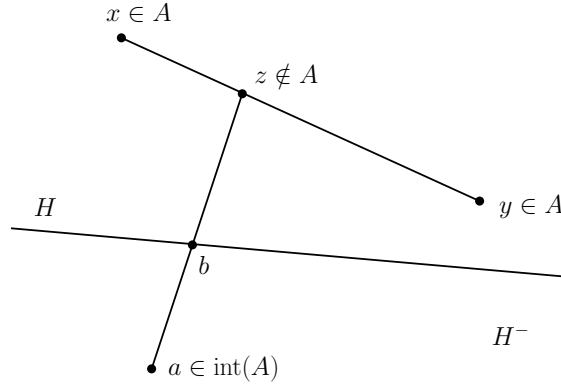
A continuación veremos el recíproco del apartado (1) del Teorema 1.4.1.

**Teorema 1.4.2** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado con interior no vacío, tal que para cada  $x_0 \in \partial A$  existe un hiperplano soporte de  $A$  en  $x_0$ . Entonces,  $A$  es convexo.*

**Nota 1.4.2** Si eliminamos la hipótesis  $\text{int}(A) \neq \emptyset$  del Teorema 1.4.2, éste ya no es cierto: basta considerar un subconjunto no convexo  $A$  contenido en un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que  $A$  no es convexo. Así, existen  $x, y \in A$  y  $z \in [x, y] - A$ . Tomemos un punto  $a \in \text{int}(A)$ . Como los extremos del segmento  $[a, z]$  cumplen  $a \in \text{int}(A)$ ,  $z \notin A$ , entonces existe  $b \in (a, z) \cap \partial A$ . Por hipótesis existe un hiperplano  $H$  soporte de  $A$  en  $b$ . Sea  $H^-$  el semiespacio determinado por  $H$  que contiene a  $A$ .

Como  $a \in \text{int}(A)$ , tenemos  $a \notin H$  luego  $a \in H^- - H$ . Como  $b \in H$ , deducimos que la recta que pasa por  $a$  y  $b$  corta *transversalmente* a  $H$ . Por tanto,  $z \notin H^-$ . Por último,  $x, y \in A \subset H^-$  y  $H^-$  es convexo, luego  $[x, y] \subset H^-$ , lo que contradice que  $z \notin H^-$ .  $\square$



## 1.5. Separación

**Definición 1.5.1** Diremos que un hiperplano  $H \subset \mathbb{R}^n$  separa dos conjuntos  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  si  $A \subset H^+$  y  $B \subset H^-$ , donde  $H^+, H^-$  son los semiespacios cerrados determinados por  $H$ .

$H$  separa estrictamente  $A$  y  $B$  si  $A \subset \text{int}(H^+)$  y  $B \subset \text{int}(H^-)$ .

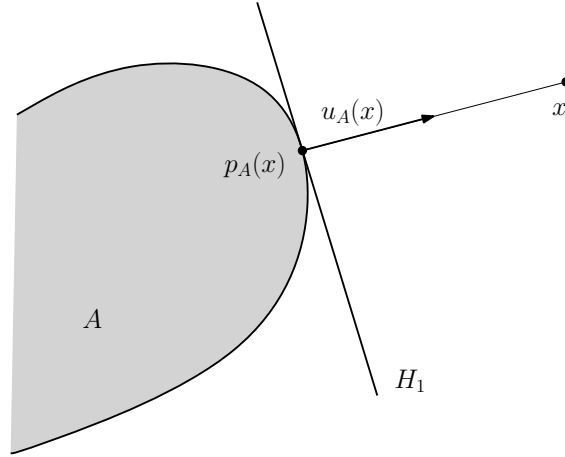
$H$  separa fuertemente  $A$  y  $B$  si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $A \subset H_{u, \alpha + \varepsilon}^+$  y  $B \subset H_{u, \alpha - \varepsilon}^-$ , donde  $H = H_{u, \alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}$ .

**Teorema 1.5.1** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un convexo no vacío, y  $x \in \mathbb{R}^n - A$ . Entonces,  $A$  y  $\{x\}$  pueden separarse por un hiperplano. Si además  $A$  es cerrado, entonces  $A$  y  $\{x\}$  pueden separarse fuertemente por un hiperplano.

*Demostración.* Empezaremos suponiendo que  $A$  es cerrado (y convexo). En este caso, tiene sentido la proyección métrica  $p_A: \mathbb{R}^n \rightarrow A$  y la aplicación  $u_A: \mathbb{R}^n - A \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}(1)$  definida en (1.2). En la demostración del Lema 1.4.1 vimos que si llamamos  $H_1 = p_A(x) + \langle u_A(x) \rangle^\perp$ , entonces  $H_1$  es un hiperplano soporte de  $A$  en  $p_A(x)$  con vector normal exterior  $u_A(x)$  a  $A$  en  $p_A(x)$ , y que  $A \subset H_1^- = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - p_A(x), u_A(x) \rangle \leq 0\}$ .

Como  $x \in \mathbb{R}^n - A$  y  $A$  es cerrado, tenemos  $d(x, A) > 0$ . Por tanto, el hiperplano  $H = \frac{1}{2}(x + p_A(x)) + \langle u_A(x) \rangle^\perp$  separa fuertemente  $A$  y  $\{x\}$ , tomando  $\varepsilon = \frac{d(x, A)}{2}$  en la Definición 1.5.1.

Supongamos ahora que  $A$  es un convexo no necesariamente cerrado. Si  $x \notin \bar{A}$ , entonces  $d(x, A) > 0$  y el argumento anterior aplicado al convexo cerrado  $\bar{A}$  prueba que  $H$  separa fuertemente  $A$  y  $\{x\}$ . Queda estudiar el caso  $x \in \partial A$ . Aplicando el apartado (1) del Teorema 1.4.1 al convexo cerrado  $\bar{A}$  y al punto  $x \in \partial \bar{A} = \partial A$ , deducimos que existe un hiperplano soporte  $H_2$  de  $\bar{A}$  en  $x$ . Por definición de hiperplano soporte, tenemos  $x \in \bar{A} \cap H_2$  y  $\bar{A} \subset H_2^-$  (salvo orientación), luego  $H_2$  separa  $A$  de  $\{x\}$ .  $\square$



Nuestro siguiente objetivo será generalizar el Teorema 1.5.1 para separar fuertemente no un cerrado convexo de un punto fuera de éste, sino un cerrado convexo de otro convexo compacto disjunto con el primero. Necesitaremos dos lemas previos.

**Lema 1.5.1** Sean  $A, B$  dos subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ .

- (a)  $A$  y  $B$  pueden separarse por un hiperplano si y sólo si  $A - B$  y  $\{\vec{0}\}$  pueden separarse por un hiperplano.
- (b)  $A$  y  $B$  pueden separarse fuertemente por un hiperplano si y sólo si  $A - B$  y  $\{\vec{0}\}$  pueden separarse fuertemente por un hiperplano.

**Nota 1.5.1** El lema no es cierto para separación estricta: tomemos en  $\mathbb{R}^2$  los subconjuntos (convexos)  $A = \{(x, y) \mid x > 0, y \geq 1/x\}$ ,  $B = \{(x, 0) \mid x > 0, y \leq -1/x\}$ . Así, el eje  $x$  separa estrictamente  $A$  y  $B$ . Sin embargo,  $A - B$  no puede separarse estrictamente de  $\vec{0}$  porque  $\vec{0} \in \overline{A - B}$ . Para comprobar esto, consideremos las sucesiones  $p_n = (n, 1/n) \in A$ ,  $q_n = (n, -1/n) \in B$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $p_n - q_n = (0, 2/n) \in A - B$  tiende a  $\vec{0}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Probaremos (a) y (b) a la vez: basta tomar en lo que sigue  $\varepsilon > 0$  para (b) y  $\varepsilon = 0$  para (a).

$\Rightarrow$  Supongamos que existen  $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon \geq 0$  tales que  $A \subset H_{u, \alpha - \varepsilon}^-$  y  $B \subset H_{u, \alpha + \varepsilon}^+$ . Dado  $x \in A - B$ , existen  $a \in A$  y  $b \in B$  tales que  $x = a - b$ . Como  $\langle a, u \rangle \leq \alpha - \varepsilon$  y  $\langle b, u \rangle \geq \alpha + \varepsilon$ , entonces  $\langle x, u \rangle \leq -2\varepsilon$ .

Si  $\varepsilon = 0$ , lo anterior nos dice que  $A - B \subset H_{u, 0}^-$ . Como  $\vec{0} \in H_{u, 0}^+$ , concluimos que  $A - B$ ,  $\vec{0}$  pueden separarse por  $H_{u, 0}$ .

Si  $\varepsilon > 0$ , deducimos que  $A - B \subset H_{u, \alpha - \varepsilon}^-$  donde  $\alpha = -\varepsilon$ . Como  $\vec{0} \in H_{u, 0}^+ = H_{u, \alpha + \varepsilon}^+$ , concluimos que  $A - B, \vec{0}$  pueden separarse fuertemente por  $H_{u, -\varepsilon}$ .

◀ Supongamos que existen  $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ ,  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon \geq 0$  tales que  $A - B \subset H_{u, \bar{\alpha} - \varepsilon}^-$  y  $\vec{0} \in H_{u, \bar{\alpha} + \varepsilon}^+$ . Por tanto,

$$(1.5) \quad \langle a, u \rangle - \langle b, u \rangle \leq \bar{\alpha} - \varepsilon, \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Tomando supremo en  $A$ ,  $(\sup_{a \in A} \langle a, u \rangle) - \langle b, u \rangle \leq \bar{\alpha} - \varepsilon$ , luego existe  $\alpha := \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle \in \mathbb{R}$ . Tomando ínfimo en  $B$  en (1.5), obtenemos  $\langle a, u \rangle - (\inf_{b \in B} \langle b, u \rangle) \leq \bar{\alpha} - \varepsilon$ , luego existe  $\beta := \inf_{b \in B} \langle b, u \rangle \in \mathbb{R}$ , y además

$$(1.6) \quad \alpha - \beta \leq \bar{\alpha} - \varepsilon.$$

Por otro lado, como  $\vec{0} \in H_{u, \bar{\alpha} + \varepsilon}^+$  entonces

$$(1.7) \quad 0 = \langle \vec{0}, u \rangle \geq \bar{\alpha} + \varepsilon.$$

Finalmente, dados  $a \in A, b \in B$ ,

$$\langle a, u \rangle \leq \alpha = (\alpha - \beta) + \beta \stackrel{(1.6)}{\leq} (\bar{\alpha} - \varepsilon) + \beta = (\bar{\alpha} + \varepsilon) - 2\varepsilon + \beta \stackrel{(1.7)}{\leq} -2\varepsilon + \beta \stackrel{(*)}{\leq} \beta \leq \langle b, u \rangle.$$

Por tanto, si  $\varepsilon = 0$  entonces  $A$  y  $B$  pueden separarse por un hiperplano, mientras que si  $\varepsilon > 0$ ,  $(*)$  nos asegura que  $A$  y  $B$  pueden separarse fuertemente por un hiperplano.  $\square$

**Lema 1.5.2** Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ .

- (a) Si  $A, B$  son convexos, entonces  $A - B$  es convexo.
- (b) Si  $A$  es compacto y  $B$  cerrado, entonces  $A - B$  es cerrado.
- (c)  $A \cap B = \emptyset$  si y sólo si  $\vec{0} \notin A - B$ .

*Demostración.* Para (a), como  $B$  es convexo,  $-B$  también lo es (apartado (3) de la Proposición 1.1.1). Como  $A$  y  $-B$  son convexos,  $A - B = A + (-B)$  también lo es (apartado (3) de la Proposición 1.1.1).

Veamos (b). Dado  $x \in \overline{A - B}$ , existen  $\{a_n\}_n \subset A, \{b_n\}_n \subset B$  tales que  $a_n - b_n$  converge a  $x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $A$  es compacto, tras pasar a una parcial podemos suponer que  $\{a_n\}_n$  converge a un elemento  $a \in A$ . Así,  $\{b_n\}_n$  converge y su límite es  $a - x$ . Como  $b_n \in B$  y  $B$  es cerrado,  $a - x \in B$ . Esto nos dice que  $x = a - (a - x) \in A - B$ , luego  $A - B$  es cerrado.

(c) es evidente.  $\square$

Ya podemos probar el resultado que buscábamos.

**Teorema 1.5.2** Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  convexos, no vacíos, disjuntos, con  $A$  compacto y  $B$  cerrado. Entonces,  $A$  y  $B$  pueden separarse fuertemente por un hiperplano.

*Demostración.* Como  $A, B$  son convexos,  $A$  compacto y  $B$  cerrado, y  $A \cap B = \emptyset$ , el Lema 1.5.2 asegura que  $\vec{0} \notin A - B$  (apartado (c)),  $A - B$  es cerrado (apartado (b)), y  $A - B$  es convexo (apartado (a)). Aplicando a  $A - B$  y a  $\vec{0}$  el Teorema 1.5.1 tendremos que  $A - B, \{\vec{0}\}$  pueden separarse fuertemente por un hiperplano. Finalmente, el Lema 1.5.1 implica que  $A, B$  pueden separarse fuertemente por un hiperplano.  $\square$

**Nota 1.5.2** Si eliminamos la hipótesis de compacidad sobre  $A$ , el Teorema 1.5.2 ya no es cierto: basta considerar el mismo par de conjuntos  $A, B$  de la Nota 1.5.1, que no pueden separarse fuertemente ( $d(A, B) = 0$ ) pero  $A, B$  cumplen las demás hipótesis del Teorema 1.5.2.

## 1.6. Envolvente convexa

Recordemos que la envolvente convexa de un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es la intersección de todos los conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $A$  (apartado (2) de la Proposición 1.1.2). Vamos a refinar este resultado tomando una intersección en una familia menor (a cambio, debemos imponer que  $A$  sea compacto).

**Teorema 1.6.1** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un compacto no vacío. Entonces, la envolvente convexa de  $A$  es la intersección de todos los semiespacios cerrados de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $A$ .

*Demostración.* Llamemos  $\mathcal{S}$  a la familia de todos los semiespacios cerrados de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $A$ ;  $\mathcal{S}$  es no vacía, ya que  $A$  es acotado por ser compacto. Dado  $S \in \mathcal{S}$ , tenemos  $A \subset S$  luego  $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(S) = S$ , y por tanto  $\text{conv}(A) \subset \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S$ . Recíprocamente, tomemos un punto  $x \in \mathbb{R}^n - \text{conv}(A)$  y veamos que existe  $S \in \mathcal{S}$  tal que  $x \notin S$ . Como  $A$  es compacto, el apartado (4) de la Proposición 1.1.3 asegura que  $\text{conv}(A)$  es compacta. Aplicando el Teorema 1.5.2 al convexo compacto  $\text{conv}(A)$  y al cerrado  $\{x\}$  podremos separar fuertemente  $\text{conv}(A)$  y  $\{x\}$  por un hiperplano, lo que termina la demostración.  $\square$

Recordemos que dado  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ , el *diámetro* de  $A$  se define como  $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \in [0, \infty]$ . Así,

- $A$  es acotado si y sólo si  $\text{diam}(A) < \infty$ .
- Si  $\text{diam}(A) < r < \infty$ , entonces cualquier bola abierta de radio  $r$  centrada en un punto de  $A$  contiene a  $A$ .

El diámetro es claramente no decreciente respecto a la inclusión. Sin embargo, el diámetro no crece al tomar envolvente convexa:

**Teorema 1.6.2** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es no vacío, entonces  $\text{diam}(A) = \text{diam}(\text{conv}(A))$ .

*Demostración.* Como  $A \subset \text{conv}(A)$ , entonces  $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(\text{conv}(A))$ . Para otra desigualdad, primero notemos que si  $A$  es no acotado, entonces  $\text{diam}(A) = \infty$  y  $\text{conv}(A)$  también es no acotado por contener a  $A$ , luego también  $\text{diam}(\text{conv}(A)) = \infty$ . Es decir, sólo queda probar:

( $\star$ ) Si  $A$  es acotado, entonces  $\text{diam}(\text{conv}(A)) \leq \text{diam}(A)$ .

Veamos entonces ( $\star$ ). Como  $A$  es acotado,  $\text{diam}(A)$  es finito. Tomemos un número real  $r > \text{diam}(A)$ . Por la última observación antes del Teorema 1.6.2, tenemos

$$(1.8) \quad A \subset \mathbb{B}(a, r), \quad \forall a \in A.$$

en particular,

$$(1.9) \quad \text{conv}(A) \subset \text{conv}(\mathbb{B}(a, r)) = \mathbb{B}(a, r), \quad \forall a \in A.$$

Fijados  $y \in \text{conv}(A)$  y  $a \in A$ , (1.9) implica que  $y \in \mathbb{B}(a, r)$  luego  $a \in \mathbb{B}(y, r)$ . Moviendo  $a$  en  $A$ ,

$$(1.10) \quad A \subset \mathbb{B}(y, r), \quad \forall y \in \text{conv}(A).$$

Y de nuevo tomando envolventes convexas,

$$(1.11) \quad \text{conv}(A) \subset \mathbb{B}(y, r), \quad \forall y \in \text{conv}(A).$$

Ya podemos probar ( $\star$ ): Fijemos  $r > \text{diam}(A)$ . Dados  $y, y' \in \text{conv}(A)$ , tenemos  $y' \in \mathbb{B}(y, r)$  por (1.11), luego  $d(y, y') < r$ . moviendo  $y, y'$  en  $\text{conv}(A)$  obtenemos  $\text{diam}(\text{conv}(A)) \leq r$ . Como esto es cierto  $\forall r > \text{diam}(A)$ , deducimos ( $\star$ ).  $\square$

Nuestro siguiente objetivo será responder la siguiente cuestión: Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo, es claro que existe  $A_0 \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $A = \text{conv}(A_0)$  (por ejemplo, podemos tomar  $A_0 = A$ ; de hecho, esta elección es el *mayor*  $A_0 \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $A = \text{conv}(A_0)$ ). Pero ¿cómo elegir  $A_0$  para que sea lo menor posible? Un ejemplo sencillo en el que pensar es cuando  $A$  es un triángulo, y  $A_0$  es el conjunto de sus vértices.

**Definición 1.6.1** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo. Un punto  $x \in A$  se dice *extremo* de  $A$  si no existen  $x_1, x_2 \in A$  tales que  $x \in (x_1, x_2)$ . Llamaremos

$$\text{extr}(A) = \{x \in A \mid x \text{ es punto extremo de } A\}.$$

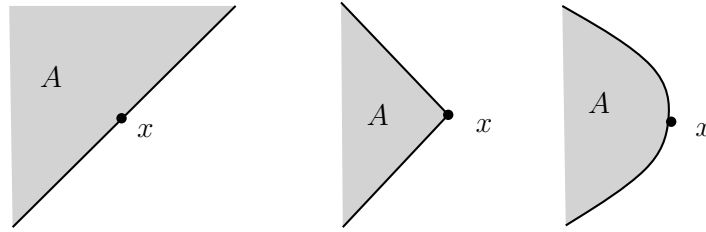


Figura 1.6: Izquierda:  $x$  no es un punto extremo de  $A$ . Centro, derecha:  $x$  sí es punto extremo.

Por ejemplo, si  $A = [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}^n$ , entonces  $\text{extr}(A) = \{x_1, x_2\}$ . En general, es claro que si  $x \in A$  es un punto extremo de  $A$ , entonces  $x \notin \text{int}(A)$ . En particular, un convexo abierto no tiene puntos extremos. Un semiespacio cerrado tampoco tiene puntos extremos.

**Lema 1.6.1** *Sea  $H \subset \mathbb{R}^n$  un hiperplano soporte de un convexo  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces,  $\text{extr}(A) \cap H = \text{extr}(A \cap H)$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in \text{extr}(A) \cap H$ . Por reducción al absurdo, supongamos que existen  $x_1, x_2 \in A \cap H$  tales que  $x \in (x_1, x_2)$ . Como  $x_1, x_2 \in A$  deducimos que  $x \notin \text{extr}(A)$ , contradicción.

Recíprocamente,  $\text{extr}(A \cap H) \subset A \cap H \subset H$ , luego sólo queda comprobar que  $\text{extr}(A \cap H) \subset \text{extr}(A)$ . Por reducción al absurdo, supongamos que  $x \in \text{extr}(A \cap H) - \text{extr}(A)$ . Así,  $x \in A \cap H$  y existen  $x_1, x_2 \in A$  tales que  $x \in (x_1, x_2)$ . Si el segmento  $(x_1, x_2)$  es transversal a  $H$  en  $x$ , entonces  $H$  no puede ser un hiperplano soporte de  $A$ , contradicción. Por tanto,  $(x_1, x_2)$  no atraviesa  $H$ . Como  $x \in (x_1, x_2) \cap H$ , entonces  $(x_1, x_2) \subset H$ , lo que contradice que  $x \in \text{extr}(A \cap H)$ .  $\square$

**Teorema 1.6.3** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un compacto convexo no vacío. Entonces, todo hiperplano soporte<sup>3</sup> de  $A$  contiene al menos un punto extremo de  $A$ .*

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ : para  $n = 1$ , un compacto convexo no vacío es un intervalo  $A = [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ , cuyos puntos extremos son  $\text{extr}(A) = \{x_1, x_2\}$ , y los hiperplanos soporte de  $A$  son  $\{x_1\}, \{x_2\}$ , luego el teorema se cumple trivialmente.

Supongamos que el teorema es cierto para compactos convexos no vacíos de  $\mathbb{R}^{n-1}$  y sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  un compacto convexo no vacío y  $H$  un hiperplano soporte de  $A$ . Por el Lema 1.6.1,  $\text{extr}(A) \cap H = \text{extr}(A \cap H)$ . Como  $A \cap H$  es un convexo compacto no vacío de

<sup>3</sup>Por el Teorema 1.4.1, existen hiperplanos soporte de  $A$  pasando por cada punto de  $\partial A$ , luego en particular el teorema asegura que  $\text{extr}(A) \neq \emptyset$ .



$H$  (es decir, de  $\mathbb{R}^{n-1}$ ), por hipótesis de inducción se tiene que  $\text{extr}(A \cap H) \neq \emptyset$ . De nuevo por el Lema 1.6.1, tenemos  $\text{extr}(A) \cap H \neq \emptyset$ .  $\square$

Es claro que un polígono convexo en  $\mathbb{R}^2$  queda determinado sólo por sus vértices, que son sus puntos extremos. A continuación veremos una versión más general de este resultado, válida para convexos compactos de  $\mathbb{R}^n$  no necesariamente 'poligonales'. Usaremos más adelante esta versión generalizada para caracterizar los politopos (Teorema 1.10.1). Conviene mencionar que este mismo tipo de resultado es válido en situaciones mucho más generales, como en ciertos espacios vectoriales topológicos que aparecen en Análisis Funcional; el teorema en su mayor generalidad se conoce como *Teorema de Krein-Milman*, aunque fue Minkowski el que lo probó en  $\mathbb{R}^n$ .

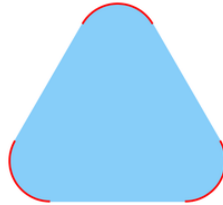


Figura 1.7: En rojo: los puntos extremos del convexo.

**Teorema 1.6.4** (*Teorema de Krein-Milman en  $\mathbb{R}^n$* ). Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un compacto convexo no vacío. Entonces,  $A = \overline{\text{conv}(\text{extr}(A))}$ .

*Demostración.*

$\supseteq$   $\text{extr}(A) \subset A$  luego  $\text{conv}(\text{extr}(A)) \subset \text{conv}(A) = A$  por ser  $A$  convexo. Tomando clausuras,  $\overline{\text{conv}(\text{extr}(A))} \subset \overline{A} = A$  por ser  $A$  cerrado.

$\subseteq$  Por reducción al absurdo, supongamos que  $x \in A - \overline{\text{conv}(\text{extr}(A))}$ . Así,  $\{x\}$  es un compacto convexo,  $\overline{\text{conv}(\text{extr}(A))}$  es un cerrado convexo, y ambos conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  son disjuntos. Por el Teorema 1.5.2,  $\{x\}$  y  $\overline{\text{conv}(\text{extr}(A))}$  pueden separarse fuertemente por un hiperplano  $H_{u,\alpha}$ , luego existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\overline{\text{conv}(\text{extr}(A))} \subset H_{u,\alpha-\varepsilon}^-$  y  $x \in H_{u,\alpha+\varepsilon}^+$ .

Por el apartado (2) del Teorema 1.4.1, al ser  $A$  compacto podemos prefijar el vector normal exterior y encontrar un hiperplano soporte de  $A$  con dicho vector normal exterior. Aplicando esto al vector  $u$ , encontramos un  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $H_{u,\beta}$  es un hiperplano soporte de  $A$  en cierto punto:

Por tanto,  $A \subset H_{u,\beta}^-$  luego  $\alpha + \varepsilon \leq \beta$ .

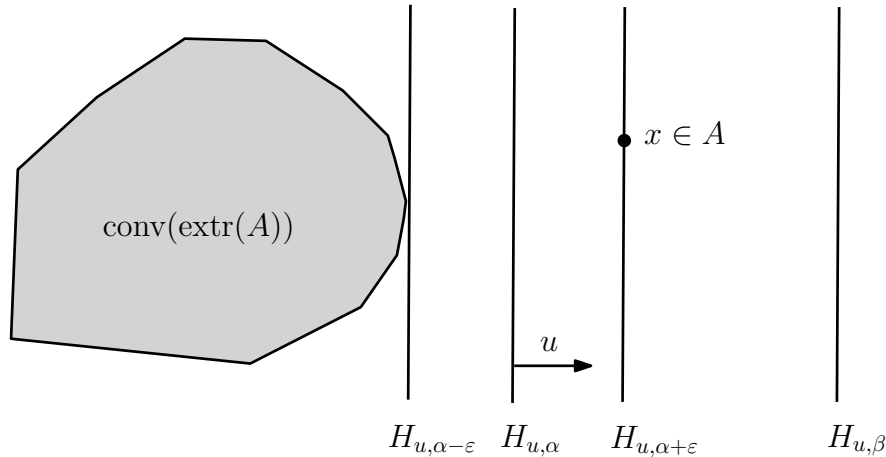


Figura 1.8:  $x$  podría quedar a la derecha de  $H_{u, \alpha + \epsilon}$ , pero nunca a su izquierda.

Por otro lado, el Teorema 1.6.3 asegura que  $H_{u, \beta}$  contiene algún punto extremo de  $A$ . Pero  $\text{extr}(A) \subset \overline{\text{conv}(\text{extr}(A))} \subset H_{u, \alpha - \epsilon}^-$ . Y como  $\alpha < \beta$ , entonces  $H_{u, \beta} \cap H_{u, \alpha - \epsilon}^- = \emptyset$ , contradicción.  $\square$

Por completitud, enunciaremos el Teorema de Minkowski, que no demostraremos ni usaremos. Puede consultarse una demostración en [2], Corolario 1.4.5.

**Teorema 1.6.5 (Minkowski)** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un compacto convexo no vacío. Entonces,  $A = \text{conv}(\text{extr}(A))$ .*

Aún puede mejorarse la elección  $A_0 = \text{extr}(A)$  para la igualdad  $A = \overline{\text{conv}(A_0)}$  del Teorema de Krein-Milman; es decir, podemos elegir un subconjunto  $A_0 \subset \text{extr}(A)$  para que la igualdad anterior siga siendo cierta: estos son los *puntos expuestos*.

**Definición 1.6.2** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo. Un punto  $x \in A$  se dice un *punto expuesto* si existe un hiperplano soporte  $H \subset \mathbb{R}^n$  de  $A$  en  $x$  tal que  $A \cap H = \{x\}$ . Al conjunto de los puntos expuestos de  $A$  lo denotaremos por  $\text{exp}(A)$ .

Es evidente que  $\text{exp}(A) \subset \text{extr}(A)$ , aunque la igualdad no se da en general:

Puede probarse (no lo haremos ni lo usaremos) que todo punto extremo es límite de puntos expuestos, es decir,  $\overline{\text{exp}(A)} = \text{extr}(A)$ . Respecto al problema que hemos estudiado en esta sección, el mejor resultado (que tampoco usaremos) es

**Teorema 1.6.6 (Straszewicz)** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un compacto convexo no vacío. Entonces,  $A = \text{conv}(\text{exp}(A))$ .*

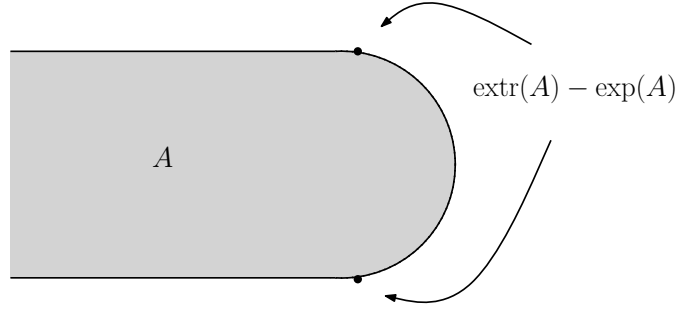


Figura 1.9: Puntos extremos no expuestos en un convexo.

Puede encontrarse una demostración de este resultado en [2], Teorema 1.4.7.

## 1.7. Función soporte de un conjunto convexo

A lo largo de esta sección,  $A \subset \mathbb{R}^n$  denotará un conjunto cerrado y convexo. Consideremos la función

$$h_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid h_A(u) = \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle.$$

Así,  $h_A(\vec{0}) = 0$ . Denotaremos por  $\text{Dom}(h_A) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid h_A(u) < \infty\}$ . A la restricción  $h_A: \text{Dom}(h_A) \rightarrow \mathbb{R}$  se la llama la *función soporte* de  $A$ . La interpretación geométrica de  $h_A(u)$  para  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1) \cap \text{Dom}(h_A)$  es la altura máxima que  $A$  alcanza respecto al hiperplano *vectorial* de  $\mathbb{R}^n$  ortogonal a  $u$ . Tomemos  $u \in \text{Dom}(h_A) - \{\vec{0}\}$ . Consideremos el hiperplano (afín)

$$H(A, u) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = h_A(u)\}.$$

El semiespacio cerrado bordeado por  $H(A, u)$  que contiene a  $A$  es

$$H^-(A, u) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \leq h_A(u)\}.$$

En general,  $A$  no tiene porqué cortar a  $H(A, u)$ . Pero si  $F(A, u) = A \cap H(A, u) \neq \emptyset$ , entonces  $H(A, u)$  es un hiperplano soporte de  $A$  en cada punto  $x_0 \in F(A, u)$ . Llamaremos a  $H(A, u)$  el *hiperplano soporte de  $A$  en la dirección del normal exterior  $u$* , independientemente de si  $F(A, u)$  es o no vacío. Análogamente,  $H^-(A, u)$  será el *semiespacio soporte de  $A$  en la dirección del vector normal exterior  $u$* .

Veamos algunas propiedades sencillas de la función soporte.

**Proposición 1.7.1** Sean  $A, A' \subset \mathbb{R}^n$  convexos cerrados. Entonces,

- (1) Existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $h_A(u) = \langle x, u \rangle \forall u \in \mathbb{R}^n$  si y sólo si  $A = \{x\}$ .

- (2)  $h_{A+x}(u) = h_A(u) + \langle x, u \rangle$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \text{Dom}(h_A)$ .
- (3)  $h_A(\lambda u) = \lambda h_A(u)$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ ,  $u \in \text{Dom}(h_A)$  ( $h_A$  es positivamente homogénea).
- (4)  $h_A(u + v) \leq h_A(u) + h_A(v)$ ,  $\forall u, v \in \text{Dom}(h_A)$  ( $h_A$  es subaditiva). En particular,  $\text{Dom}(h_A)$  es un convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $h_A: \text{Dom}(h_A) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa).
- (5)  $h_A \leq h_{A'}$  si y sólo si  $A \subset A'$ .
- (6)  $h_{\lambda A} = \lambda h_A$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ .
- (7)  $h_{-A}(u) = h_A(-u)$ ,  $\forall u \in \text{Dom}(h_{-A}) = -\text{Dom}(h_A)$ .

*Demostración.* Veamos el apartado (1).

$\Rightarrow$  Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , en coordenadas respecto a la base canónica  $e_1, \dots, e_n$ . Así,  $x_i = \langle x, e_i \rangle = h_A(e_i)$  luego  $A \subset \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, e_i \rangle \leq x_i\} = H_{e_i, x_i}^-$ . Por otro lado,  $-x_i = \langle x, -e_i \rangle = h_A(-e_i)$  luego  $A \subset \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, -e_i \rangle \leq -x_i\} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, e_i \rangle \geq x_i\} = H_{e_i, x_i}^+$ . Así,  $A \subset H_{e_i, x_i}$ . Haciendo esto para cada  $i = 1, \dots, n$  obtenemos  $A = \{x\}$ .

$\Leftarrow$  Trivial.

Para el apartado (2), sea  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$h_{A+x}(u) = \sup_{b \in A+x} \langle b, u \rangle = \sup_{a \in A} \langle a + x, u \rangle = \left( \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle \right) + \langle x, u \rangle = h_A(u) + \langle x, u \rangle.$$

Para el apartado (3), sea  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$h_A(\lambda u) = \sup_{a \in A} \langle a, \lambda u \rangle = \lambda \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle = \lambda h_A(u).$$

Para el apartado (4),

$$h_A(u + v) = \sup_{a \in A} \langle a, u + v \rangle = \sup_{a \in A} (\langle a, u \rangle + \langle a, v \rangle) \leq \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle + \sup_{a \in A} \langle a, v \rangle = h_A(u) + h_A(v).$$

Veamos el apartado (5):

$\Rightarrow$  Sea  $H_{u, \alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}$  un hiperplano soporte de  $A'$ , con semiespacio soporte  $H_{u, \alpha}^-$ . Entonces,

$$\sup_{a \in A} \langle a, u \rangle = h_A(u) \leq h_{A'}(u) = \sup_{a' \in A'} \langle a', u \rangle = \alpha,$$

luego  $A \subset H_{u, \alpha}^-$ . Moviendo el semiespacio soporte de  $A'$ , deducimos que  $A$  está contenido en la intersección de todos los semiespacios soporte de  $A'$ , que es  $A'$  por el Corolario 1.4.1,

$\Leftarrow$  Trivial.

Para el apartado (6),

$$h_{\lambda A}(u) = \sup_{a \in A} \langle \lambda a, u \rangle \stackrel{(\lambda \geq 0)}{=} \lambda \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle = \lambda h_A(u).$$

Finalmente, el apartado (7):

$$h_{-A}(u) = \sup_{b \in -A} \langle b, u \rangle = \sup_{a \in A} \langle -a, u \rangle = \sup_{a \in A} \langle a, -u \rangle = h_A(-u).$$

□

**Definición 1.7.1** Una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *sublineal* si cumple  $f(u+v) \leq f(u) + f(v)$ ,  $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ ,  $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \geq 0$ . En particular,  $f$  es convexa y  $f(\vec{0}) = 0$ .

**Lema 1.7.1** Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Entonces,  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^n$  y Lipschitziana en cada compacto de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Veamos que  $f$  es continua en un entorno de  $x_0$ . Elegimos  $n+1$  puntos afínmente independientes  $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$  tales que  $x_0$  está en el interior del simplex  $\mathcal{S}$  generado por los puntos  $x_i$ :

$$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Dado  $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in \mathcal{S}$ , por convexidad de  $f$  tenemos

$$(1.12) \quad f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \leq c := \max\{f(x_i) \mid i = 1, \dots, n+1\}.$$

Como  $x \in \text{int}(\mathcal{S})$ , existe  $\rho > 0$  tal que  $\mathbb{B}(x_0, \rho) \subset \mathcal{S}$ . Veamos que  $|f(x_0) - f(y)| \leq C \|x_0 - y\|$  para todo  $y \in \mathbb{B}(x_0, \rho)$ , donde  $C = C(x_0, \rho) \geq 0$  y  $f$  será continua en  $\mathbb{B}(x_0, \rho)$  (y por tanto lo será en todo  $\mathbb{R}^n$ ): Dado  $y \in \mathbb{B}(x_0, \rho)$ , existirá  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(\rho) = \partial \mathbb{B}(\vec{0}, \rho)$  y  $\alpha \in [0, 1]$  tales que  $y = x_0 + \alpha u = (1 - \alpha)x_0 + \alpha(x_0 + u)$ , luego por convexidad de  $f$

$$(1.13) \quad f(y) = f((1 - \alpha)x_0 + \alpha(x_0 + u)) \leq (1 - \alpha)f(x_0) + \alpha f(x_0 + u),$$

de donde

$$(1.14) \quad f(y) - f(x_0) \leq \alpha [f(x_0 + u) - f(x_0)] \stackrel{(1.12)}{\leq} \alpha [c - f(x_0)].$$

Ahora queremos una cota por arriba para  $f(x_0) - f(y)$ , que obtendremos usando un argumento similar al anterior pero cambiando  $x_0$  por  $y$ . Necesitamos primero una combinación lineal convexa de dos puntos que produzca  $x_0$ ; sustituyendo  $y = x_0 + \alpha u$  obtenemos

$$\frac{1}{1+\alpha}y + \frac{\alpha}{1+\alpha}(x_0 - u) = x_0,$$

luego de nuevo por convexidad de  $f$

$$f(x_0) \leq \frac{1}{1+\alpha}f(y) + \frac{\alpha}{1+\alpha}f(x_0 - u).$$

Quitando denominadores y dejando en un miembro de la desigualdad lo que lleve el coeficiente  $\alpha$ ,

$$(1.15) \quad f(x_0) - f(y) \leq \alpha[f(x_0 - u) - f(x_0)] \stackrel{(1,12)}{\leq} \alpha[c - f(x_0)].$$

De (1.14), (1.15) deducimos

$$\|f(x_0) - f(y)\| \leq \alpha[c - f(x_0)] = \frac{\|y - x_0\|}{\rho}[c - f(x_0)], \quad \forall y \in \mathbb{B}(x_0, \rho).$$

Es decir, tenemos la desigualdad deseada con  $C(x_0, \rho) = \frac{c - f(x_0)}{\rho}$ . Por tanto,  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora fijemos un compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  y un  $\mu > 0$ . Tomemos  $x, y \in K$  distintos y definamos  $z = y - \mu \frac{x-y}{\|x-y\|} \in K + \mathbb{B}(\vec{0}, \mu)$ . Sustituyendo esta última ecuación, un cálculo sencillo nos lleva a la combinación lineal convexa

$$\left(1 - \frac{\|x-y\|}{\mu + \|x-y\|}\right)x + \frac{\|x-y\|}{\mu + \|x-y\|}z = y,$$

que simplificaremos escribiendo  $\lambda = \frac{\|x-y\|}{\mu + \|x-y\|}$ . Aplicando una vez más la convexidad de  $f$ , tenemos  $f(y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$ , de donde

$$f(y) - f(x) \leq \lambda[f(z) - f(x)] = \frac{\|x-y\|}{\mu + \|x-y\|}[f(z) - f(x)] \leq \frac{\|x-y\|}{\mu}[f(z) - f(x)] \leq \frac{2M}{\mu}\|x-y\|,$$

donde  $M = M(K, \mu) = \max_{K + \mathbb{B}(\vec{0}, \mu)} |f|$ , que existe por ser  $K$  compacto. Intercambiando los papeles de  $x, y$  obtendremos  $f(x) - f(y) \leq \frac{2M}{\mu}\|x-y\|$ , luego  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2M}{\mu}\|x-y\|$  para cualesquiera  $x, y \in K$  distintos, de donde  $f$  es Lipschitziana en  $K$ .  $\square$

**Lema 1.7.2** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado que cumple  $\lambda x \in A, \forall x \in A, \lambda \geq 0$  (esto se lee “ $A$  es un cono”). Sea  $x_0 \in \partial A$  y  $H \subset \mathbb{R}^n$  un hiperplano soporte de  $A$  en  $x_0$ . Entonces,  $\vec{0} \in H$ .*

*Demostración.* Como  $A$  es cerrado y  $x_0 \in \partial A$ , entonces  $x_0 \in A$ . Sea  $r_{x_0} = \{\lambda x_0 \mid \lambda \geq 0\}$ . Por ser  $A$  un cono,  $r_{x_0} \subset A$ . Como  $A \subset H^-$ , deducimos que  $r_{x_0}$  no puede ser transversal a  $H$  en  $x_0$ , es decir,  $r_{x_0} \subset H$  luego  $\vec{0} \in H$ .  $\square$

**Teorema 1.7.1** *Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función sublineal. Entonces, existe un único compacto convexo  $A \subset \mathbb{R}^n$  tal que la función soporte  $h_A$  de  $A$  es  $f$ .*

*Demostración.* La unicidad es consecuencia directa del apartado (5) de la Proposición 1.7.1. En cuanto a la existencia, definimos  $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \leq f(u) \forall u \in \mathbb{R}^n\}$ . Debemos probar:

1.  $A$  es no vacío.
2.  $A$  es compacto y convexo.
3.  $f = h_A$ .

La demostración de 1 es la más complicada, y partes de la misma se usarán en la demostración de 3. El esquema para probar 1 es el siguiente:

- 1.1. Consideremos el epigrafo de  $f$ ,  $\text{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$ . Probaremos que  $\text{epi}(f)$  es un cono cerrado de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y que es un cono en el sentido del Lema 1.7.2.
- 1.2. Fijamos un  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ . El Teorema 1.4.1 asegura la existencia de un hiperplano soporte  $H_{(y,\eta),\alpha}$  de  $\text{epi}(f)$  en  $(u_0, f(u_0))$  (hemos denotado por  $(y, \eta) = (y(u_0), \eta(u_0)) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) - \{(\vec{0}, 0)\}$  a la dirección ortogonal de  $H_{(y,\eta),\alpha}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Salvo un cambio de signo en dicha dirección ortogonal, podemos suponer que  $\text{epi}(f) \subset H_{(y,\eta),\alpha}^-$ . Veremos que  $\alpha = 0$  y que  $\eta < 0$ . Por tanto, normalizando de nuevo la dirección  $(y, \eta)$  (esta vez por un múltiplo positivo), podremos suponer que  $\eta = -1$ . En estas condiciones, probaremos que  $y = y(u_0) \in A$ , luego  $A \neq \emptyset$ .

Vamos a desarrollar cada uno de los puntos anteriores:

- 1.1.  $\text{epi}(f)$  es un cono de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , por ser  $f$  una función convexa y por el Lema 1.1.1. Además,  $\text{epi}(f)$  es cerrado por ser  $f$  continua (por ser  $f$  sublineal es convexa, luego su continuidad es consecuencia del Lema 1.7.1). La igualdad  $f(\lambda u) = \lambda f(u) \forall \lambda \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n$  implica directamente que si  $(x, y) \in \text{epi}(f)$  y  $\lambda \geq 0$ , entonces  $\lambda(x, y) \in \text{epi}(f)$ , es decir,  $\text{epi}(f)$  es un cono.
- 1.2. Por ser  $\text{epi}(f)$  un cono cerrado de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , el Teorema 1.4.1 asegura la existencia de un hiperplano soporte  $H_{(y,\eta),\alpha} = \{(z, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \langle y, z \rangle_{\mathbb{R}^n} + \eta t = \alpha\}$  de  $\text{epi}(f)$

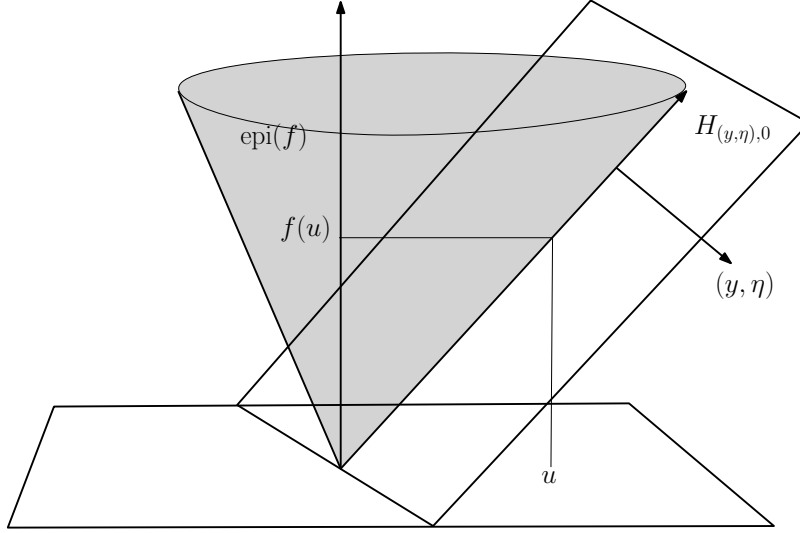


Figura 1.10: El 'plano' de abscisas representa  $\mathbb{R}^n$ , el eje de ordenadas es  $\mathbb{R}$ .

en  $(u_0, f(u_0))$ , para algunos  $(y, \eta) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) - \{(\vec{0}, 0)\}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  (que dependen de  $u_0$ ). Salvo cambiar de signo  $(y, \eta)$ , podemos suponer  $\text{epi}(f) \subset H_{(y, \eta), \alpha}^-$ . Como  $(\vec{0}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  está en  $H_{(y, \eta), \alpha}$  por el Lema 1.7.2, entonces  $\alpha = 0$ . Esto nos dice que  $H_{(y, \eta), 0} = \{(z, t) \mid \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \langle y, z \rangle_{\mathbb{R}^n} + \eta t = 0\}$ , y  $\langle y, z \rangle_{\mathbb{R}^n} + \eta t \leq 0$ ,  $\forall (z, t) \in \text{epi}(f)$ .

Veamos ahora que  $\eta < 0$ . Tomemos  $\lambda > 0$ ; entonces  $f(u_0) + \lambda > f(u_0)$  luego

$$(1.16) \quad (u_0, f(u_0)) + \lambda e_{n+1} \in \text{int}(\text{epi}(f)), \quad \forall \lambda > 0.$$

Por tanto,

$$\langle y, u_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \eta(f(u_0) + \lambda) < 0, \quad \forall \lambda > 0,$$

lo que prueba que  $\eta \leq 0$  (tomar  $\lambda$  suficientemente grande y positivo). Si  $\eta$  fuera cero, tendríamos  $\langle y, u_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} < 0$ . Esto contradice que  $H_{(y, \eta), 0}$  es hiperplano soporte de  $\text{epi}(f)$  en  $(u, f(u_0))$  (ya que  $0 = \langle y(u_0), u_0 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \eta f(u_0) = \langle y(u_0), u_0 \rangle_{\mathbb{R}^n}$ ). Por tanto,  $\eta < 0$ . Normalizando de nuevo la dirección  $(y, \eta)$  (dividiendo por  $-\eta > 0$ ), podemos suponer que  $\eta = -1$ . Esto hace que el hiperplano soporte de  $\text{epi}(f)$  en  $(u_0, f(u_0))$  se escriba

$$H_{(y(u_0), -1), 0} = \{(z, t) \mid \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \langle y(u_0), z \rangle_{\mathbb{R}^n} = t\}, \quad \text{con } \text{epi}(f) \subset H_{(y(u_0), -1), 0}^-.$$

Veamos que  $y(u_0) \in A$ : por definición de  $A$ , esto se tendrá si  $\langle y(u_0), u \rangle_{\mathbb{R}^n} \leq f(u) \forall u \in \mathbb{R}^n$ . Dado  $u \in \mathbb{R}^n$ , tenemos  $(u, f(u)) \in \partial \text{epi}(f) \subset \text{epi}(f) \subset H_{(y(u_0), -1), 0}^-$  luego  $\langle y(u_0), u \rangle_{\mathbb{R}^n} \leq f(u)$ , que es lo que buscábamos. Por tanto,  $y(u_0) \in A$  y  $A \neq \emptyset$ .



2.  $A$  es cerrado, por su definición y por ser  $f$  continua. Veamos que  $A$  es convexo: Sea  $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ . Entonces,  $A \subset H_{u,f(u)}^-$  luego

$$(1.17) \quad A \subset \bigcap_{u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}} H_{u,f(u)}^-.$$

Recíprocamente, si  $x \in \bigcap_{u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}} H_{u,f(u)}^-$  entonces  $\langle x, u \rangle \leq f(u) \forall u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ . Como esta última desigualdad se cumple trivialmente para  $u = \vec{0}$ , concluimos que  $x \in A$ . Esto nos dice que se da la igualdad en (1.17). Por el apartado (1) de la Proposición 1.1.1,  $A$  es convexo (ya que no es vacío).

Terminaremos este apartado probando que  $A$  es acotado. Sea  $e_1, \dots, e_n$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Dado  $x \in A$ ,  $\langle x, e_i \rangle \leq f(e_i)$  y  $\langle x, -e_i \rangle \leq f(-e_i)$ , de donde

$$-f(-e_i) \leq \langle x, e_i \rangle \leq f(e_i),$$

luego  $A \subset \prod_{i=1}^n [-f(-e_i), f(e_i)]$ , y  $A$  es acotado.

3. Como  $A \subset \mathbb{R}^n$  es convexo y compacto, tiene sentido  $h_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Veamos que  $f = h_A$  probando las dos desigualdades. Dado  $u \in \mathbb{R}^n$ ,

$$h_A(u) = \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle \leq \sup_{a \in A} f(a) = f(u)$$

luego  $h_A \leq f$ . Recíprocamente, recordemos que dado  $u \in \mathbb{R}^n$ , hemos probado en 1.2 que si escribimos el hiperplano soporte de  $\text{epi}(f)$  en  $(u, f(u))$  de la forma  $H_{(y(u), -1), 0}$  con  $\text{epi}(f) \subset H_{(y(u), -1), 0}^-$ , entonces  $y(u) \in A$ . Por tanto,

$$h_A(u) = \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle_{\mathbb{R}^n} \stackrel{(y(u) \in A)}{\geq} \langle y(u), u \rangle_{\mathbb{R}^n} \stackrel{((u, f(u)) \in H_{(y(u), -1), 0})}{=} f(u),$$

luego  $f \leq h_A$ .

□

**Definición 1.7.2** A cualquier subconjunto no vacío, compacto y convexo de  $\mathbb{R}^n$  lo llamaremos *cuerpo convexo*. Denotaremos por

$$\mathcal{K}^n = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ es un cuerpo convexo}\}, \quad \mathcal{K}_0^n = \{A \in \mathcal{K}^n \mid \text{int}(A) \neq \emptyset\}.$$

Dados  $K, L \in \mathcal{K}^n$ , a la suma afín  $K + L$  la llamaremos *suma de Minkowski* de  $K$  y  $L$ . Notemos que  $K + L \in \mathcal{K}^n$  (la convexidad es consecuencia del apartado (3) de la

Proposición 1.1.1; la compacidad se deduce de que la suma  $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua). Esto hace de  $\mathcal{K}^n$  un *semigrupo*<sup>4</sup> abeliano.

Una función  $f: \mathcal{K}^n \rightarrow G$ , donde  $G$  es un semigrupo, se dice *Minkowski-aditiva* si cumple  $f(K + L) = f(K) + f(L)$ ,  $\forall K, L \in \mathcal{K}^n$ .

Para  $K \in \mathcal{K}^n$ , recordemos las definiciones

$$h_K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid h_K(u) = \sup_{a \in K} \langle a, u \rangle,$$

$$H(K, u) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = h_K(u)\}, \quad F(K, u) = K \cap H(K, u), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

**Proposición 1.7.2** *Dados  $K, L \in \mathcal{K}^n$ , se tienen:*

- (1)  $h_{K+L} = h_K + h_L$ .
- (2)  $H(K + L, \cdot) = H(K, \cdot) + H(L, \cdot)$ .
- (3)  $F(K + L, \cdot) = F(K, \cdot) + F(L, \cdot)$ .

*Es decir, las tres funciones son Minkowski-aditivas.*

*Demostración.* Para el apartado (1), dado  $u \in \mathbb{R}^n$  se tiene  $h_{K+L}(u) = \sup_{a \in K+L} \langle a, u \rangle$ . Por ser  $K + L$  compacto, este supremo se alcanza en algún  $a_0 = k_0 + l_0 \in K + L$ , luego  $h_{K+L}(u) = \langle a_0, u \rangle = \langle k_0, u \rangle + \langle l_0, u \rangle \leq h_K(u) + h_L(u)$ . Recíprocamente, la compacidad de  $K$  y de  $L$  asegura que dado  $u \in \mathbb{R}^n$  existen  $k'_0 \in K$  y  $l'_0 \in L$  tales que  $h_K(u) = \langle k'_0, u \rangle$  y  $h_L(u) = \langle l'_0, u \rangle$ , de donde  $h_K(u) + h_L(u) = \langle k'_0 + l'_0, u \rangle \leq h_{K+L}(u)$ .

Veamos el apartado (2). Por el apartado (1),

$$H(K + L, u) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = h_{K+L}(u)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = h_K(u) + h_L(u)\}.$$

Por tanto, si  $x \in H(K, u) + H(L, u)$ , entonces  $x = a + b$  con  $\langle a, u \rangle = h_K(u)$  y  $\langle b, u \rangle = h_L(u)$ , de donde  $\langle x, u \rangle = h_K(u) + h_L(u)$  luego  $x \in H(K + L, u)$ . Esto prueba que  $H(K, u) + H(L, u) \subset H(K + L, u)$ . Como la suma de dos hiperplanos ortogonales a  $u \neq \vec{0}$  es otro hiperplano ortogonal a  $u$ , de la inclusión anterior se obtiene la igualdad sin más que contar dimensiones. En el caso  $u = \vec{0}$ ,  $H(K, u) = \mathbb{R}^n \forall K \in \mathcal{K}^n$ , luego la igualdad en (2) es trivial.

Para el apartado (3), Si  $x \in F(K, u) + F(L, u)$ , entonces  $x = a + b$  con  $a \in F(K, u) = K \cap H(K, u)$  y  $b \in L \cap H(L, u)$ . Así,  $x \in K + L$  y  $\langle x, u \rangle = \langle a, u \rangle + \langle b, u \rangle = h_K(u) + h_L(u) = h_{K+L}(u)$  luego  $x \in H(K + L, u)$ . Esto prueba que  $x \in (K + L) \cap H(K + L, u) = F(K + L, u)$ , y por tanto,  $F(K, u) + F(L, u) \subset F(K + L, u)$ . Recíprocamente, si  $x \in F(K + L, u) = (K + L) \cap H(K + L, u)$  entonces  $x = a + b$  con  $a \in K$ ,  $b \in L$  y  $\langle a, u \rangle + \langle b, u \rangle = \langle x, u \rangle =$

<sup>4</sup>Un *semigrupo*  $G \equiv (G, +)$  es un par donde  $G$  es un conjunto y  $+: G \times G \rightarrow G$  es una ley de composición interna asociativa. Si esta ley cumple la propiedad conmutativa, el semigrupo se llama *abeliano*.

$h_{K+L}(u) = h_K(u) + h_L(u)$ . Como  $\langle a, u \rangle \leq h_K(u)$  (porque  $a \in K$  y por definición de  $h_K$ ) y análogamente  $\langle b, u \rangle \leq h_L(u)$ , deducimos que  $\langle a, u \rangle = h_K(u)$  y  $\langle b, u \rangle = h_L(u)$ , de donde  $a \in K \cap H(K, u) = F(K, u)$  y  $b \in F(L, u)$ , es decir,  $x \in F(K, u) + F(L, u)$ .  $\square$

El semigrupo  $\mathcal{K}^n$  tiene la siguiente propiedad de cancelación:

**Corolario 1.7.1** Si  $K + M = L + M$  para  $K, L, M \in \mathcal{K}^n$ , entonces  $K = L$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} h_K + h_M &= h_{K+M} \quad (\text{por el apartado (1) de la Proposición 1.7.2}) \\ &= h_{L+M} = h_L + h_M, \quad \text{luego } h_K = h_L. \end{aligned}$$

Finalmente, el apartado (5) de la Proposición 1.7.1 implica que  $K = L$ .  $\square$

Veamos otras propiedades algebraicas sencillas de  $\mathcal{K}^n$ :

**Corolario 1.7.2** Sean  $K, L \in \mathcal{K}^n$ ,  $\lambda, \mu \geq 0$ .

- (1)  $\lambda K \in \mathcal{K}^n$  ( $\mathcal{K}^n$  es un cono abstracto).
- (2)  $\lambda(K + L) = \lambda K + \lambda L$ .
- (3)  $(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K$ .
- (4)  $\lambda(\mu K) = (\lambda\mu)K$ ,  $1 \cdot K = K$ .

*Demostración.* (1) y (3) son consecuencias del apartado (3) de la Proposición 1.1.1. (2) y (4) son triviales.  $\square$

**Definición 1.7.3** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , se define la *anchura de  $K$  en la dirección de  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$*  como  $w(K, u) = h(K, u) + h(K, -u) = \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle - \inf_{x \in K} \langle x, u \rangle \geq 0$ .

Diremos que  $K$  tiene *anchura constante* si existe  $c \geq 0$  tal que  $w(K, u) = c$ ,  $\forall u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ .

Algunos comentarios sencillos:

- Si existe  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$  tal que  $w(K, u) = 0$ , entonces  $K \subset H_{u, h_K(u)} = H(K, u)$ . En particular,  $\dim K \leq n - 1$ .
- Si  $K \in \mathcal{K}_0^n$ , entonces  $\text{int}(K) \neq \emptyset$  luego  $\dim K = n$  y así, el punto anterior implica que  $w(K, u) > 0 \forall u \in \mathbb{R}^n$ .

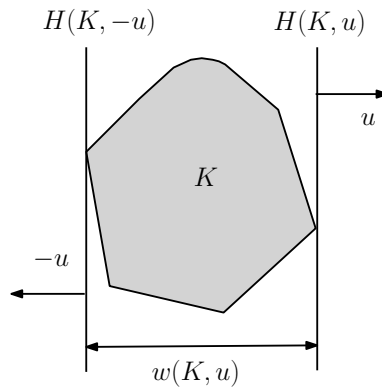


Figura 1.11: La anchura  $w(K, u)$  de  $K \in \mathcal{K}^n$  mide la distancia entre los dos hiperplanos soporte  $H(K, u), H(K, -u)$ .

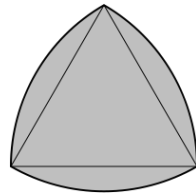


Figura 1.12: Un triángulo de Reuleaux.

- Una bola cerrada en  $\mathbb{R}^n$  es un convexo compacto con anchura constante. Pero existen convexos compactos que no son bolas cerradas. Por ejemplo, el convexo de  $\mathbb{R}^2$  obtenido al añadir a un triángulo equilátero las regiones encerradas por arcos circulares centrados en cada uno de sus vértices y que unen los vértices opuestos, llamado *triángulo de Reuleaux*. Esta construcción puede generalizarse a polígonos regulares de  $\mathbb{R}^2$  con un número impar de lados (necesitamos la condición de imparidad para poder unir mediante un arco circular centrado en un vértice  $P$  del polígono los dos vértices “opuestos” a  $P$ ). Estos polígonos se llaman *polígonos de Reuleaux*.
- La función  $w(K, \cdot): \mathbb{S}^{n-1}(1) \rightarrow [0, \infty)$  que a cada  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$  le asocia la anchura de  $K$  en la dirección de  $u$  es *continua*: esto se deduce de que  $w(K, u) = h_K(u) + h_K(-u)$  y de que  $h_K$  es continua ( $h_K$  es convexa en  $\mathbb{R}^n$  por el apartado (4) de la Proposición 1.7.1, luego continua por el Lema 1.7.1).
- Como  $w(K, \cdot)$  es continua en el compacto  $\mathbb{S}^{n-1}(1)$ , existen su máximo y mínimo

absolutos:

$$D(K) = \text{máx}\{w(K, u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\}, \quad \Delta(K) = \text{mín}\{w(K, u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\}.$$

A  $\Delta(K)$  se le llama la *anchura total* de  $K$ .

**Proposición 1.7.3** *Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , se tiene  $D(K) = \text{diam}(K)$ .*

*Demostración.* Como  $K$  es compacto, existen  $x, y \in K$  tales que  $\text{diam}(K) = \|x - y\|$ . Si  $\text{diam}(K) = 0$ , entonces  $K = \{x\}$  luego  $w(K, u) = 0 \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ , de donde  $D(K) = 0$ . Así que podemos suponer  $\text{diam}(K) > 0$  en lo que sigue. En particular,  $x \neq y$ . Consideremos los hiperplanos

$$H_x = x + \langle x - y \rangle^\perp, \quad H_y = y + \langle x - y \rangle^\perp.$$

$H_x, H_y$  son hiperplanos soporte de  $K$  (ya que  $x, y \in K$  y  $K$  está contenido en el semiespacio determinado por  $H_x$  en el que está  $y$ , y en el semiespacio determinado por  $H_y$  en que que está  $x$ ). Por tanto,

$$D(K) \geq w\left(K, \frac{x - y}{\|x - y\|}\right) = d(H_x, H_y) = \|x - y\| = \text{diam}(K).$$

Para la desigualdad contraria, tomemos  $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$  tal que  $D(K) = w(K, u_0)$ , que existe por ser  $\mathbb{S}^{n-1}(1)$  compacto y  $w(K, \cdot)$  continua. Así,  $H_{u_0, h_K(u_0)}, H_{-u_0, h_K(-u_0)}$  son hiperplanos soporte de  $K$  y las distancia entre ambos hiperplanos es  $D(K)$ . Tomemos  $x_0 \in K \cap H_{u_0, h_K(u_0)}, y_0 \in K \cap H_{-u_0, h_K(-u_0)}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} D(K) &= d(H_{u_0, h_K(u_0)}, H_{-u_0, h_K(-u_0)}) \\ &= \text{ínf}\{d(x, y) \mid x \in H_{u_0, h_K(u_0)}, y \in H_{-u_0, h_K(-u_0)}\} \\ &\leq d(x_0, y_0) \\ &\leq \text{diam}(K). \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.7.4** *Dados  $K, L \in \mathcal{K}^n$ , se tienen:*

(1)  $\text{diam}(K + L) \leq \text{diam}(K) + \text{diam}(L)$ .

(2)  $\Delta(K + L) \geq \Delta(K) + \Delta(L)$ .

*Demostración.* Veamos (1):

$$\begin{aligned} \text{diam}(K + L) &= \sup\{d(x, y) \mid x, y \in K + L\} \\ &= \sup\{d(a_x + b_x, a_y + b_y) \mid a_x, a_y \in K, b_x, b_y \in L\} \\ &= \sup\{\|(a_x - a_y) + (b_x - b_y)\| \mid a_x, a_y \in K, b_x, b_y \in L\} \\ &\leq \sup\{\|a_x - a_y\| + \|b_x - b_y\| \mid a_x, a_y \in K, b_x, b_y \in L\} \\ &\leq \sup\{\|a_x - a_y\| \mid a_x, a_y \in K\} + \sup\{\|b_x - b_y\| \mid b_x, b_y \in L\} \\ &= \text{diam}(K) + \text{diam}(L). \end{aligned}$$

En cuanto a (2),

$$\begin{aligned}
\Delta(K + L) &= \min\{w(K + L, u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} \\
&= \min\{h_{K+L}(u) + h_{K+L}(-u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} \\
&= \min\{h_K(u) + h_L(u) + h_K(-u) + h_L(-u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} \text{ (Proposición 1.7.2-(1))} \\
&\geq \min\{h_K(u) + h_K(-u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} + \min\{h_L(u) + h_L(-u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} \\
&= \Delta(K) + \Delta(L).
\end{aligned}$$

□

## 1.8. Dualidad

El término dualidad aparece en muchos campos aparentemente distintos de las matemáticas, relacionando dos teorías, en cierto modo de forma inversa. Esto ocurre, por ejemplo, con la geometría lineal de un espacio vectorial  $n$ -dimensional  $V$  y su dual  $V^*$ : los subespacios  $k$ -dimensionales de  $V$  se corresponden con subespacios  $(n - k)$ -dimensionales de  $V^*$  una vez que hemos prefijado una métrica no degenerada (por medio de la relación de ortogonalidad vista como núcleo de una aplicación lineal). Algo parecido ocurre en geometría afín o proyectiva, o en álgebra exterior. Hay teorías de dualidad fuera del ámbito (multi)lineal, como la dualidad de Poincaré en cohomología.

En nuestro caso, asociados a los conjuntos convexos, los conos y las funciones convexas, existen objetos duales de la misma clase. De hecho, ya hemos visto algún resultado en esta línea, con la relación entre compactos convexos de  $\mathbb{R}^n$  y funciones sublineales  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ver la Proposición 1.7.1 y el Teorema 1.7.1). En esta sección exploraremos esta dualidad con más profundidad y trasladaremos ciertos resultados sobre puntos frontera de conjuntos convexos a resultados sobre hiperplanos soporte y viceversa. En este sentido, nos valdremos de la linealidad de la función altura  $y \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, y \rangle$  respecto a una dirección  $x \in \mathbb{R}^n$ , para estudiar convexos.

Recordemos que el *espacio dual* de  $\mathbb{R}^n$  es

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ es lineal}\} = \{\langle x, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

En  $\mathbb{R}^n$  tenemos una dualidad entre puntos distintos de  $\vec{0}$  e hiperplanos: Podemos identificar cada  $x \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  con el hiperplano  $\ker(\langle x, \cdot \rangle) = H_{x,0}$ .

**Definición 1.8.1** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , definimos su *dual*  $K^*$  como  $\{\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \varphi(y) \leq 1, \forall y \in K\}$ , o salvo identificación,

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in K\} \quad (\text{conjunto polar de } K).$$

Notemos que  $K^*$  no tiene porqué estar en  $\mathcal{K}^n$  aunque  $K \in \mathcal{K}^n$ : por ejemplo,  $\{\vec{0}\} \in \mathcal{K}$  y  $\{\vec{0}\}^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \vec{0} \rangle \leq 1\} = \mathbb{R}^n \notin \mathcal{K}$ .

**Proposición 1.8.1**

- (1) Si  $K, L \in \mathcal{K}^n$  y  $K \subset L$ , entonces  $L^* \subset K^*$ .
- (2)  $\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)^* = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1/R)$ ,  $\forall R > 0$ .
- (3) Dado  $z \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ ,  $\{z\}^* = H_{z,1}^-$ .

*Demostración.* (1) es trivial. Veamos (2):  $\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in \mathbb{B}(\vec{0}, R)\}$ . Pongamos  $x = \rho\theta$ ,  $y = \mu\alpha$  con  $\rho, \mu \geq 0$  y  $\theta, \alpha \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ . Entonces,

$$\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)^* = \{\rho\theta \mid \rho \geq 0, \theta \in \mathbb{S}^{n-1}(1) \text{ y } \rho\mu\langle\theta, \alpha\rangle \leq 1, \forall \mu \in [0, R], \alpha \in \mathbb{S}^{n-1}(1)\} = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1/R).$$

Finalmente, dado  $z \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  tenemos  $\{z\}^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, z \rangle \leq 1\} = H_{z,1}^-$ .  $\square$

**Teorema 1.8.1** Si  $K \in \mathcal{K}_0^n$  y  $\vec{0} \in \text{int}(K)$ , entonces  $K^* \in \mathcal{K}_0^n$ ,  $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$  y  $(K^*)^* = K$ .

*Demostración.* Empezamos probando que  $K^*$  es convexo. Sean  $x_1, x_2 \in K^*$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Dado  $y \in K$ ,  $\langle \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, y \rangle = \lambda\langle x_1, y \rangle + (1 - \lambda)\langle x_2, y \rangle \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1$ , luego  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K^*$  y  $K^*$  es convexo.  $K^*$  es trivialmente cerrado (razonar por sucesiones).

Veamos que  $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$  y que  $K^*$  es acotado: Sabemos que  $\vec{0} \in \text{int}(K)$  y  $K$  es acotado, luego existen  $r, R > 0$  tales que  $\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, r) \subset K \subset \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)$  luego los apartados (1) y (2) de la Proposición 1.8.1 implican que

$$\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1/R) = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)^* \subset K^* \subset \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, r)^* = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1/r),$$

luego  $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$  y  $K^*$  es acotado.

De lo anterior se deduce que  $K^* \in \mathcal{K}_0^n$  luego  $(K^*)^*$  tiene sentido y está en  $\mathcal{K}_0^n$ . De la definición de polar tenemos  $(K^*)^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in K^*\}$ . Por tanto,  $K \subset (K^*)^*$ . Recíprocamente, supongamos razonando por reducción al absurdo que existe  $x \in (K^*)^* - K$ . Por el Teorema 1.5.1, existe un hiperplano  $H_{u,\alpha} \subset \mathbb{R}^n$  que separa estrictamente (incluso fuertemente)  $K$  y  $\{x\}$ , pongamos  $K \subset \text{int}(H_{u,\alpha}^-)$  y  $\langle x, u \rangle > \alpha$ . Como  $\vec{0} \in K \subset \text{int}(H_{u,\alpha}^-)$ , entonces  $0 = \langle \vec{0}, u \rangle < \alpha$ , es decir,  $\alpha$  es positivo. Veamos que  $u/\alpha \in K^*$ : Dado  $y \in K$ , dividiendo la desigualdad  $\langle y, u \rangle \leq \alpha$  por  $\alpha > 0$  obtenemos  $\langle y, u/\alpha \rangle \leq 1, \forall y \in K$ , de donde  $u/\alpha \in K^*$ . Finalmente, dividiendo la desigualdad  $\langle x, u \rangle > \alpha$  por  $\alpha > 0$  obtenemos  $\langle x, u/\alpha \rangle > 1$ . Como  $u/\alpha \in K^*$ , concluimos que  $x \notin (K^*)^*$ , contradicción.  $\square$

Nuestro siguiente objetivo es estudiar la relación entre los puntos de  $\partial K^*$  (para un  $K \in \mathcal{K}_0^n$ ) y los hiperplanos soporte de  $K$ . Necesitamos dos lemas.

**Lema 1.8.1** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  tal que  $\vec{0} \in \text{int}(K)$ .

- (1) Dado  $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ , se tiene  $h_K(u) > 0$ .
- (2) Si  $u \in K^* - \{\vec{0}\}$ , entonces  $K \subset H_{h_K(u)u, h_K(u)}^-$ .

*Demostración.* Como  $\vec{0} \in \text{int}(K)$ , existe  $r > 0$  tal que  $\overline{B}(\vec{0}, r) \subset K$ . Tomemos  $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ . Entonces, la Figura 1.13 muestra que

$$h_K(u) = \sup\{\langle x, u \rangle \mid x \in K\} \geq \langle r \frac{u}{\|u\|}, u \rangle = r\|u\| > 0,$$

y (1) está probado.

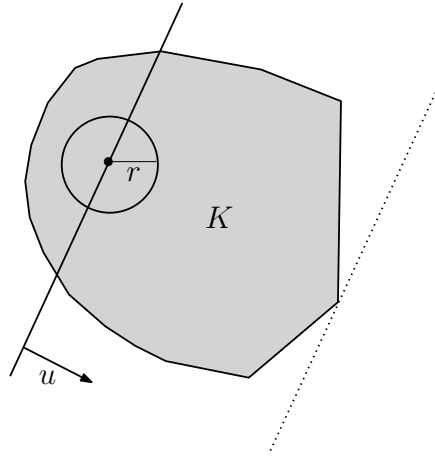


Figura 1.13:  $h_K(u) \geq r\|u\| > 0$ .

Para ver (2), de  $u \in K^*$  se deduce  $\langle x, u \rangle \leq 1 \forall x \in K$ . Como  $u \neq \vec{0}$ , el apartado (1) asegura que  $h_K(u) > 0$ . Multiplicando por  $h_K(u)$  la penúltima desigualdad tendremos  $\langle x, h_K(u)u \rangle \leq h_K(u) \forall x \in K$ , de donde  $K \subset H_{h_K(u)u, h_K(u)}^-$ , que es (2).  $\square$

**Lema 1.8.2** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  tal que  $\vec{0} \in \text{int}(K)$ .

- (1) Dado  $u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ , se tiene  $h_K(u)^{-1}u \in \partial K^*$  (recordemos que  $h_K(u) > 0$  por el apartado (1) del Lema 1.8.1).
- (2) Dado  $z \in \partial K^*$ , el hiperplano  $H_{z,1}$  es un hiperplano soporte de  $K$ , siendo  $z$  un vector normal exterior a  $K$  en ese punto.



*Demostración.* Veamos primero que  $h_K(u)^{-1}u \in K^*$ . Dado  $x \in K$ ,

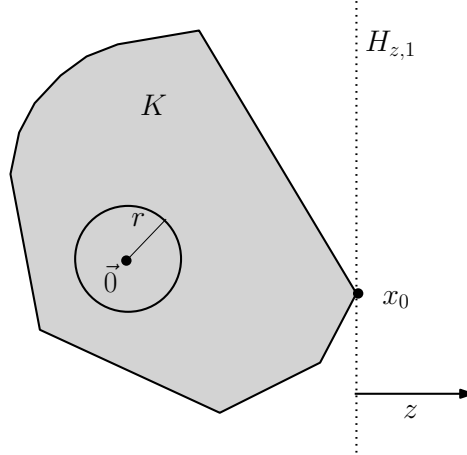
$$\langle x, h_K(u)^{-1}u \rangle = h_K(u)^{-1} \langle x, u \rangle \stackrel{(*)}{\leq} h_K(u)^{-1} \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle = h_K(u)^{-1} h_K(u) = 1.$$

donde en  $(*)$  hemos usado que  $h_K(u) > 0$ .

Para ver que  $h_K(u)^{-1}u \in \partial K^*$  razonamos por reducción al absurdo; supongamos  $h_K(u)^{-1}u \in \text{int}(K^*)$ . Como  $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$  por el Teorema 1.8.1 y  $K^*$  es convexo (por el mismo teorema), entonces  $[\vec{0}, h_K(u)^{-1}u] \subset K^*$ , y los dos extremos de este segmento son interiores a  $K^*$ . Así, existe  $\lambda > 1$  (próximo a 1) tal que  $\lambda h_K(u)^{-1}u \in K^*$ . Esto quiere decir que  $\langle x, \lambda h_K(u)^{-1}u \rangle \leq 1 \forall x \in K$ , o equivalentemente,  $\langle x, u \rangle \leq \frac{h_K(u)}{\lambda} < h_K(u) \forall x \in K$ . Esto contradice que  $H_{u, h_K(u)}$  es un hiperplano soporte de  $K$ . Por tanto,  $h_K(u)^{-1}u \in \partial K^*$  y el apartado (1) está probado.

**Observación:** El argumento del último párrafo aplicado a  $z = h_K(u)^{-1}u$  prueba que si  $H_{z,1}$  es un hiperplano soporte de  $K$  (siendo  $z \in K^* - \{\vec{0}\}$ ), entonces  $z \in \partial K^*$ .

Para el apartado (2), tomemos  $z \in \partial K^*$ . Notemos que  $z \neq \vec{0}$  porque  $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$ , luego el hiperplano  $H_{z,1}$  tiene sentido. Como  $z \in K^*$ , tenemos  $K \subset H_{z,1}^-$  luego para ver que  $H_{z,1}$  es un hiperplano soporte de  $K$  con  $z$  vector normal exterior a  $K$ , basta probar que  $K \cap H_{z,1} \neq \emptyset$ . Por reducción al absurdo, supongamos que  $K \cap H_{z,1} = \emptyset$ . Así,  $\langle x, z \rangle < 1 \forall x \in K$ . Por compacidad de  $K$ , existe  $x_0 \in K$  tal que  $\langle x, z \rangle \leq \langle x_0, z \rangle (< 1)$ ,  $\forall x \in K$ . Además,  $0 = \langle \vec{0}, z \rangle < \langle x_0, z \rangle$  (la desigualdad estricta se tiene porque  $\vec{0} \in \text{int}(K)$ ).



Dado  $x \in K$ ,  $\langle x, \frac{1}{\langle x_0, z \rangle} z \rangle = \frac{\langle x, z \rangle}{\langle x_0, z \rangle} \leq 1$ . Por tanto,  $\frac{1}{\langle x_0, z \rangle} z \in K^*$ . Como  $\vec{0} \in K^*$  y  $K^*$  es convexo, deducimos que  $[\vec{0}, \frac{1}{\langle x_0, z \rangle} z] \subset K^*$ . Como  $\vec{0} \in \text{int}(K)$ ,  $\frac{1}{\langle x_0, z \rangle} z \in K^*$  y  $z \in [\vec{0}, \frac{1}{\langle x_0, z \rangle} z]$ ,

el Lema 1.1.3 asegura que  $z \in \text{int}(K^*)$ , lo que contradice que habíamos supuesto  $z \in \partial K^*$ . Esto termina la demostración del Lema.  $\square$

Ya podemos enunciar la relación que buscábamos entre los puntos de  $\partial K^*$  y los hiperplanos soporte de un convexo  $K \in \mathcal{K}_0^n$ :

**Teorema 1.8.2** *Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  tal que  $\vec{0} \in \text{int}(K)$ . Entonces,  $z \in \partial K^*$  si y sólo si  $H_{z,1}$  es un hiperplano soporte de  $K$ , siendo  $z$  un vector normal exterior a  $K$ .*

*Demostración.* Por el apartado (2) del Lema 1.8.2, basta probar la condición suficiente. Supongamos que  $H_{z,1}$  es un hiperplano soporte de  $K$ , con  $z \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ . Como  $z$  es un vector normal exterior a  $K$ , entonces  $K \subset H_{z,1}^-$  luego  $z \in K^*$ . Aplicando la observación en la demostración del último lema, concluimos que  $z \in \partial K^*$ .  $\square$

**Definición 1.8.2** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  y  $x \in \partial K$ . Por el apartado (1) del Teorema 1.4.1, existe un hiperplano soporte de  $K$  en  $x$ . Diremos que  $x$  es un punto *regular* si el hiperplano soporte de  $K$  en  $x$  es único (en caso contrario,  $x$  se dice un punto *singular*).

Dado  $K \in \mathcal{K}_0^n$  y  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ , diremos que  $u$  es un *vector normal regular exterior a  $K$*  si  $F(K, u) = H(K, u) \cap K = H_{u, h_K(u)} \cap K$  se reduce a un punto:  $F(K, u) = \{x(u)\}$ . Por la Definición 1.6.2,  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$  es vector normal regular exterior a  $K$  si y sólo si  $x(u) \in \partial K$  es un *punto expuesto*.

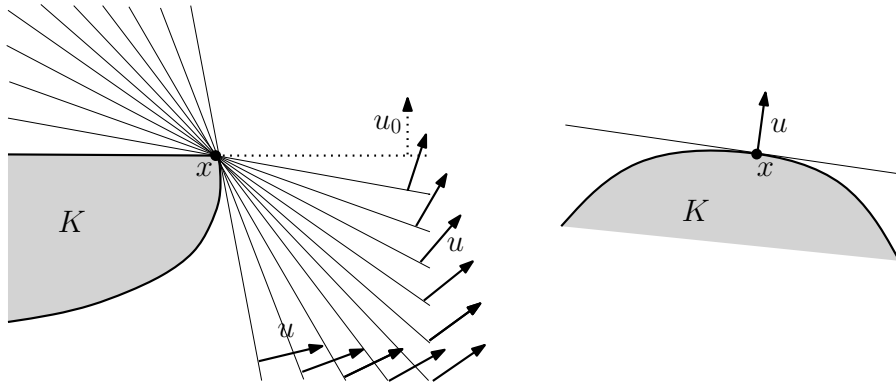


Figura 1.14: Izquierda:  $x \in \partial K$  es singular, pero todos los demás puntos de  $\partial K$  son regulares.  $u_0$  no es vector normal regular exterior a  $K$ , pero todos los demás vectores  $u$  son normales exteriores regulares a  $K$ . Derecha: En el caso  $\partial K$  diferenciable con curvatura positiva,  $x \in \partial K$  es un punto regular y el vector normal unitario  $u$  a  $\partial K$  en  $x$  es un vector normal regular exterior a  $K$ .

Supongamos que  $K \in \mathcal{K}_0^3$  tiene por frontera una superficie diferenciable. Si  $H$  es un plano soporte de  $K$  en un punto  $x \in \partial K$ , entonces  $H$  es el plano tangente afín a la superficie  $\partial K$ . En particular,  $H$  es único, o equivalentemente,  $x$  es un punto regular. Esto puede generalizarse a  $K = \overline{\mathbb{B}}(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$  o a cualquier convexo compacto cuyo borde es una hipersuperficie diferenciable compacta de  $\mathbb{R}^n$  (Figura 1.14 derecha).

En el ejemplo del párrafo anterior, todos los puntos de  $\partial K$  son regulares y si la curvatura de Gauss de  $\partial K$  es positiva, entonces todos los vectores  $u \in \mathbb{S}^2(1)$  son vectores normales regulares exteriores a  $K$  (porque la aplicación de Gauss  $N: \partial K \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$  es un difeomorfismo y todos los puntos de  $\partial K$  son de tipo elíptico). Ninguna de estas dos propiedades son ciertas para un  $K \in \mathcal{K}_0^n$  general: los vértices de un polígono en  $\mathbb{R}^2$  no son regulares, y los vectores unitarios normales exteriores a los lados del polígono no son regulares. Pero veremos que si  $K \in \mathcal{K}_0^n$ , entonces el conjunto de puntos singulares de  $\partial K$  y el conjunto de vectores normales exteriores a  $K$  no regulares son, en cierta forma, “pequeños”:

**Teorema 1.8.3** *Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$ . Entonces:*

- (1) *El conjunto  $\{x \in \partial K \mid x \text{ es regular}\}$  es denso en  $\partial K$ .*
- (2) *El conjunto  $\{u \in \mathbb{S}^{n-1}(1) \mid u \text{ es un vector normal regular exterior a } K\}$  es denso en  $\mathbb{S}^{n-1}(1)$ .*

*Demostración.* Para el apartado (1), tomemos  $z \in \partial K$  y  $\delta > 0$ , y veamos que existe  $x \in \partial K$  regular en  $\mathbb{B}(z, \delta)$ . Elegimos  $y \in \text{int}(K) \cap \mathbb{B}(z, \delta/3)$  y sea  $r_0 = \sup\{r > 0 \mid \overline{\mathbb{B}}(y, r) \subset K\}$  (este supremo existe y es un máximo, por ser  $K$  compacto). Notemos que:

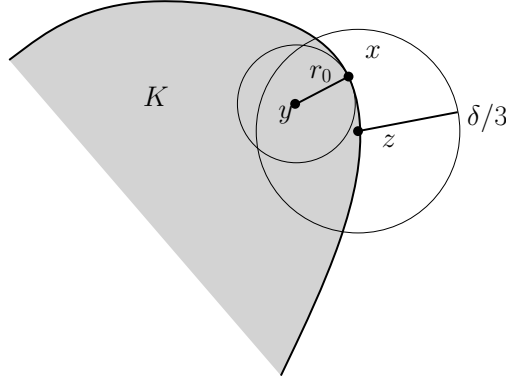
- $r_0 \leq d(y, z)$ : en caso contrario, tomando  $\varepsilon \in (0, r_0 - d(y, z))$  tendríamos  $\overline{\mathbb{B}}(y, d(y, z) + \varepsilon) \subset K$  luego  $z \in \text{int}(K)$ , contradicción.
- Por ser  $r_0$  un máximo, existe  $x \in \partial \overline{\mathbb{B}}(y, r_0) \cap \partial K$ .

Veamos que  $x \in \overline{\mathbb{B}}(z, \delta)$ :  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = r_0 + d(y, z) < r_0 + \frac{\delta}{3}$ . Como  $r_0 \leq d(y, z) < \frac{\delta}{3}$ , entonces  $d(x, z) < r_0 + \frac{\delta}{3} < 2\frac{\delta}{3} < \delta$ . Por tanto,  $x \in \overline{\mathbb{B}}(z, \delta)$ .

Veamos ahora que  $x$  es un punto regular de  $\partial K$ : Si  $H$  es un hiperplano soporte de  $K$  en  $x$ , con  $K \subset H^-$ , entonces  $\mathbb{B}(y, r_0) \subset K \subset H^-$  y  $x \in H \cap \partial \overline{\mathbb{B}}(y, r_0)$ , luego  $H$  es un hiperplano soporte de  $\overline{\mathbb{B}}(y, r_0)$ . Por la observación del penúltimo párrafo antes de este teorema,  $H$  debe ser el hiperplano tangente a  $\mathbb{S}^{n-1}(y, r_0)$  en  $x$ , luego  $H$  es único; esto nos dice que  $x$  es un punto regular de  $\partial K$ , y (1) está probado.

Para el apartado (2), tras una traslación de  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  podemos suponer que  $\vec{0} \in \text{int}(K)$ . La clave del argumento está en la siguiente

**Afirmación 1.8.1** *Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  con  $\vec{0} \in \text{int}(K)$ . Entonces,  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$  es un vector normal singular exterior a  $K$  si y sólo si  $z = h_K(u)^{-1}(u)$  es un punto singular de  $\partial K^*$ .*



*Demostración de la Afirmación 1.8.1.* Primero notemos que  $h_K(u) > 0$  por el apartado (1) del Lema 1.8.1, y que  $z \in \partial K^*$  por el apartado (1) del Lema 1.8.2.

$\Rightarrow$  Si  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$  es un vector normal singular exterior a  $K$ , entonces  $F(K, u)$  contiene más de un elemento. Como  $F(K, u) = H(K, u) \cap K$  es convexo, entonces  $F(K, u)$  contiene un segmento  $I$  no trivial. Tomemos un punto  $z_1 \in I$  (en particular,  $z_1 \neq \vec{0}$ ). Así,  $\{z_1\} \subset I \subset K$  luego los apartados (1) y (3) de la Proposición 1.8.1 aseguran que

$$(1.18) \quad K^* \subset I^* \subset \{z_1\}^* = H_{z_1,1}^-, \quad \forall z_1 \in I.$$

Por otro lado,  $I \subset F(K, u) \subset H(K, u) = H_{u, h_K(u)} = H_{z,1}$  (porque  $z = h_K(u)^{-1}u$ ), luego  $\langle z_1, z \rangle = 1 \quad \forall z_1 \in I$ , es decir

$$(1.19) \quad z \in H_{z_1,1}, \quad \forall z_1 \in I.$$

Por el apartado (1) del Lema 1.8.2,  $z \in \partial K^*$ . De (1.18) y (1.19) deducimos que  $H_{z_1,1}$  es un hiperplano soporte de  $K^*$  en  $z$ ,  $\forall z_1 \in I$ . Como  $I$  no se reduce a un sólo punto, concluimos que el hiperplano soporte de  $K^*$  en  $z$  no es único, luego  $z$  es un punto singular de  $\partial K^*$ .

$\Leftarrow$  Supongamos ahora que  $z = h_K(u)^{-1}(u)$  es un punto singular de  $\partial K^*$  ( $z$  está en  $\partial K^*$  por el apartado (1) del Lema 1.8.2). Así, existen hiperplanos soporte distintos de  $K^*$  en  $z$ , que podemos escribir de la forma  $H_{v,1}, H_{w,1} \subset \mathbb{R}^n$ , con  $v \neq w$  en  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  ya que  $z \neq \vec{0}$  por ser  $z \in \partial K^*$  y  $\vec{0} \in \text{int}(K^*)$  por el Teorema 1.8.1. Este mismo teorema nos dice que  $K^* \in \mathcal{K}_0^n$  luego podemos aplicar el Teorema 1.8.2 a  $K^*$  y a sus hiperplanos soporte  $H_{v,1}, H_{w,1}$  para concluir que

$$(1.20) \quad v, w \in \partial[(K^*)^*] = \partial K,$$

donde en la última igualdad hemos usado de nuevo el Teorema 1.8.1. Por otro lado, como  $H_{v,1}$  es un hiperplano soporte de  $K^*$  en  $z$ , tenemos  $1 = \langle v, z \rangle = \langle v, h_K(u)^{-1}(u) \rangle$ , luego

$\langle v, u \rangle = h_K(u)$ , es decir,  $v \in H(K, u)$ . Análogamente,  $w \in H(K, u)$ . Esto junto con (1.20) implica que  $v, w \in F(K, u)$ , luego  $u$  es un vector normal singular exterior a  $K$ , y la afirmación está probada.  $\square$

Veamos ya la demostración del apartado (2) del Teorema 1.8.3: Consideremos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{S}^{n-1}(1) &\rightarrow \partial K^* & \psi: \partial K^* &\rightarrow \mathbb{S}^{n-1}(1) \\ u &\mapsto h_K(u)^{-1}u = z & z &\mapsto \frac{z}{\|z\|}. \end{aligned}$$

Notemos que  $\phi$  tiene sentido por el apartado (1) del Lema 1.8.2, y  $\psi$  tiene sentido porque  $\vec{0} \in \text{int}(K)$  (Teorema 1.8.1). Veamos que  $\phi, \psi$  son inversas:

$$(\psi \circ \phi)(u) = \psi(h_K(u)^{-1}u) = \frac{h_K(u)^{-1}u}{\|h_K(u)^{-1}u\|} = u, \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}(1),$$

donde hemos usado que  $h_K(u) > 0$ . Dado  $z \in \partial K^*$ ,

$$(\phi \circ \psi)(z) = \phi\left(\frac{z}{\|z\|}\right) = \frac{1}{h_K\left(\frac{z}{\|z\|}\right)} \frac{z}{\|z\|} = \frac{1}{\sup_{k \in K} \langle k, \frac{z}{\|z\|} \rangle} \frac{z}{\|z\|} = \frac{1}{\sup_{k \in K} \langle k, z \rangle} z.$$

Como  $z \in \partial K^*$ ,  $H_{z,1}$  es un hiperplano soporte de  $K$  por el Teorema 1.8.2, luego  $\langle k, z \rangle \leq 1 \forall k \in K$  con igualdad en al menos un punto de  $K$ , donde  $H_{z,1}$  sea hiperplano soporte de  $K$ . Por tanto, el supremo que aparece en el último denominador es 1, y deducimos que  $(\phi \circ \psi)(z) = z \forall z \in \partial K^*$ . Así,  $\phi, \psi$  son aplicaciones inversas.

Tomemos  $r > 0$  tal que  $\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, r) \subset \text{int}(K^*)$ . Por la Nota 1.2.2, la aplicación  $F = (p_{\overline{\mathbb{B}}})|_{\partial K^*}: \partial K^* \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}(r) = \partial \overline{\mathbb{B}}$  es un homeomorfismo. Como  $\psi$  es la composición de  $F$  con la homotecia de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo de razón  $1/r$ , concluimos que  $\psi$  es un homeomorfismo. Por el apartado (1) de este teorema aplicado a  $K^* \in \mathcal{K}_0^n$ , el conjunto  $\{x \in \partial K^* \mid x \text{ es regular}\}$  es denso en  $\partial K^*$ . Como la densidad se conserva por homeomorfismos,  $\psi(\{x \in \partial K^* \mid x \text{ es regular}\})$  es denso en  $\mathbb{S}^{n-1}(1)$ . Finalmente, la Afirmación 1.8.1 asegura que

$$\psi(\{x \in \partial K^* \mid x \text{ es regular}\}) = \{u \in \mathbb{S}^{n-1}(1) \mid u \text{ es un vector normal regular exterior a } K\},$$

lo que termina la demostración del teorema.  $\square$

**Nota 1.8.1** Puede probarse que la medida de Hausdorff  $(n-1)$ -dimensional del conjunto de puntos singulares de  $\partial K$  es cero, para cualquier  $K \in \mathcal{K}_0^n$ . Como  $\psi: \partial K^* \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}(1)$  es Lipschitziana ( $\psi$  es composición de  $p_{\overline{\mathbb{B}}}$  con una homotecia, y  $p_{\overline{\mathbb{B}}}$  es Lipschitziana por el apartado (3) de la Proposición 1.2.2), entonces lleva conjuntos con medida de Hausdorff  $(n-1)$ -dimensional cero en conjuntos con medida de Hausdorff  $(n-1)$ -dimensional cero. Por tanto, la medida de Hausdorff  $(n-1)$ -dimensional del conjunto de los vectores normales unitarios normales singulares exteriores a  $K$  también es cero, para cualquier  $K \in \mathcal{K}_0^n$ .

## 1.9. Teorema de Helly y consecuencias

**Teorema 1.9.1 (Helly, 1921)** *Sea  $\mathcal{A}$  una colección de  $k$  conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $k \geq n + 1$ . Supongamos que para cualesquiera  $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$  se tiene  $A_1 \cap \dots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ . Entonces,  $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Por inducción sobre  $k$ . Si  $k = n + 1$ , el resultado es trivial. Supongamos que  $k > n + 1$  y que el teorema es cierto para toda familia de  $k - 1$  convexos de  $\mathbb{R}^n$ . Tomemos una familia  $\mathcal{A}$  de convexos de  $\mathbb{R}^n$  cumpliendo la hipótesis del teorema. Dado  $i = 1, \dots, k$ , sea  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - \{A_i\}$ . La nueva familia  $\mathcal{A}_i$  satisface la hipótesis del teorema, ya que  $\mathcal{A}$  la satisface. Como  $\mathcal{A}_i$  tiene  $k - 1$  elementos, podemos aplicarle la hipótesis de inducción, es decir

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}_i} A \neq \emptyset.$$

Tomemos ahora  $x_i \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}_i} A$ , para cada  $i = 1, \dots, k$ . Consideremos el sistema homogéneo de  $n + 1$  ecuaciones lineales con incógnitas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ :

$$(1.21) \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0.$$

Como  $k > n + 1$ , existe solución no trivial al sistema,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$  (en particular,  $x_1, \dots, x_k$  son afinmente dependientes en  $\mathbb{R}^n$ , por el Lema 1.1.2). Reordenando, podemos suponer que  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \geq 0$ ,  $\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_k < 0$  para cierto  $s \in \{1, \dots, k\}$ . Como  $0 < -\sum_{i=s+1}^k \alpha_i = \sum_{i=1}^s \alpha_i$ , tiene sentido definir

$$(1.22) \quad y = \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^s \alpha_i} \sum_{i=1}^s \alpha_i x_i}_{\text{comb. lineal convexa de } x_1, \dots, x_s} = \underbrace{\frac{1}{-\sum_{i=s+1}^k \alpha_i} \left( -\sum_{i=s+1}^k \alpha_i x_i \right)}_{\text{comb. lineal convexa de } x_{s+1}, \dots, x_k}.$$

Para cada  $i = 1, \dots, s$ ,  $x_i \in \mathcal{A} - \{A_i\} \subset A_{s+1} \cap \dots \cap A_k$ , luego por convexidad  $y \in A_{s+1} \cap \dots \cap A_k$ . Para cada  $i = s + 1, \dots, k$ ,  $x_i \in \mathcal{A} - \{A_i\} \subset A_1 \cap \dots \cap A_s$ , luego por convexidad  $y \in A_1 \cap \dots \cap A_s$ . Por lo tanto,  $y \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ .  $\square$

**Corolario 1.9.1 (Lema de Radon, 1921)** *Sean  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \geq n + 2$ . Entonces, existe una partición  $A, B$  de  $\{x_1, \dots, x_k\}$  de forma que  $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B) \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Como el número máximo de puntos afinmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  es  $n + 1$ , los puntos  $x_1, \dots, x_k$  son afinmente dependientes. Por el Lema 1.1.2, existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  no todos nulos tales que (1.21) se cumple. Siguiendo el razonamiento de la demostración

del Teorema de Helly desde ese punto (y con la misma notación), (1.22) implica que definiendo  $A = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_s\})$ ,  $B = \text{conv}(\{x_{s+1}, \dots, x_k\})$  se tiene  $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B) \neq \emptyset$ .  $\square$

En Lema de Radon es la generalización de una propiedad obvia en  $\mathbb{R}^2$ : si tenemos 4 puntos en el plano, entonces es posible distribuirlos en una de las dos siguientes opciones:

- $A =$  los vértices de un triángulo y  $B =$  el cuarto punto, o bien
- $A =$  los vértices de un segmento y  $B =$  los vértices de otro segmento,

de forma que en el primer caso, el cuarto punto está en el triángulo, y en el segundo caso, los dos segmentos se cortan. El primer caso es cuando la envolvente convexa de los cuatro puntos es un triángulo, y el segundo caso es cuando esta envolvente convexa es un cuadrilátero (o un segmento). Cabe destacar que el Lema de Radon es equivalente al Teorema de Helly, y que ambos son pilares fundamentales de la geometría combinatoria.

**Corolario 1.9.2** *Sea  $\mathcal{A}$  una colección finita de conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un convexo tal que para cualesquiera  $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$ , existe  $t \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(C+t) \cap A_i \neq \emptyset$ ,  $\forall i = 1, \dots, n+1$ . Entonces, existe  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(C+z) \cap A \neq \emptyset$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$ .*

*Demostración.* Consideremos la familia de convexos  $\mathcal{F} = \{A - C \mid A \in \mathcal{A}\}$  (la convexidad se deduce del apartado (3) de la Proposición 1.1.1). Veamos si  $\mathcal{F}$  cumple las hipótesis del Teorema de Helly: Sean  $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$ . Por hipótesis, existe  $t \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(C+t) \cap A_i \neq \emptyset \forall i = 1, \dots, n+1$ . Por tanto, podemos elegir  $x_i \in A_i$ ,  $c_i \in C$  tales que  $x_i = c_i + t$ ,  $\forall i = 1, \dots, n+1$ . Así,  $t = x_i - c_i \in A_i - C \forall i = 1, \dots, n+1$  luego  $t \in \bigcap_{i=1}^{n+1} (A_i - C)$ . Por el Teorema de Helly, existe  $z \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (A - C)$ . Finalmente, dado  $A \in \mathcal{A}$  tenemos  $z \in A - C$  luego  $\exists a \in A$ ,  $c' \in C$  tales que  $z = a - c'$ . Así,  $c' + z \in A$  luego  $(C+z) \cap A \neq \emptyset$ .  $\square$

En el Teorema de Caratheodory (Teorema 1.1.1) se obtenía que todo punto de  $\text{conv}(A)$  es combinación lineal convexa de a lo sumo  $n+1$  puntos de  $A$  si  $A \subset \mathbb{R}^n$ . A continuación rebajaremos en 1 la longitud de la combinación lineal convexa, supuesto que el número de componentes conexas de  $A$  no supera a  $n$ .

**Teorema 1.9.2 (Extensión del Teorema de Caratheodory)** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto con  $r \leq n$  componentes conexas. Entonces, todo punto de  $\text{conv}(A)$  es combinación lineal convexa de, a lo sumo,  $n$  puntos de  $A$ .*

*Demostración.* Sea  $y \in \text{conv}(A)$ . El Teorema de Caratheodory nos asegura que existen  $x_i \in A$ ,  $i = 1, \dots, k$ , afinmente independientes, tales que  $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ , con  $\lambda_i \geq 0 \forall i$  y  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . Como los  $x_i$  son afinmente independientes, tenemos  $k \leq n+1$ . Si  $k \leq n$  o bien algún  $\lambda_i$  es cero, entonces  $y$  sería combinación lineal convexa de a lo más  $n$  puntos

de  $A$ , que es lo que deseamos probar. Por tanto, podemos suponer que  $k = n + 1$  y  $\lambda_i > 0 \forall i = 1, \dots, n + 1$ . Trasladando  $A$ , podemos suponer que  $y = \vec{0}$ . Para cada  $i = 1, \dots, n + 1$  definimos

$$x'_i = -x_i, \quad T_i = \text{cono de vértice } \vec{0} \text{ y base } \text{conv}(\{x'_1, \dots, \widehat{x'_i}, \dots, x'_{n+1}\}).$$

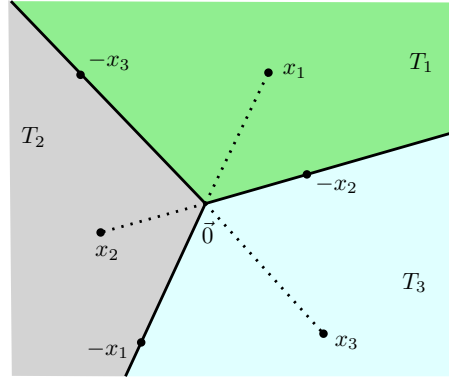


Figura 1.15: Caso particular  $n = 2$ : la demostración consistirá en encontrar un punto  $x \in A$  en el segmento  $[\vec{0}, -x_3]$ ; esto implicará que  $\vec{0}$  se escribe como combinación lineal convexa de 2 puntos de  $A$  ( $x$  y  $x_3$ ).

Observamos que:

$$T_i = \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \mu_j x'_j \mid \mu_j \geq 0 \forall j \right\}, \quad \text{int}(T_i) = \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \mu_j x'_j \mid \mu_j > 0 \forall j \right\},$$

$$\partial T_i = \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \mu_j x'_j \mid \mu_j \geq 0 \forall j \text{ y algún } \mu_j \text{ es } 0 \right\}.$$

Veamos que  $x_i \in \text{int}(T_i) \forall i$ : Como  $y = \vec{0}$ , tenemos  $\vec{0} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j = \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \lambda_j x_j \right) + \lambda_i x_i$ , de donde  $x_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \lambda_j x'_j$ . Como  $\lambda_j > 0$  para todo  $j = 1, \dots, n + 1$ , deducimos que  $x_i \in \text{int}(T_i)$ .



Ahora veamos que  $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{n+1} T_i$ : Como  $x_1, \dots, x_{n+1}$  son afinmente independientes,  $\text{conv}(\{x_1, \dots, x_{n+1}\})$  es un  $n$ -símplex en  $\mathbb{R}^n$ . Como  $\vec{0} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j$  con todos los  $\lambda_j > 0$ , deducimos que  $\vec{0} \in \text{int}(\text{conv}(\{x_1, \dots, x_{n+1}\}))$ . Así,

$$\begin{aligned} \vec{0} &= -1_{\mathbb{R}^n}(\vec{0}) \in -1_{\mathbb{R}^n}[\text{int}(\text{conv}(\{x_1, \dots, x_{n+1}\}))] \\ &= \text{int}(\text{conv}(\{-x_1, \dots, -x_{n+1}\})) = \text{int}(\text{conv}(\{x'_1, \dots, x'_{n+1}\})). \end{aligned}$$

Lo anterior implica que el cono sobre el  $n$ -símplex  $\text{conv}(\{x'_1, \dots, x'_{n+1}\})$  es todo  $\mathbb{R}^n$ . Pero dicho cono es la unión de los conos sobre las  $n+1$  caras del  $n$ -símplex, que son  $\text{conv}(\{x'_1, \dots, \hat{x}'_i, \dots, x'_{n+1}\})$ ,  $\forall i = 1, \dots, n+1$ . Por tanto, el cono sobre la cara anterior es  $T_i$ . Es decir,  $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{n+1} T_i$ . Notemos que este mismo argumento prueba que  $\text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset \forall i \neq j$ .

Supongamos que  $\forall j \in \{1, \dots, n+1\}$  se tiene  $A \cap \partial T_j = \emptyset$ . Como  $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{n+1} T_i$ , tenemos  $A \subset \cup_{i=1}^{n+1} \text{int}(T_i)$ . Como  $x_j \in A \cap \text{int}(T_j)$  para cada  $j$  y  $\text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset \forall i \neq j$ , tendríamos que  $A$  tiene al menos  $n+1$  componentes conexas. Esto contradice la hipótesis sobre el número de componentes conexas de  $A$ . Por tanto, existe  $j \in \{1, \dots, n+1\}$  tal que  $A \cap \partial T_j \neq \emptyset$ .

Finalmente, del párrafo anterior tenemos que reordenando los índices si fuera necesario, existe un punto  $x \in A \cap \partial T_1$ . Así,  $x = \sum_{j=2}^{n+1} \mu_j x'_j$  con  $\mu_j \geq 0 \forall j$  y algún  $\mu_j$  es cero. De nuevo reordenando los índices  $2, \dots, n$  podemos suponer  $\mu_2 = 0$ , es decir,  $x = \sum_{j=3}^{n+1} \mu_j x'_j$ . Por tanto,

$$\underbrace{\frac{1}{1 + \sum_{j=3}^{n+1} \mu_j} \left( 1 \cdot x + \sum_{j=3}^{n+1} \mu_j x_j \right)}_{\text{comb. lineal convexa de } x, x_3, \dots, x_{n+1} \in A} = \frac{1}{1 + \sum_{j=3}^{n+1} \mu_j} \left( \sum_{j=3}^{n+1} \mu_j (x'_j + x_j) \right) = \vec{0},$$

con lo que hemos escrito  $\vec{0}$  como combinación lineal convexa de  $n$  puntos de  $A$ . Esto termina la demostración.  $\square$

## 1.10. Polígonos, poliedros y politopos

Dentro de la familia de conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^n$ , la familia más sencilla son los politopos. Este concepto es la generalización a  $n$  dimensiones del concepto clásico de polígono convexo en  $\mathbb{R}^2$  o de poliedro convexo en  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 1.10.1** Un *politopo* en  $\mathbb{R}^n$  es la envolvente convexa de una cantidad finita de puntos.

Por el apartado (4) de la Proposición 1.1.3, todo politopo es compacto. Así, tenemos  $\{\text{politopos en } \mathbb{R}^n\} \subset \mathcal{K}^n$ . Veremos que en cierta topología sobre  $\mathcal{K}^n$ , el conjunto de politopos es denso en  $\mathcal{K}^n$ . Esto nos permitirá probar propiedades para convexos probándolas para politopos y viendo la continuidad de la propiedad respecto de la topología anterior.

**Teorema 1.10.1** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto acotado que se escribe como intersección finita de semiespacios cerrados. Entonces,  $A$  es un politopo (el recíproco es cierto, ver Ejercicio 22).*

*Demostración.*  $A$  es convexo, por ser intersección de convexos (apartado (1) de la Proposición 1.1.1).  $A$  es cerrado, por ser intersección de cerrados. Como  $A$  es acotado por hipótesis, entonces  $A$  es compacto. Por el Teorema 1.6.4,  $A = \overline{\text{conv}(\text{extr}(A))}$ , donde  $\text{extr}(A)$  es el conjunto de puntos extremos de  $A$  (Definición 1.6.1). Si probamos que  $\text{extr}(A)$  es finito, entonces  $\overline{\text{conv}(\text{extr}(A))}$  será por definición un politopo de  $\mathbb{R}^n$ , y como  $A = \overline{\text{conv}(\text{extr}(A))} = \text{conv}(\text{extr}(A))$  habremos terminado. Veamos entonces que  $\text{extr}(A)$  es finito, por inducción sobre  $\dim A$ .

Si  $\dim A = 1$ , entonces  $A = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$  con  $a \leq b$  luego  $\text{extr}(A) = \{a, b\}$ . Supongamos que  $\text{extr}(A)$  es finito siempre que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto acotado que se escribe como intersección finita de semiespacios cerrados con  $\dim A \leq k - 1$ , y sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto acotado que se escribe como intersección finita de semiespacios cerrados, con  $\dim A = k$ . Por hipótesis,  $A = H_1^+ \cap \dots \cap H_m^+$  donde cada  $H_i^+$  es un semiespacio cerrado de  $\mathbb{R}^n$ , bordeado por un hiperplano  $H_i$ . Así,

$$(1.23) \quad \text{extr}(A) \subset \partial A \subset H_1 \cup \dots \cup H_m.$$

Por otro lado, como cada  $H_i$  es un semiespacio soporte del convexo  $A$ , el Lema 1.6.1 asegura que

$$(1.24) \quad \text{extr}(A) \cap H_i = \text{extr}(A \cap H_i), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Por otro lado,  $A \cap H_i$  es convexo, acotado y se escribe como intersección finita de semiespacios cerrados de  $H_i \cong \mathbb{R}^{n-1}$  y  $\dim(A \cap H_i) = k - 1$  luego por hipótesis de inducción,  $\text{extr}(A \cap H_i)$  es finito. Finalmente,

$$\text{extr}(A) \stackrel{(1.23)}{=} \text{extr}(A) \cap (\cup_{i=1}^m H_i) = \cup_{i=1}^m (\text{extr}(A) \cap H_i) \stackrel{(1.24)}{=} \cup_{i=1}^m \text{extr}(A \cap H_i),$$

que es finito por ser unión finita de conjuntos finitos. □

### 1.11. Ejercicios.

1. Calcular la envolvente convexa en  $\mathbb{R}^2$  del conjunto

$$A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\} \cup \{(0, 1)\}.$$

2. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo y  $C \subset \partial A$ . Probar que si  $\partial A$  no contiene ningún segmento, entonces  $A - C$  es convexo.
3. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo y cerrado, y  $p \in \text{int}(A)$ . Demostrar que si  $A$  no es compacto, entonces existe una semirrecta  $R \subset A$  que parte de  $p$ .
4. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado convexo, y sean  $x, y \in \mathbb{R}^n - A$  tales que  $p_A(x) = p_A(y)$ . Probar que  $\forall z \in [x, y]$ , se tiene  $p_A(z) = p_A(x)$ .
5. Sea  $A = \text{conv}(\{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1)\})$ . Calcular explícitamente la proyección métrica  $p_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow A$ .
6. Probar que si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es convexo, entonces  $\text{rel int}(A) = \text{rel int}(\overline{A})$  y  $\overline{\text{rel int}(A)} = \overline{A}$ .
7. Demostrar que si  $A \subset \mathbb{R}^n$  cumple que  $A$  y  $\mathbb{R}^n - A$  son convexos, entonces  $\partial A$  es un hiperplano (indicación: probar que si  $H_x$  es un hiperplano soporte de  $\overline{A}$  en  $x \in \partial A$ , entonces  $H_x$  es también hiperplano soporte de  $\overline{\mathbb{R}^n - A}$  en  $x$ , y es el único hiperplano soporte tanto de  $\overline{A}$  como de  $\overline{\mathbb{R}^n - A}$  en  $x$ ).
8. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $H$  un hiperplano soporte de  $\text{conv}(A)$ . Demostrar que  $A \cap H \neq \emptyset$ .
9. Calcular todos los hiperplanos soporte del convexo de  $\mathbb{R}^2$

$$A = \text{conv}(\{(0, 2), (2, 1), (2, 2)\}).$$

10. ¿Es el hiperplano de  $\mathbb{R}^2$  de ecuación  $x - 5y - 2 = 0$  soporte del convexo  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| + 3|y| \leq 1\}$ ?
11. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo. Demostrar que  $x \in A$  es un punto extremo de  $A$  si y sólo si  $A - \{x\}$  es convexo.
12. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo. Probar que si  $A \neq \text{exp}(A)$ , entonces  $A - \text{exp}(A)$  es convexo.
13. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  cerrado y convexo, tal que  $\partial A \neq \emptyset$  es cerrada y acotada. Demostrar que  $A$  es compacto y  $A = \text{conv}(\partial A)$ .
14. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado. Probar que para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ ,

$$h_{\text{conv}(A)}(u) = \sup\{\langle a, u \rangle \mid a \in A\}.$$

15. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  cerrado y convexo. Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n - A$  tales que  $p_A(x) = p_A(y) := z$ . Probar que si  $x, y, z$  son afínmente independientes, entonces  $z$  no es un punto regular de  $A$ .

16. Determinar explícitamente el conjunto polar de

$$A = \text{conv}(\{(1, 0), (0, 1), (-1, -1)\}).$$

17. Calcular el conjunto polar del segmento de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $A = [(-1, 0), (0, -1)]$ .

18. Sea  $K \in \mathcal{K}^n$ . Probar que  $K^* = K$  si y sólo si  $K = \overline{\mathbb{B}}(1)$ .

19. Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  tal que  $K = -K$ . Demostrar que la aplicación  $\|\cdot\|_K: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  dada por  $\|x\|_K = h_K(x)$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$ , que tiene a  $K^*$  como bola unidad cerrada para dicha norma.

20. Calcular el conjunto de puntos y vectores regulares para el convexo

$$K = \text{conv}(\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}).$$

21. Sea  $K \in \mathcal{K}^n$ . Usar el teorema de Helly sobre la familia  $\mathcal{A} = \{\frac{1}{n}x + K \mid x \in K\}$  para demostrar que existe  $p \in \mathbb{R}^n$  tal que  $p - \frac{1}{n}K \subset K$ .

22. Si probar que si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un politopo, entonces  $A$  es una intersección finita de semiespacios cerrados.

## Capítulo 2

# Distancia de Hausdorff y $T^a$ de selección de Blaschke

### 2.1. Distancia de Hausdorff

El objetivo principal de esta sección será dotar al conjunto de convexos  $\mathcal{K}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  de una estructura de espacio métrico “razonable”. Denotaremos por

$$\mathcal{C}^n = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

Así,  $\mathcal{K}_0^n \subset \mathcal{K}^n \subset \mathcal{C}^n$ .

Llamaremos  $\bar{\mathbb{B}} = \bar{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1)$ . Dado  $K \in \mathcal{C}^n$  y  $\alpha \geq 0$ , el *entorno tubular cerrado* de  $K$  de radio  $\alpha$  es

$$K + \alpha\bar{\mathbb{B}} = \cup_{x \in K} [x + \alpha\bar{\mathbb{B}}] = \cup_{x \in K} \bar{\mathbb{B}}(x, \alpha) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, K) \leq \alpha\}.$$

Dados  $K, L \in \mathcal{C}^n$ , por compacidad existe  $\alpha \geq 0$  tal que  $K \subset L + \alpha\bar{\mathbb{B}}$  y  $L \subset K + \alpha\bar{\mathbb{B}}$ .

**Definición 2.1.1** Dados  $K, L \in \mathcal{C}^n$ , se define la *distancia de Hausdorff* entre  $K$  y  $L$  como

$$(2.1) \quad \delta(K, L) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid K \subset L + \alpha\bar{\mathbb{B}}, \text{ y } L \subset K + \alpha\bar{\mathbb{B}}\}.$$

Informalmente, dos compactos están próximos en distancia de Hausdorff si todo punto del primero compacto está próximo en la distancia usual a algún punto del segundo compacto, y viceversa. Algunas observaciones sencillas:

- El ínfimo anterior es un mínimo: Supongamos que  $\alpha_k \searrow \alpha \in [0, \infty)$  cumpliendo  $K \subset L + \alpha_k\bar{\mathbb{B}}$  y  $L \subset K + \alpha_k\bar{\mathbb{B}} \forall k \in \mathbb{N}$ . Queremos probar que  $K \subset L + \alpha\bar{\mathbb{B}}$  y  $L \subset K + \alpha\bar{\mathbb{B}}$ . Por reducción al absurdo, supongamos que  $K \not\subset L + \alpha\bar{\mathbb{B}} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, L) \leq \alpha\}$ . Así, existe  $x \in K$  tal que  $d(x, L) > \alpha$  luego a partir de un  $k_0 \in \mathbb{N}$ , es  $d(x, L) > \alpha_{k_0}$ , lo que contradice que  $K \subset L + \alpha_{k_0}\bar{\mathbb{B}}$ .

- Si  $K = \{p\}$ ,  $L = \{q\}$  con  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\delta(K, L) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid p \in \overline{\mathbb{B}}(q, \alpha) \text{ y } q \in \overline{\mathbb{B}}(p, \alpha)\} = d(p, q),$$

es decir, la distancia de Hausdorff generaliza a la distancia euclídea usual.

**Lema 2.1.1** *Dados  $K, L \in \mathcal{C}^n$ , se tiene:*

$$(2.2) \quad \delta(K, L) = \max \left\{ \sup_{x \in K} \inf_{y \in L} d(x, y), \sup_{y \in L} \inf_{x \in K} d(x, y) \right\}.$$

*Demostración.* Llamemos  $(\star)$  al miembro de la derecha de la fórmula (2.2).

$\boxed{\delta(K, L) \geq (\star)}$ : Sean  $x \in K, y \in L$ . Por definición de  $\delta(K, L)$  (y por ser  $\delta(K, L)$  un mínimo, véase la primera observación anterior), tenemos  $L \subset K + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, K) \leq \delta(K, L)\}$ , luego

$$d(y, K) \leq \delta(K, L), \quad \forall y \in L.$$

Por definición de  $d(y, K)$ ,

$$\inf_{x \in K} d(y, x) \leq \delta(K, L), \quad \forall y \in L.$$

Tomando supremos en  $y \in L$ :

$$\sup_{y \in L} \inf_{x \in K} d(x, y) \leq \delta(K, L).$$

Intercambiando los papeles de  $x, y$  obtendremos que  $(\star) \leq \delta(K, L)$ .

$\boxed{\delta(K, L) \leq (\star)}$ : Si  $\delta(K, L) = 0$ , no hay nada que demostrar. Supongamos que  $\delta(K, L) > 0$  y sea  $\lambda \in (0, \delta(K, L))$ . Por definición de  $\delta(K, L)$ , o bien  $K \not\subset L + \lambda\overline{\mathbb{B}}$  o  $L \not\subset K + \lambda\overline{\mathbb{B}}$ . Podemos suponer sin perder generalidad que se da lo primero (basta cambiar los papeles de  $K, L$  en lo que sigue). Así, existe  $x_0 \in K$  tal que  $x_0 \notin L + \lambda\overline{\mathbb{B}}$ , luego  $d(x_0, L) > \lambda$ . Por definición de  $d(x_0, L)$ , tenemos

$$\inf_{y \in L} d(x_0, y) > \lambda,$$

luego

$$\sup_{x \in K} \inf_{y \in L} d(x, y) \geq \inf_{y \in L} d(x_0, y) > \lambda,$$

de donde  $(\star) > \lambda$ . Como esto es válido para todo  $\lambda \in (0, \delta(K, L))$ , deducimos que  $(\star) \geq \delta(K, L)$ .  $\square$

**Lema 2.1.2** *La función  $\delta: \mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n \rightarrow [0, \infty)$  dada por (2.1) es una distancia.*

*Demostración.* Que  $\delta(K, L) = \delta(L, K)$  se deduce directamente de la definición o del Lema 2.1.1. Si tomamos  $K = L \in \mathcal{C}^n$ , entonces  $K \subset L + \alpha\overline{\mathbb{B}}$  y  $L \subset K + \alpha\overline{\mathbb{B}} \forall \alpha \geq 0$ , luego  $\delta(K, L) = 0$ . Recíprocamente, si  $K, L \in \mathcal{C}^n$  y  $\delta(K, L) = 0$ , entonces

$$K \subset \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, L) \leq \alpha\}, \quad L \subset \{q \in \mathbb{R}^n \mid d(q, K) \leq \alpha\}, \quad \forall \alpha \geq 0.$$

Dado  $x \in K$ , lo anterior nos dice que  $d(x, L) = 0$  luego  $x \in \overline{L} = L$  y así,  $K \subset L$ . Análogamente,  $L \subset K$  luego  $K = L$ .

Queda ver la propiedad triangular: sean  $K, L, M \in \mathcal{C}^n$ . Como  $K \subset M + \delta(K, M)\overline{\mathbb{B}}$  y  $M \subset L + \delta(M, L)\overline{\mathbb{B}}$ , entonces

$$K \subset [L + \delta(M, L)\overline{\mathbb{B}}] + \delta(K, M)\overline{\mathbb{B}} = L + [\delta(M, L)\overline{\mathbb{B}} + \delta(K, M)\overline{\mathbb{B}}] \stackrel{(\star)}{=} L + [\delta(M, L) + \delta(K, M)]\overline{\mathbb{B}},$$

donde en  $(\star)$  hemos usado el apartado (3) de la Proposición 1.1.1. Finalmente, por definición de  $\delta(K, L)$  concluimos que  $\delta(K, L) \leq \delta(M, L) + \delta(K, M)$ .  $\square$

**Lema 2.1.3** *Un subconjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^n$  es  $\delta$ -acotado<sup>1</sup> si y sólo si  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  es acotado en  $(\mathbb{R}^n, d_{\text{usual}})$ .*

*Demostración.* Si  $\mathcal{A}$  es  $\delta$ -acotado, existen  $K \in \mathcal{C}^n$ ,  $R > 0$  tales que  $\delta(A, K) < R \forall A \in \mathcal{A}$ . Por tanto,  $A \subset K + R\overline{\mathbb{B}} \forall A \in \mathcal{A}$ , luego  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset K + R\overline{\mathbb{B}}$ , que es un conjunto acotado en la distancia usual en  $\mathbb{R}^n$ .

Recíprocamente, si  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  es acotado en  $(\mathbb{R}^n, d_{\text{usual}})$ , entonces existe  $R > 0$  tal que  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)$ . Así, para cada  $A \in \mathcal{A}$  tenemos

$$(2.3) \quad A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R) \subset \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R) + (2R)\overline{\mathbb{B}}.$$

Por otro lado, si  $x \in \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)$  e  $y \in A$ , entonces  $y \in \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)$  luego por la desigualdad triangular  $d(x, y) \leq 2R$ . Moviendo  $x$  en  $\overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)$  tenemos

$$(2.4) \quad \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R) \subset \{y\} + (2R)\overline{\mathbb{B}} \subset A + (2R)\overline{\mathbb{B}}.$$

De (2.3) y (2.4) deducimos que  $\delta(A, \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, R)) \leq 2R$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$  luego  $\mathcal{A}$  es  $\delta$ -acotado.  $\square$

La propiedad más importante de esta sección será probar que el espacio métrico  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  es completo (Teorema 2.1.1). Para ello, necesitaremos un resultado previo.

**Proposición 2.1.1** *Sea  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$  no creciente (es decir,  $K_{i+1} \subseteq K_i, \forall i$ ). Entonces,  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$  es el límite en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  de  $\{K_i\}_i$  (en particular, dicha intersección es no vacía).*

<sup>1</sup>Es decir, acotado en distancia de Hausdorff.

*Demostración.* Veamos que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$ : Como  $\{K_i\}_i$  es no creciente y cada  $K_i$  es no vacío, entonces  $\mathcal{F} := \{K_i\}_i$  es una familia de compactos en el espacio topológico  $K_1$ , y  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de intersección finita<sup>2</sup>. Por la compacidad de  $K_1$ , esto implica<sup>3</sup> que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$ .

$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$  es cerrado (la intersección arbitraria de cerrados es cerrada en cualquier espacio topológico) dentro del compacto  $K_1$ , luego  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$  es compacto. Por tanto,  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \in \mathcal{C}^n$ . Para probar que  $\{K_i\}_i$  converge a  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$  en distancia de Hausdorff, debemos comprobar lo siguiente: Dado  $\varepsilon > 0$ , ¿existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\delta(K_j, \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i) < \varepsilon \forall j \geq i_0$ ? es decir,

$$(2.5) \quad \text{int } K_j \subset \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \right) + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}$$

y

$$(2.6) \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \subset K_j + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}$$

para todo  $j \geq i_0$ ? (2.6) es trivial:  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \subset K_j \subset K_j + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}, \forall \varepsilon > 0$ . Así que nos ocupamos de (2.5): Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $i_0 \in \mathbb{N}$ , existe  $j(i_0) \geq i_0$  siendo  $K_{j(i_0)} \not\subset \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \right) + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}$ . Consideremos el compacto

$$C_{j(i_0)} = K_{j(i_0)} - \text{int} \left[ \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \right) + \varepsilon \overline{\mathbb{B}} \right] \neq \emptyset.$$

La sucesión  $\{C_{j(i_0)}\}_{i_0 \in \mathbb{N}}$  es no creciente, y toda sucesión no creciente de compactos no vacíos tiene intersección no vacía por el argumento del primer párrafo. Por tanto,

$$\emptyset \neq \bigcap_{i_0 \in \mathbb{N}} \left\{ K_{j(i_0)} - \text{int} \left[ \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \right) + \varepsilon \overline{\mathbb{B}} \right] \right\} = \left( \bigcap_{i_0 \in \mathbb{N}} K_{j(i_0)} \right) - \text{int} \left[ \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \right) + \varepsilon \overline{\mathbb{B}} \right].$$

Notemos que al ser  $\{K_i\}_i$  monótona no creciente, entonces  $\bigcap_{i_0 \in \mathbb{N}} K_{j(i_0)} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ . Si comprobamos que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \subset \text{int} \left[ \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \right) + \varepsilon \overline{\mathbb{B}} \right]$  entonces lo anterior será el conjunto

<sup>2</sup>Es decir, la intersección de cualquier subfamilia finita de  $\mathcal{F}$  es no vacía.

<sup>3</sup>Sea  $X$  un espacio topológico. Entonces,  $X$  es compacto si para toda familia  $\mathcal{F}$  de cerrados de  $X$  que cumpla la propiedad de intersección finita, se tiene que  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ . Esta caracterización de la compacidad se prueba fácilmente: dada una familia  $\mathcal{F}$  de cerrados de  $X$ , se considera la familia de abiertos  $\mathcal{A} = \{X - C \mid C \in \mathcal{F}\}$ . Entonces, que  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$  equivale a que  $\mathcal{A}$  sea un recubrimiento por abiertos de  $X$ , y que  $\mathcal{F}$  cumpla la propiedad de intersección finita equivale a que de  $\mathcal{A}$  no pueda extraerse un subrecubrimiento finito. De aquí, la demostración de la caracterización de compacidad de  $X$  en términos de intersección no vacía de familias  $\mathcal{F}$  de cerrados cumpliendo la propiedad de intersección finita, es evidente.



vacío, contradicción. Para comprobar esto último simplificaremos la notación: dado  $A \subset \mathbb{R}^n$  no vacío, veamos que  $A \subset \text{int}(A + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$  para todo  $\varepsilon > 0$  y habremos terminado. Tomemos  $a \in A$ . Entonces,

$$\mathbb{B}(a, \varepsilon/2) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq \varepsilon\} = A + \varepsilon\overline{\mathbb{B}},$$

luego  $a \in \text{int}(A + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$ . Como esto es cierto para cualquier  $a \in A$ , deducimos que  $A \subset \text{int}(A + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$ .  $\square$

**Teorema 2.1.1** *El espacio métrico  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  es completo.*

*Demostración.* Sea  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$  una sucesión de Cauchy. Veamos primero que  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$  es acotado en  $(\mathbb{R}^n, d_{\text{usual}})$ : Tomemos  $\varepsilon = 1$  en la condición de Cauchy. Esto produce un  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall j \geq i_0, \delta(K_j, K_{i_0}) < 1$  luego  $K_j \subset K_{i_0} + \overline{\mathbb{B}} \forall j \geq i_0$ . Así,

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \subset [K_1 \cup \dots \cup K_{i_0-1}] \cup [K_{i_0} + \overline{\mathbb{B}}],$$

que es acotado en la distancia usual en  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora definimos  $A_i = \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} K_j}$  (cierre en la topología usual), que es compacto de  $\mathbb{R}^n$  por ser cerrado y acotado (por el párrafo anterior). Así,  $A_i \in \mathcal{C}^n, \forall i \in \mathbb{N}$ . Por construcción,  $\{A_i\}_i$  es una sucesión no creciente en  $\mathcal{C}^n$ . Por la Proposición 2.1.1,  $\{A_i\}_i$  converge en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  a  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ . Terminaremos comprobando que  $\{K_i\}_i$  converge en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  a  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ :

Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Como  $\{A_i\}_i$  converge a  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$  en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$ , existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $j \geq i_0, \delta(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i, A_j) < \varepsilon$ . En particular,

$$(2.7) \quad K_j = \overline{K_j} \subset \overline{\bigcup_{h=j}^{\infty} K_h} = A_j \subset \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}, \quad \forall j \geq i_0.$$

Por otro lado, por ser  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de Cauchy en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$ , para el  $\varepsilon > 0$  anterior existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\delta(K_i, K_j) < \varepsilon \forall i, j \geq j_0$ . En particular,

$$(2.8) \quad K_j \subset K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}, \quad \forall i, j \geq j_0.$$

Ahora fijamos  $i \geq j_0$ . Entonces,

$$\bigcup_{j \geq i} K_j \stackrel{(2.8)}{\subset} \bigcup_{j \geq i} (K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}) = K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}.$$

Tomando clausuras y usando que  $K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$  es cerrado,

$$(2.9) \quad A_i = \overline{\bigcup_{j \geq i} K_j} \subset K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}, \quad \forall i \geq j_0.$$

En particular,

$$(2.10) \quad \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h \subset A_i \stackrel{(2.9)}{\subset} K_i + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}, \quad \forall i \geq j_0.$$

De (2.7) y (2.10) tenemos que dado  $\varepsilon > 0$ , existen  $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$  tales que para  $i \geq \max\{i_0, j_0\}$ ,  $\delta(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i, K_i) < \varepsilon$ . Esto termina la demostración.  $\square$

## 2.2. El teorema de selección de Blaschke

**Teorema 2.2.1** *Toda sucesión acotada en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  admite una parcial convergente.*

*Demostración.* Sea  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$  una sucesión acotada en distancia de Hausdorff. Así, existen  $K_0 \in \mathcal{C}^n$  y  $r > 0$  tales que  $\delta(K_i, K_0) < r \forall i \in \mathbb{N}$ . En particular,  $K_i \subset K_0 + r\overline{\mathbb{B}} \forall i$  luego  $\cup_{i \in \mathbb{N}} K_i \subset K_0 + r\overline{\mathbb{B}}$ . Así,  $\cup_{i \in \mathbb{N}} K_i$  es acotado en la distancia usual sobre  $\mathbb{R}^n$  luego podemos encontrar un  $n$ -cubo  $T = \prod_{h=1}^n [a_h, b_h]$  que contiene a  $\cup_{i \in \mathbb{N}} K_i$  (no hay problema en suponer que  $\gamma := b_h - a_h$  es independiente de  $h \in \{1, \dots, n\}$ ).

Dado  $m \in \mathbb{N}$ , subdividimos  $T$  en  $2^{mn}$  cubos con arista  $2^{-m}\gamma$ , produciendo de esta forma una colección  $\mathcal{T}_m$  de subcubos cerrados ( $\mathcal{T}_m$  es un subconjunto de  $\mathcal{C}^n$ ), como en la Figura 2.1.

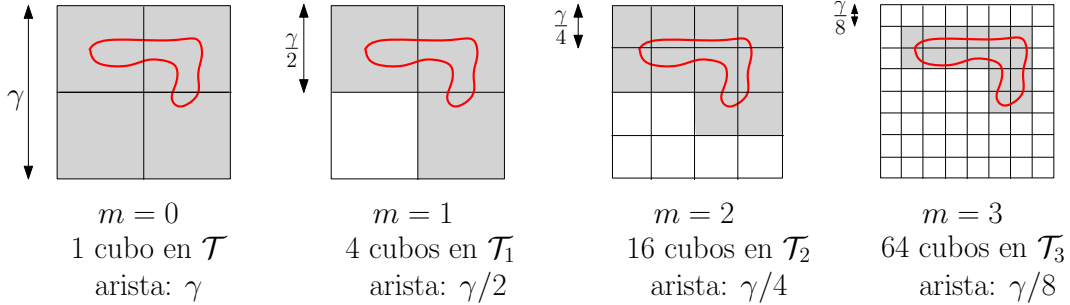


Figura 2.1: Subdividiendo  $T$ . En cada caso, el conjunto rayado representa a  $A_m(K)$ , siendo  $K$  el conjunto en rojo.

Dado un compacto  $K \in \mathcal{C}^n$  con  $K \subset T$  y  $m \in \mathbb{N}$ , definimos  $A_m(K)$  como la unión de los cubos de  $\mathcal{T}_m$  que cortan a  $K$ . Vamos a usar cada colección  $\mathcal{T}_m$  para definir una parcial de la sucesión original  $\{K_i\}_i$ .

- Llamamos  $K_i^0 = K_i, \forall i \in \mathbb{N}$ .

- $\mathcal{T}_1$  consiste en  $2^n$  cubos ( $n$  está fijo), luego existe una parcial  $\{K_i^1\}_i \subset \{K_i^0\}_i$  de forma que  $A_1(K_i^1)$  consiste en una unión *fija*  $T_1$  de algunos de los  $2^n$  cubos de  $\mathcal{T}_1$ .
- $\mathcal{T}_2$  consiste en  $2^{2n}$  cubos, luego existe una parcial  $\{K_i^2\}_i \subset \{K_i^1\}_i$  de forma que  $A_2(K_i^2)$  consiste en una unión *fija*  $T_2$  de algunos de los  $2^{2n}$  cubos de  $\mathcal{T}_2$ .
- ⋮
- Por inducción, para  $m \in \mathbb{N}$  existe una parcial  $\{K_i^m\}_i \subset \{K_i^{m-1}\}_i$  de forma que  $A_m(K_i^m)$  consiste en una unión *fija*  $T_m$  de algunos de los  $2^{mn}$  cubos de  $\mathcal{T}_m$ .

Ahora definimos  $C_i = K_i^i \forall i \in \mathbb{N}$ , con lo que  $\{C_i\}_i \subset \mathcal{C}^n$ . Veamos que  $\{C_i\}_i$  es de Cauchy en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  (esto terminaría la demostración porque  $\{C_i\}_i$  es una parcial de  $\{K_i\}_i$  y  $\{C_i\}_i$  sería  $\delta$ -convergente por ser  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  completo gracias al Teorema 2.1.1):

Fijamos  $m \in \mathbb{N}$ . Entonces:

$$(2.11) \quad \text{Dados } i, j \in \mathbb{N}, \text{ se tiene } A_m(K_i^m) = A_m(K_j^m) = T_m.$$

Dado  $x_0 \in T_m$ ,  $x_0$  estará en alguno de los cubos que forman  $T_m$ , al que llamaremos  $C(x_0, m)$ . Este cubo también contendrá un punto  $y \in K_j^m$ , luego  $C(x_0, m)$  está contenido en la bola cerrada centrada en  $y$  con radio la diagonal de  $C(x_0, m)$ , que es  $\sqrt{n} \frac{\gamma}{2^m}$ . Así,  $C(x_0, m) \subset \overline{\mathbb{B}}(y, \sqrt{n} \frac{\gamma}{2^m}) = \{y\} + \sqrt{n} \frac{\gamma}{2^m} \overline{\mathbb{B}} \subset K_j^m + \sqrt{n} \frac{\gamma}{2^m} \overline{\mathbb{B}}$ , donde como siempre  $\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1)$ . Variando  $x_0$  en  $T_m$  obtenemos

$$(2.12) \quad K_i^m \stackrel{(2.11)}{\subset} T_m \subset K_j^m + \sqrt{n} 2^{-m} \gamma \overline{\mathbb{B}},$$

Análogamente,

$$(2.13) \quad K_j^m \stackrel{(2.11)}{\subset} T_m \stackrel{(?)}{\subset} K_i^m + \sqrt{n} 2^{-m} \gamma \overline{\mathbb{B}}.$$

De (2.12) y (2.13) deducimos que  $\delta(K_i^m, K_j^m) \leq \sqrt{n} 2^{-m} \gamma, \forall i, j \in \mathbb{N}$ . Tomando  $i = m$ :

$$(2.14) \quad \delta(K_i^i, K_j^i) \leq \sqrt{n} 2^{-i} \gamma, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Para  $j \geq i$ , todos los compactos  $K_j^j$  son de la forma  $K_{h(i,j)}^i$  para cierto  $h(i, j) \geq i$  natural. Es decir, podemos sustituir  $K_j^j$  en la segunda variable de la desigualdad (2.14), y nos queda

$$\delta(K_i^i, K_j^j) \leq \sqrt{n} 2^{-i} \gamma, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, j \geq i.$$

Es decir,

$$\delta(C_i, C_j) \leq \sqrt{n} 2^{-i} \gamma, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, j \geq i.$$

Esto implica que  $\{C_i\}_i$  es de Cauchy en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$ , y termina la demostración del teorema.  $\square$

**Corolario 2.2.1** *Un subconjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^n$  es compacto si y sólo si  $\mathcal{A}$  es cerrado y  $\delta$ -acotado.*

*Demostración.* La implicación necesaria es cierta en todo espacio métrico. Para la implicación suficiente, supongamos que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^n$  es cerrado y  $\delta$ -acotado. Dada una sucesión  $\{K_i\}_i \subset \mathcal{A}$ , el Teorema 2.2.1 asegura que  $\{K_i\}_i$  admite una parcial convergente a un límite  $K \in \mathcal{C}^n$ , que ha de estar en  $\mathcal{A}$  por ser  $\mathcal{A}$  cerrado. Por tanto,  $\mathcal{A}$  es secuencialmente compacto, que equivale a compacidad en espacios métricos.  $\square$

**Proposición 2.2.1**  *$\mathcal{K}^n$  es cerrado en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$ .*

*Demostración.* Basta probar que dado  $K \in \mathcal{C}^n - \mathcal{K}^n$  (compacto no convexo),  $K$  es interior a  $\mathcal{C}^n - \mathcal{K}^n$ . Como  $K$  es no convexo, existen  $x, y \in K$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  tales que  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \notin K$ . Como  $K$  es compacto, es cerrado. Como  $z \notin K$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\overline{\mathbb{B}}(z, 2\varepsilon) \cap K = \emptyset$ . Veamos que  $\forall K' \in \mathcal{C}^n$  con  $\delta(K, K') < \varepsilon$ , se tiene  $K' \in \mathcal{C}^n - \mathcal{K}^n$  (esto terminará la demostración).

Tomemos entonces  $K' \in \mathcal{C}^n$  con  $\delta(K, K') < \varepsilon$ . Como  $K \subset K' + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}$  y  $x, y \in K$ , existirán  $x', y' \in K'$  con  $d(x, y) \leq \varepsilon$ ,  $d(y, y') \leq \varepsilon$ . Así,

$$\begin{aligned} d(\lambda x' + (1 - \lambda)y', z) &= \|\lambda x' + (1 - \lambda)y' - [\lambda x + (1 - \lambda)y]\| \\ &\leq \lambda \|x - x'\| + (1 - \lambda)\|y - y'\| \\ &\leq \lambda \varepsilon + (1 - \lambda)\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Veamos que  $z' := \lambda x' + (1 - \lambda)y' \notin K'$  luego  $K'$  será no convexo: Supongamos que  $z' \in K'$ . Como  $K' \subset K + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}$ , existe  $w \in K$  tal que  $d(z', w) \leq \varepsilon$ . Así,  $d(z, w) \leq d(z, z') + d(z', w) \leq 2\varepsilon$ . Esto contradice que  $\overline{\mathbb{B}}(z, 2\varepsilon) \cap K = \emptyset$ , luego  $K'$  no es convexo.  $\square$

**Teorema 2.2.2 (Teorema de selección de Blaschke)** *Toda sucesión  $\delta$ -acotada en  $\mathcal{K}^n$  admite una parcial convergente en distancia de Hausdorff a un elemento de  $\mathcal{K}^n$ .*

*Demostración.* Sea  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^n$  una sucesión  $\delta$ -acotada. Entonces, su clausura  $\overline{\{K_i\}_i}$  en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  es un cerrado y  $\delta$ -acotado en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$ , luego el Corolario 2.2.1 implica que  $\overline{\{K_i\}_i}$  es compacto. Por tanto, existe una parcial  $\{K_{\sigma(i)}\}_i \subset \{K_i\}_i$  que converge a un elemento  $K_\infty \in \mathcal{C}^n$  en distancia de Hausdorff. Como  $\{K_{\sigma(i)}\}_i \subset \mathcal{K}^n$  y  $\mathcal{K}^n$  es cerrado en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  (Proposición 2.2.1), concluimos que  $K_\infty \in \mathcal{K}^n$ .  $\square$

Terminaremos esta sección con una caracterización de la convergencia de Hausdorff en  $\mathcal{K}^n$  sólo en términos de convergencia en la distancia usual en  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.2.3** Sean  $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $K$  en  $\mathcal{K}^n$ . Entonces,  $\{K_i\}_i$  converge a  $K$  en distancia de Hausdorff si y sólo si se cumplen las dos siguientes propiedades:

- (a) Para cualesquiera  $x \in K$ ,  $i \in \mathbb{N}$  existe  $x_i \in K_i$  tal que  $\{x_i\}_i$  converge a  $x$  en  $(\mathbb{R}^n, d_{\text{usual}})$ .
- (b) Dada una sucesión  $\{y_i\}_i$  con  $y_i \in K_i \forall i$ , el límite de toda parcial convergente de  $\{y_i\}_i$  está en  $K$ .

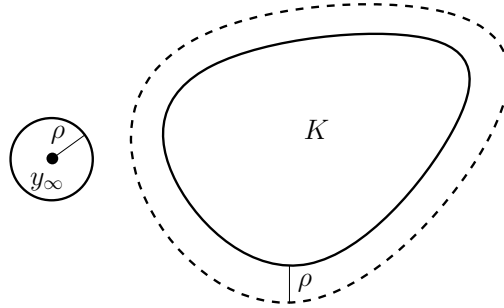
*Demostración.* Supongamos primero que  $\{K_i\}_i \xrightarrow{\delta} K$ .

Veamos la condición (a): Sea  $x \in K$ . Dado  $i \in \mathbb{N}$ , como  $K_i$  es un cerrado convexo, podemos considerar la proyección métrica  $p_{K_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow K_i$  (Definición 1.2.1). Así,

$$d(x, p_{K_i}(x)) = d(x, K_i) \stackrel{(*)}{\leq} \delta(K, K_i) \xrightarrow{(i \rightarrow \infty)} 0,$$

donde en  $(*)$  hemos usado que  $K \subset K_i + \delta(K, K_i)\overline{\mathbb{B}}$ . De esta forma, podemos tomar  $x_i = p_{K_i}(x)$  en el enunciado del apartado (a).

En cuanto al apartado (b), sea  $\{y_i\}_i$  con  $y_i \in K_i \forall i$ . Tomemos una parcial convergente de  $\{y_i\}_i$ , a la que denotaremos de la misma forma para no complicar la notación. Sea  $y_\infty \in \mathbb{R}^n$  su límite. Por reducción al absurdo, supongamos que  $y_\infty \notin K$ . Como  $K$  es compacto, existe  $\rho > 0$  tal que  $\overline{\mathbb{B}}(y_\infty, \rho) \cap (K + \rho\overline{\mathbb{B}}) = \emptyset$ .



Como  $\{K_i\}_i$  converge a  $K$  en distancia de Hausdorff, existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $K_i \subset K + \rho\overline{\mathbb{B}} \forall i \geq i_0$ , luego  $y_i \in K + \rho\overline{\mathbb{B}} \forall i \geq i_0$ . Esto implica que  $y_i \notin \overline{\mathbb{B}}(y_\infty, \rho) \forall i \geq i_0$ , lo que contradice que  $\{y_i\}_i$  converge a  $y_\infty$ . Esto termina de probar la implicación necesaria del teorema.

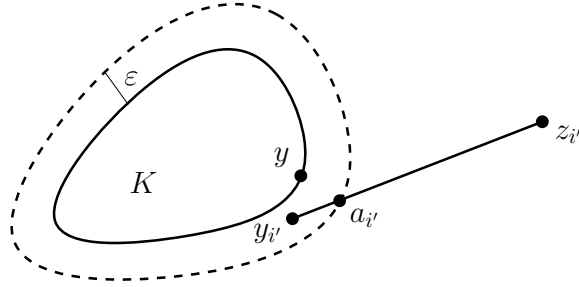
Para la implicación suficiente, supongamos que  $\{K_i\}_i, K$  están en  $\mathcal{K}^n$  y que cumplen las condiciones (a), (b). Debemos probar que  $\{K_i\}_i$  converge a  $K$  en distancia de Hausdorff. Sea  $\varepsilon > 0$ . Supongamos, por reducción al absurdo, que no existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall i \geq i_0$ ,  $K \subset K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$  y  $K_i \subset K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ . Esto nos dice que al menos una de las dos posibilidades siguientes debe darse:

(I) Existe una parcial  $\{K_{i'}\}_{i'} \subset \{K_i\}_i$  tal que  $K \not\subset K_{i'} + \varepsilon\overline{\mathbb{B}} \forall i' \in \mathbb{N}$ .

(II) Existe una parcial  $\{K_{i'}\}_{i'} \subset \{K_i\}_i$  tal que  $K_{i'} \not\subset K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}} \forall i' \in \mathbb{N}$ .

Supongamos que se da (I). Entonces,  $\forall i' \in \mathbb{N}$  existe  $z_{i'} \in K - (K_{i'} + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$ , y por tanto  $d(z_{i'}, K_{i'}) \geq \varepsilon$ . Como  $\{z_{i'}\}_{i'}$  es una sucesión en el compacto  $K$ , pasando a una parcial podemos suponer que  $\{z_{i'}\}_{i'}$  converge a un elemento  $x \in K$  en la distancia usual en  $\mathbb{R}^n$ . Como  $d(z_{i'}, K_{i'}) \geq \varepsilon \forall i'$ , deducimos que  $d(x, K_{i'}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$  para  $i'$  suficientemente grande. Pero aplicando a  $x$ , y a  $i'$  suficientemente grande la condición (a), debe existir  $x_{i'} \in K_{i'}$  tal que  $d(x, x_{i'})$  es tan pequeña como queramos, en particular menos que  $\frac{\varepsilon}{2}$ , lo que contradice que  $d(x, K_{i'}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Ahora supongamos que se da (II). Entonces,  $\forall i' \in \mathbb{N}$  existe  $z_{i'} \in K_{i'} - (K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$ . Elegimos un punto  $y \in K$ . Por la condición (a), para cada  $i'$  podemos encontrar  $y_{i'} \in K_{i'}$  tal que  $\{y_{i'}\}_{i'} \rightarrow y$ .



Consideremos el segmento  $[y_{i'}, z_{i'}]$ . Como  $y$  es interior a  $K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ , también lo será  $y_{i'}$  para todo  $i'$  a partir de un  $i'_0 \in \mathbb{N}$ . Como  $z_{i'} \notin K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ , por conexión existirá  $a_{i'} \in [y_{i'}, z_{i'}] \cap \partial(K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$ ,  $\forall i' \geq i'_0$ . Como  $y_{i'}, z_{i'} \in K_{i'}$  y  $K_{i'}$  es convexo, deducimos que  $a_{i'} \in K_{i'}$ . Por otro lado, la sucesión  $\{a_{i'}\}_{i'}$  es acotada en  $\mathbb{R}^n$  (esto se deduce de que  $a_{i'} \in \partial(K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$ , que es compacto). Por tanto, tras pasar a una parcial podemos suponer que  $\{a_{i'}\}_{i'}$  converge a un punto  $a \in \mathbb{R}^n$ . Este límite estará en  $K$  por la condición (b), ya que  $a_{i'} \in K_{i'} \forall i'$ . Pero  $d(a_{i'}, K) \geq \varepsilon \forall i'$  (porque  $a_{i'} \in \partial(K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$ ), luego tomando límites,  $d(a, K) \geq \varepsilon$ , lo que contradice que  $a \in K$ . Esto termina de probar el teorema.  $\square$

### 2.3. Continuidad respecto a la distancia de Hausdorff

En esta sección estudiaremos diversos resultados de continuidad en distancia de Hausdorff de operaciones básicas sobre compactos como la envolvente convexa, la suma afín o la unión finita. Más elaborada será la continuidad respecto a la distancia de Hausdorff del

volumen. Estas propiedades nos serán útiles a la hora de definir el área del borde de un convexo compacto y al probar la desigualdad isoperimétrica.

**Proposición 2.3.1** *La aplicación  $\text{conv}: (\mathcal{C}^n, \delta) \rightarrow (\mathcal{K}^n, \delta)$  cumple*

$$\delta(\text{conv}(K), \text{conv}(L)) \leq \delta(K, L), \quad \forall K, L \in \mathcal{C}^n.$$

*En particular, es Lipschitziana.*

*Demostración.* Sean  $K, L \in \mathcal{C}^n$ . Como  $K \subset L + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}} \subset \text{conv}(L) + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}}$ , entonces  $\text{conv}(K) \subset \text{conv}[\text{conv}(L) + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}}]$ . Como el conjunto entre corchetes es convexo por la Proposición 1.1.1, tenemos  $\text{conv}(K) \subset \text{conv}(L) + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}}$ . Cambiando los papeles de  $K, L$  obtenemos  $\text{conv}(L) \subset \text{conv}(K) + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}}$ , luego  $\delta(\text{conv}(K), \text{conv}(L)) \leq \delta(K, L)$ .  $\square$

**Proposición 2.3.2** *Las aplicaciones*

$$\begin{aligned} +: \mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n &\rightarrow \mathcal{C}^n & \cup: \mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n &\rightarrow \mathcal{C}^n \\ (K, L) &\mapsto K + L & (K, L) &\mapsto K \cup L \end{aligned}$$

*cumplen:*

1.  $\delta(K + L, \tilde{K} + \tilde{L}) \leq \delta(K, \tilde{K}) + \delta(L, \tilde{L})$ .
2.  $\delta(K \cup L, \tilde{K} \cup \tilde{L}) \leq \max\{\delta(K, \tilde{K}), \delta(L, \tilde{L})\}$ .

*En particular, ambas aplicaciones son continuas.*

*Demostración.* Sean  $K, L \in \mathcal{C}^n$ . Por un lado,

$$(2.15) \quad K \subset \tilde{K} + \delta(K, \tilde{K})\overline{\mathbb{B}}, \quad L \subset \tilde{L} + \delta(L, \tilde{L})\overline{\mathbb{B}}.$$

Así,

$$K + L \subset \tilde{K} + \tilde{L} + \left[ \delta(K, \tilde{K})\overline{\mathbb{B}} + \delta(L, \tilde{L})\overline{\mathbb{B}} \right] \stackrel{(*)}{\subseteq} \tilde{K} + \tilde{L} + \left[ \delta(K, \tilde{K}) + \delta(L, \tilde{L}) \right] \overline{\mathbb{B}},$$

donde en  $(*)$  hemos usado la Proposición 1.1.1 ya que  $\overline{\mathbb{B}}$  es convexo. Intercambiando los papeles de  $K, \tilde{K}$  y de  $L, \tilde{L}$  llegaremos a

$$\tilde{K} + \tilde{L} \subset K + L + \left[ \delta(K, \tilde{K}) + \delta(L, \tilde{L}) \right] \overline{\mathbb{B}},$$

de donde 1 se deduce directamente. En cuanto a 2, de nuevo (2.15) implica

$$K \cup L \subset \left[ \tilde{K} + \delta(K, \tilde{K})\overline{\mathbb{B}} \right] \cup \left[ \tilde{L} + \delta(L, \tilde{L})\overline{\mathbb{B}} \right] \subset (\tilde{K} \cup \tilde{L}) + \max\{\delta(K, \tilde{K}), \delta(L, \tilde{L})\}\overline{\mathbb{B}},$$

y análogamente,

$$\tilde{K} \cup \tilde{L} \subset (K \cup L) + \max\{\delta(K, \tilde{K}), \delta(L, \tilde{L})\}\overline{\mathbb{B}},$$

de donde concluimos 2.  $\square$

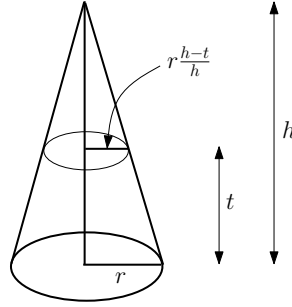
**Nota 2.3.1** Se pueden dar ejemplos que demuestran que la intersección no es una función continua respecto a la distancia de Hausdorff.

**Definición 2.3.1** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ ,  $K$  es medible en el sentido de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ . Así, tiene sentido definir su *volumen* como la medida de Lebesgue de  $K$ :

$$\text{vol}(K) = \text{vol}_n(K) = \int_K dx_1 \dots dx_n \in [0, \infty).$$

En particular,  $\text{vol}(K) > 0$  si y sólo si  $K$  tiene interior no vacío.

En el siguiente lema usaremos el volumen de un cono en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un cono circular recto de altura  $h > 0$  en  $\mathbb{R}^n$  y radio de la base  $r > 0$ . Tras una rotación podemos suponer que la base de  $C$  está contenida en el hiperplano  $\{x_n = 0\}$  y que  $C \subset \{x_n \geq 0\}$ .



Así,

$$\text{vol}(C) = \int_C dx_1 \dots dx_n = \int_0^h \text{vol}_{n-1}(C \cap \{x_n = t\}) dt.$$

Como  $C \cap \{x_n = t\}$  es una bola cerrada  $(n-1)$ -dimensional de radio  $r \frac{h-t}{h}$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$ , tenemos

$$\text{vol}(C) = \int_0^h \text{vol}_{n-1} \left( \mathbb{B}^{n-1} \left( r \frac{h-t}{h} \right) \right) dt = \int_0^h \left( \frac{r(h-t)}{h} \right)^{n-1} \text{vol}_{n-1}(\mathbb{B}^{n-1}(1)) dt.$$

En lo que sigue, llamaremos  $\omega_k$  al volumen de la bola unidad en  $\mathbb{R}^k$ . Así,

$$(2.16) \quad \text{vol}(C) = \left( \frac{r}{h} \right)^{n-1} \omega_{n-1} \int_0^h (h-t)^{n-1} dt = \left( \frac{r}{h} \right)^{n-1} \omega_{n-1} \frac{h^n}{n} = \frac{\omega_{n-1}}{n} r^{n-1} h.$$

**Lema 2.3.1** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  cerrado y convexo, no compacto y con interior no vacío. Entonces,  $\text{vol}(A) = \infty$ .



*Demostración.* Tomemos  $x \in \text{int}(A)$ . Así, existe  $r > 0$  tal que  $\mathbb{B}(x, r) \subset A$ . Como  $A$  es cerrado y no compacto,  $A$  no puede ser acotado luego existe una sucesión  $\{x_m\}_m \subset A$  con  $d(x, x_m) \rightarrow \infty$  si  $m \rightarrow \infty$ . Al ser  $A$  convexo, el cono  $C(x_m, r)$  con vértice  $x_m$  y base el disco de radio  $r$  centrado en  $x$  y ortogonal al segmento  $[x, x_m]$ , cumple  $C(x_m, r) \subset A$ . Como la altura de  $C(x_m, r)$  es  $d(x, x_m)$ , la fórmula (2.16) asegura que

$$\text{vol}(A) \geq \text{vol}(C(x_m, r)) = \frac{\omega_{n-1}}{n} r^{n-1} d(x, x_m) \xrightarrow{(m \rightarrow \infty)} \infty.$$

□

**Lema 2.3.2** Sean  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$  tales que  $K_2 \subset \text{int}(K_1)$ . Entonces, existe  $\alpha > 0$  tal que para todo  $\tilde{K} \in \mathcal{K}^n$  con  $\delta(K_1, \tilde{K}) < \alpha$ , se tiene  $K_2 \subset \tilde{K}$ .

*Demostración.* Consideremos la función soporte  $h_{K_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (Sección 1.7). Dado  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ , el que  $K_2 \subset \text{int}(K_1)$  implica que

$$h_{K_2}(u) = \sup_{a \in K_2} \langle a, u \rangle < \sup_{a \in K_1} \langle a, u \rangle = h_{K_1}(u),$$

luego la función  $h_{K_1} - h_{K_2}: \mathbb{S}^{n-1}(1) \rightarrow \mathbb{R}$  es positiva. Como  $h_{K_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa (Proposición 1.7.1) luego continua (Lema 1.7.1), entonces  $h_{K_1} - h_{K_2}$  es continua en el compacto  $\mathbb{S}^{n-1}(1)$ , y por tanto existe

$$\alpha := \min_{u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)} (h_{K_1} - h_{K_2})(u) > 0.$$

Tomemos  $\tilde{K} \in \mathcal{K}^n$  con  $\delta(K_1, \tilde{K}) < \alpha$ . Dado  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ ,

$$\begin{aligned} h_{K_1}(u) &= \sup_{a \in K_1} \langle a, u \rangle \\ &\leq \sup_{a \in \tilde{K} + \alpha \bar{\mathbb{B}}} \langle a, u \rangle \quad (\text{porque } K_1 \subset \tilde{K} + \alpha \bar{\mathbb{B}}) \\ &\leq \left( \sup_{a \in \tilde{K}} \langle a, u \rangle \right) + \alpha \\ &= h_{\tilde{K}}(u) + \alpha. \end{aligned}$$

De la misma forma, de  $\tilde{K} \subset K_1 + \alpha \bar{\mathbb{B}}$  se deduce que  $h_{\tilde{K}}(u) \leq h_{K_1}(u) + \alpha$ , luego

$$(2.17) \quad |h_{K_1}(u) - h_{\tilde{K}}(u)| \leq \alpha.$$

Finalmente,

$$h_{K_2}(u) = h_{K_1}(u) - (h_{K_1} - h_{K_2})(u) \leq h_{K_1}(u) - \alpha \stackrel{(2.17)}{\leq} h_{\tilde{K}}(u).$$

Como lo anterior es cierto  $\forall u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ , el apartado (5) de la Proposición 1.7.1 implica que  $K_2 \subset \tilde{K}$ .  $\square$

Terminaremos esta sección con el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.1** *La aplicación  $\text{vol}: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$  es continua.*

*Demostración.* Sea  $K \in \mathcal{K}^n$ . Veamos que  $\text{vol}: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$  es continua en  $K$ .

**CASO I:**  $\text{int}(K) = \emptyset$ . Como  $K$  es convexo y con interior vacío, existe un hiperplano  $H \subset \mathbb{R}^n$  que contiene a  $K$  (en caso contrario,  $K$  contendría  $n + 1$  puntos afínmente independientes que forman un símplex  $n$ -dimensional con volumen positivo; pero  $\text{vol}(K) = 0$  al ser  $\text{int}(K) \neq \emptyset$ ).

Tomemos una bola  $n$ -dimensional  $\mathbb{B}(p, r)$  con  $p \in H$  y  $r > 0$  tal que  $K \subset \mathbb{B}(p, r)$ . Tomemos  $\alpha \in (0, r)$  y sea  $K' \in \mathcal{K}^n$  tal que  $\delta(K, K') < \alpha$ . Entonces,

$$K' \subset K + \delta(K, K')\overline{\mathbb{B}} \subset K + \alpha\overline{\mathbb{B}} \subset [\mathbb{B}(p, r) \cap H] + \alpha\overline{\mathbb{B}} \subset C,$$

donde  $C$  es el cilindro en  $\mathbb{R}^n$  de base  $\mathbb{B}(p, r + \alpha) \cap H$  y altura  $2\alpha$  (ver Figura 2.2)

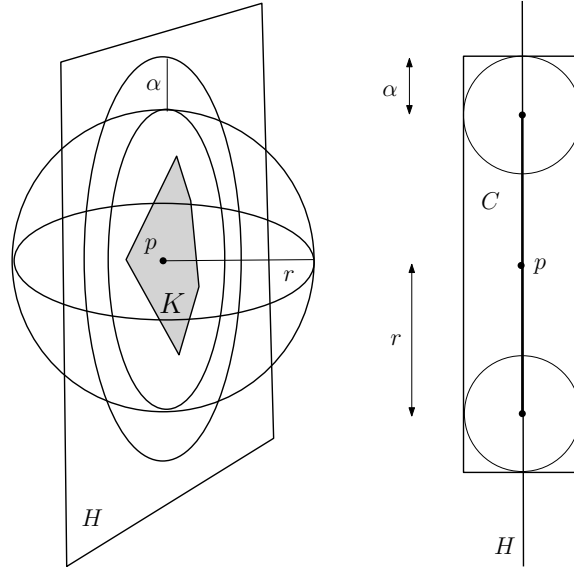


Figura 2.2: En la figura de la derecha, el cilindro  $C$  aparece de perfil.

Así,

$$(2.18) \quad \text{vol}(K') \leq \text{vol}(C) = \text{vol}_{n-1}(\mathbb{B}^{n-1}(r + \alpha))2\alpha = 2\omega_n\alpha(r + \alpha)^{n-1}.$$

Ya podemos ver la continuidad del volumen en  $K$ : Dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $\alpha \in (0, r)$  tal que  $2\omega_n \alpha (r + \alpha)^{n-1} < \varepsilon$ . Dado  $K' \in \mathcal{K}^n$  con  $\delta(K, K') < \alpha$ , (2.18) asegura que  $\text{vol}(K') < \varepsilon$ , luego el volumen  $n$ -dimensional es continuo en  $K$ .

CASO II:  $\text{int}(K) \neq \emptyset$ . Como el volumen es invariante por traslaciones, podemos suponer que  $\vec{0} \in \text{int}(K)$ . Así, podemos encontrar  $\rho > 0$  tal que

$$(2.19) \quad \rho \overline{\mathbb{B}} \subset \text{int}(K).$$

Aplicando el Lema 2.3.2 a  $K_1 = K$  y  $K_2 = \rho \overline{\mathbb{B}}$ , obtenemos un  $\alpha > 0$  tal que

$$(2.20) \quad \forall \tilde{K} \in \mathcal{K}^n \text{ con } \delta(K, \tilde{K}) < \alpha, \text{ se tiene } \rho \overline{\mathbb{B}} \subset \tilde{K}.$$

Con esto ya podemos probar la continuidad del volumen en  $K$ : Sea  $\varepsilon > 0$ . ¿Existe  $\delta > 0$  tal que si  $\delta(K, \tilde{K}) < \delta$  entonces  $|\text{vol}(K) - \text{vol}(\tilde{K})| < \varepsilon$ ? Elegimos  $\lambda > 1$  tal que

$$(2.21) \quad \lambda^n (\lambda^n - 1) \text{vol}(K) < \varepsilon.$$

Es claro que podemos suponer  $0 < \alpha < (\lambda - 1)\rho$  (tomar  $\alpha$  más pequeño no destruye (2.20)). Tomemos  $\tilde{K} \in \mathcal{K}^n$  con  $\delta(K, \tilde{K}) < \alpha$ . Entonces,

$$(2.22) \quad K \subset \tilde{K} + \alpha \overline{\mathbb{B}} \subset \tilde{K} + (\lambda - 1)\rho \overline{\mathbb{B}} \stackrel{(2.20)}{\subset} \tilde{K} + (\lambda - 1)\tilde{K} \stackrel{(\star)}{=} \lambda \tilde{K},$$

donde hemos usando en  $(\star)$  el apartado (3) de la Proposición 1.1.1. Análogamente,

$$(2.23) \quad \tilde{K} \subset K + \alpha \overline{\mathbb{B}} \subset K + (\lambda - 1)\rho \overline{\mathbb{B}} \stackrel{(2.19)}{\subset} K + (\lambda - 1)K \stackrel{(\star)}{=} \lambda K.$$

De (2.22) tenemos

$$(2.24) \quad \text{vol}(K) \leq \text{vol}(\lambda \tilde{K}) = \lambda^n \text{vol}(\tilde{K}),$$

luego

$$(2.25) \quad \text{vol}(K) - \text{vol}(\tilde{K}) \leq (\lambda^n - 1)\text{vol}(\tilde{K}).$$

Y de (2.23) obtenemos

$$(2.26) \quad \text{vol}(\tilde{K}) \leq \text{vol}(\lambda K) = \lambda^n \text{vol}(K),$$

luego

$$(2.27) \quad \text{vol}(K) - \text{vol}(\tilde{K}) \stackrel{(2.25)}{\leq} (\lambda^n - 1)\text{vol}(\tilde{K}) \stackrel{(2.26)}{\leq} (\lambda^n - 1)\lambda^n \text{vol}(K).$$

Ahora cambiamos los papeles de  $K, \tilde{K}$  (el razonamiento no es el mismo):

$$(2.28) \quad \text{vol}(\tilde{K}) - \text{vol}(K) \stackrel{(2.26)}{\leq} \lambda^n \text{vol}(K) - \text{vol}(K) = (\lambda^n - 1)\text{vol}(K) \stackrel{(\lambda > 1)}{<} \lambda^n (\lambda^n - 1)\text{vol}(K).$$

Finalmente, de (2.27) y (2.28) deducimos que  $|\text{vol}(K) - \text{vol}(\tilde{K})| \leq \lambda^n (\lambda^n - 1) \text{vol}(K)$ , lo que termina la demostración sin más que usar (2.21).  $\square$

## 2.4. Resultados de densidad en distancia de Hausdorff

Recordemos que habíamos definido un punto regular  $x \in \partial K$  para un  $K \in \mathcal{K}_0^n$  como aquel en el que el hiperplano soporte de  $K$  en  $x$  es único (Definición 1.8.2), que un politopo es la envolvente convexa de una familia finita de puntos en  $\mathbb{R}^n$  (Definición 1.10.1) y que todo politopo puede verse como una intersección finita de semiespacios cerrados (Teorema 1.10.1). En esta sección veremos que tanto los politopos como los convexos compactos regulares (ver Definición 2.4.1) son densos en  $(\mathcal{K}^n, \delta)$ .

**Teorema 2.4.1** *Dados  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $\varepsilon > 0$ , existe un politopo  $P \in \mathcal{K}^n$  tal que  $P \subset K \subset P + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$  (en particular,  $\delta(K, P) \leq \varepsilon$ ). Por tanto,  $\{P \in \mathcal{K}^n \mid P \text{ es un politopo}\}$  es denso en  $(\mathcal{K}^n, \delta)$ .*

*Demostración.* Consideremos el recubrimiento por abiertos  $\{\mathbb{B}(x, \varepsilon) \mid x \in K\}$ . Por compacidad de  $K$ , existen  $x_1, \dots, x_m \in K$  tales que  $K \subset \cup_{i=1}^m \mathbb{B}(x_i, \varepsilon)$ . Sea  $P$  el politopo  $\text{conv}(\{x_1, \dots, x_m\})$ . Por ser  $K$  convexo, tenemos  $P \subset K$ . Por otro lado,

$$K \subset \cup_{i=1}^m \overline{\mathbb{B}}(x_i, \varepsilon) = \{x_1, \dots, x_m\} + \varepsilon\overline{\mathbb{B}} \subset P + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}.$$

□

**Corolario 2.4.1**  *$(\mathcal{K}^n, \delta)$  es un espacio topológico separable (es decir, admite un subconjunto denso y numerable).*

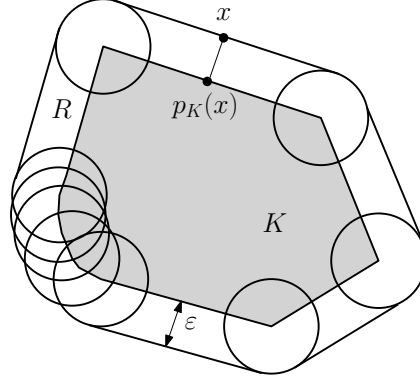
*Demostración.* Basta considerar el conjunto de politopos de la forma  $\text{conv}(\{x_1, \dots, x_m\})$  donde  $m \in \mathbb{N}$  y  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{Q}^n$ , y aplicar el razonamiento en la demostración anterior. □

**Definición 2.4.1** Un convexo  $A \subset \mathbb{R}^n$  se dice *regular* si todo punto  $x \in \partial A$  es regular, es decir, el hiperplano soporte de  $A$  en  $x$  es único (la existencia está asegurada por el Teorema 1.4.1).

**Teorema 2.4.2** *Dados  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $R \subset \mathcal{K}^n$  regular tal que  $K \subset R \subset K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$  (en particular,  $\delta(K, R) \leq \varepsilon$ ). Por tanto,  $\{R \in \mathcal{K}^n \mid R \text{ es regular}\}$  es denso en  $(\mathcal{K}^n, \delta)$ .*

*Demostración.* Sea  $R = \overline{U}(K, \varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, K) \leq \varepsilon\} = K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$  el entorno tubular cerrado de  $K$  de radio  $\varepsilon$ , que es convexo por el apartado (3) de la Proposición 1.1.1. Entonces,  $K \subset R = K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ , luego sólo queda probar que  $R$  es regular:

Por ser  $R$  un cerrado convexo, dado  $x \in \partial R$  el apartado (1) del Teorema 1.4.1 asegura la existencia de un hiperplano soporte de  $R$  en  $x$ . Además, la Proposición 1.2.1 nos



permite considerar la proyección métrica sobre  $K$ ,  $p_K: \mathbb{R}^n \rightarrow K$ . Como  $x \in \partial R = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, K) = \varepsilon\}$ , tenemos  $d(x, p_K(x)) = \varepsilon$ . Ya podemos probar la unicidad del hiperplano soporte de  $R$  en  $x$ : sea  $H \subset \mathbb{R}^n$  un hiperplano soporte de  $R$  en  $x$ : Como  $x \in \partial \mathbb{B}(p_K(x), \varepsilon)$  y  $\overline{\mathbb{B}(p_K(x), \varepsilon)} \subset R$ , entonces  $H$  es un hiperplano soporte de  $\overline{\mathbb{B}(p_K(x), \varepsilon)}$  en  $x$ . Como  $\partial \overline{\mathbb{B}(p_K(x), \varepsilon)} = \mathbb{S}^{n-1}(p_K(x), \varepsilon)$  es una hipersuperficie diferenciable,  $H$  debe ser el hiperplano tangente a  $\mathbb{S}^{n-1}(p_K(x), \varepsilon)$  en  $x$ . Por tanto,  $H$  es único luego  $x$  es un punto regular de  $R$ .  $\square$

**Nota 2.4.1** Si un convexo  $R \subset \mathbb{R}^n$  tiene borde diferenciable, entonces  $R$  es regular (el hiperplano soporte en cualquier  $x \in \partial R$  es el hiperplano tangente a la hipersuperficie diferenciable  $\partial R$ , y por tanto es único). Este argumento es también válido si sólo imponemos que  $\partial R$  sea de clase  $C^1$ . Por otro lado, en la última demostración hemos visto que si  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $\varepsilon > 0$ , entonces  $R := K + \varepsilon \mathbb{B}$  es un convexo regular. En este caso,  $\partial R$  es de clase  $C^{1,1}$ : En efecto, como  $R$  es regular, dado  $x \in \partial R$  tiene sentido el vector normal unitario exterior  $N(x) \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$  a  $R$  en  $x$ , que define una aplicación  $N: \partial R \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}(1)$ . Basta comprobar que  $N$  es de clase  $C^{0,1}$  (Lipschitziana): dado  $x \in \partial R$ , la demostración anterior prueba que el hiperplano soporte de  $R$  en  $x$  coincide con el hiperplano tangente a  $\mathbb{S}^{n-1}(p_K(x), \varepsilon)$  en  $x$ . Por tanto,  $N(x) = \frac{x - p_K(x)}{\|x - p_K(x)\|} = \frac{1}{\varepsilon}(x - p_K(x))$  y dados  $x, y \in \partial R$ ,

$$\|N(x) - N(y)\| = \frac{1}{\varepsilon} \|x - p_K(x) - y + p_K(y)\| \leq \frac{1}{\varepsilon} (\|x - y\| + \|p_K(x) - p_K(y)\|) \stackrel{(*)}{\leq} \frac{2}{\varepsilon} \|x - y\|,$$

donde en  $(*)$  hemos usado el apartado (3) de la Proposición 1.2.2. Por tanto,  $N$  es Lipschitziana, con constante de Lipschitz menor o igual que  $2/\varepsilon$ .

## 2.5. Ejercicios.

1. Calcular la distancia de Hausdorff entre las siguientes parejas  $K, L$  de compactos de  $\mathbb{R}^2$ :

a)  $K = [-1, 2] \times [-1, 2]$ ,  $L = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1)$ .

b)  $K = \overline{\mathbb{B}}((1, 1), 1)$ ,  $L = \overline{\mathbb{B}}((-1, -1), 2)$ .

c)  $K = \text{conv}(\{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\})$ ,  $L = \text{conv}(\{(0, 0), (-1, 0), (-1, 1)\})$ .

2. Sean  $\{p_i^1\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow p^1, \dots, \{p_i^k\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow p^k$  sucesiones convergentes en  $\mathbb{R}^n$ . Probar que la sucesión de politopos  $K_i = \text{conv}(\{p_i^1, \dots, p_i^k\})$  converge en distancia de Hausdorff al politopo  $K = \text{conv}(\{p^1, \dots, p^k\})$ .

3. Encontrar una sucesión de polígonos  $\{P_n\}_n$  en  $\mathbb{R}^2$  cuyo límite en la distancia de Hausdorff sea el disco cerrado unidad.

4. Sean  $K, L \in \mathcal{C}^n$ . Se definen

$$\delta^*(K, L) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid L \subset K + \alpha\overline{\mathbb{B}}\}, \quad \delta_*(K, L) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid K \subset L + \alpha\overline{\mathbb{B}}\}.$$

a) Probar que la distancia de Hausdorff es  $\delta(K, L) = \max\{\delta^*(K, L), \delta_*(K, L)\}$ .

b) Demostrar que  $\delta^*(K, L) = \delta_*(L, K)$ .

c) Probar que  $\delta^*(K, L) = 0$  si y sólo si  $L \subset K$ , y que  $\delta_*(K, L) = 0$  si y sólo si  $K \subset L$ .

d) Probar que  $\delta^*, \delta_*$  satisfacen la desigualdad triangular.

5. Si generalizamos la definición de la distancia de Hausdorff a subconjuntos cualesquiera de  $\mathbb{R}^n$ , encontramos algunas dificultades. Dados  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  definimos

$$d_H(X, Y) = \inf\{\alpha > 0 \mid X \subset Y + \alpha\overline{\mathbb{B}} \text{ e } Y \subset X + \alpha\overline{\mathbb{B}}\}.$$

(Comparar con la Definición 2.1.1).

a) El ínfimo que aparece en  $d_H$  ya no es necesariamente un mínimo: Consideremos los conjuntos  $X = \{1/i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $Y = \{-1/i\}_{i \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}$ . Probar que  $d_H(X, Y) = 1$  y que  $X \not\subset Y + \overline{\mathbb{B}}$ .

b) Probar que el Lema 2.1.1 sigue siendo cierto para  $d_H$  (aunque su demostración no es válida en esta situación más general).

c) Demostrar que  $d_H(X, Y) = 0$  si y sólo si  $\overline{X} = \overline{Y}$  (comparar con lo que ocurre para la distancia de Hausdorff).

d) Probar que  $d_H(X, Y) = d_H(Y, X)$  y que la desigualdad triangular sigue siendo cierta para  $d_H$ . Por tanto,  $d_H$  es una *pseudo-distancia*.

6. Probar que si en  $\mathbb{R}^n$  cambiamos la distancia usual  $d(x, y) = \|x - y\|$  por cualquier otra distancia  $d'$  equivalente a  $d$ , entonces las distancias de Hausdorff  $\delta, \delta'$  asociadas a  $d, d'$  son equivalentes. En este sentido, la *topología* de  $(\mathbb{C}^n, \delta)$  sólo depende de la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ , no de la distancia que la genera.
7. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. En este ejercicio veremos cómo generalizar la distancia de Hausdorff en  $X$ . Consideremos la familia  $\mathcal{C}$  de los subconjuntos no vacíos, cerrados y acotados de  $X$ . Dado  $K \in \mathcal{C}$  y  $\alpha \geq 0$ , denotaremos por  $K_\alpha = \{x \in X \mid d(x, K) \leq \alpha\}$ . Así,  $K_\alpha \in \mathcal{C}, \forall K \in \mathcal{C}, \alpha \geq 0$ . Probar que definiendo

$$\delta(K, L) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid K \subset L_\alpha \text{ y } L \subset K_\alpha\}, \quad K, L \in \mathcal{C},$$

se define una distancia en  $\mathcal{C}$ , llamada la distancia de Hausdorff.

8. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. En este ejercicio generalizaremos el Teorema 2.1.1, probando que  $(\mathcal{C}, \delta)$  es un espacio métrico completo, donde  $\mathcal{C}, \delta$  se definieron en el Ejercicio 7. Tomemos una sucesión  $\{K_m\}_m$  de Cauchy en  $(\mathcal{C}, \delta)$ . Basta probar que  $\{K_m\}_m$  admite una parcial  $\delta$ -convergente.

- a) Probar que existe una parcial  $\{K_{m(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{K_m\}_m$  tal que  $\delta(K_{m(k)}, K_{m(k+1)}) < 2^{-k} \forall k \in \mathbb{N}$ . En lo que sigue, volveremos a llamar  $\{K_m\}_m$  a esta parcial, para no complicar más la notación, y probaremos que  $\{K_m\}_m$  es  $\delta$ -convergente a un elemento de  $\mathcal{C}$ . Por tanto,

$$(2.29) \quad \delta(K_m, K_{m+1}) < 2^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

- b) Fijemos  $x_1 \in K_1$ . Usar la condición (2.29) para probar que  $\forall m \geq 2$ , existe  $x_m \in K_m$  tal que  $d(x_m, x_{m+1}) < 2^{-m} \forall m \in \mathbb{N}$ . Deducir de la completitud de  $(X, d)$  que  $\{x_m\}_{m \geq 1}$  converge a un elemento  $x \in X$ . Usar la desigualdad triangular para demostrar que

$$(2.30) \quad d(x_m, x) \leq 2^{-m+1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

- c) Definimos

$$A = \left\{ x \in X \mid \forall m \in \mathbb{N}, \exists x_m \in K_m \text{ con } d(x_m, x_{m-1}) < 2^{-m}, \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x \right\},$$

que es no vacío por el apartado 8b. Usar (2.30) para probar que

$$(2.31) \quad A \subset (K_m)_{2^{-m+1}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Concluir que  $A$  es acotado en  $(X, d)$  y que  $\bar{A} \in \mathcal{C}$ .

76CAPÍTULO 2. DISTANCIA DE HAUSDORFF Y  $T^a$  DE SELECCIÓN DE BLASCHKE

- d) Sea  $\varepsilon > 0$ . Usar (2.31) para probar que existe  $m_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $\bar{A} \subset (K_m)_\varepsilon$ ,  $\forall m \geq m_1$ .
- e) Sea  $y_m \in K_m$ . Usar el procedimiento del apartado 8b para producir una sucesión  $\{y_h\}_{h \geq m}$  con  $y_h \in K_h$  y  $d(y_h, y_{h+1}) < 2^{-h} \forall h \geq m$ , de forma que  $\{y_h\}_{h \geq m}$  converge en  $(X, d)$  a un elemento  $y_\infty \in A$ , que cumplirá  $d(y_h, y_\infty) \leq 2^{-h+1} \forall h \geq m$  por (2.30). Concluir que  $d(y_m, A) \leq 2^{-m+1}$ .
- f) Sea  $\varepsilon > 0$ . Usar el apartado 8e para probar que  $\exists m_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $K_m \subset (\bar{A})_\varepsilon$ ,  $\forall m \geq m_2$ . Deducir de esto y del apartado 8d que  $\{K_m\}_m$  converge a  $\bar{A}$  en  $(\mathcal{C}, \delta)$ . Por tanto,  $(\mathcal{C}, \delta)$  es completo.



## Capítulo 3

# La desigualdad isoperimétrica

### 3.1. Area del borde de una hipersuperficie compacta en $\mathbb{R}^n$

La desigualdad isoperimétrica clásica relaciona el volumen  $n$ -dimensional de un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con el área (volumen  $(n - 1)$ -dimensional) de su borde  $\partial\Omega$ . La primera dificultad que encontramos es cómo definir este área si  $\partial\Omega$  no es una hipersuperficie diferenciable. Estudiaremos a continuación un proceso para calcular  $\text{area}(\partial\Omega)$  en el caso diferenciable, que podrá extenderse al caso en que  $\bar{\Omega}$  sea un compacto convexo de  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable compacta, encerrando una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Sea  $N: \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$  la aplicación de Gauss de  $\Sigma$  exterior a  $\Omega$ . La *superficie paralela* a distancia  $t > 0$  de  $\Sigma$  es

$$\Sigma_t = \{p + tN_p \mid p \in \Sigma\},$$

que encierra (para  $t > 0$  próximo a cero) una región  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ .

**Lema 3.1.1** *En la situación anterior,  $\frac{d}{dt}\big|_0 \text{vol}(\Omega_t) = \text{area}(\Sigma)$ .*

*Demostración.* Consideremos el campo diferenciable  $X_p = p$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}^3$ . Aplicando el Teorema de la divergencia en  $\Omega$ ,

$$3\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} \text{div}(X) dV = \int_{\Sigma} \langle p, N \rangle dA,$$

donde  $dV = dx dy dz$  es el elemento de volumen estándar en  $\mathbb{R}^3$  y  $dA$  el elemento de área en  $\Sigma$ . Aplicando la misma fórmula a  $\Omega_t$ , tenemos

$$(3.1) \quad 3\text{vol}(\Omega_t) = \int_{\Sigma_t} \langle p_t, N_t \rangle dA_t,$$

donde el subíndice  $\bullet_t$  hace referencia a que todo está calculado en la geometría de  $\Sigma_t$ . Ahora, consideremos la aplicación  $\psi_t: \Sigma \rightarrow \Sigma_t$ ,  $\psi_t(p) = p + tN_p$ , que es un difeomorfismo para  $|t|$  suficientemente pequeño. Además, si  $p \in \Sigma$  y  $v \in T_p\Sigma$ ,

$$(d\psi_t)_p(v) = v + t dN_p(v) = v - tA_p v,$$

donde  $A_p$  es el endomorfismo de Weingarten de  $\Sigma$  asociado a  $N$ . Si  $e_1, e_2$  son direcciones principales en  $p$  con curvaturas principales  $k_1, k_2$  asociadas a  $N$ , entonces  $(d\psi_t)_p(e_i) = (1 - tk_i)e_i$ ,  $i = 1, 2$ , de donde deducimos que

$$T_{\psi_t(p)}\Sigma_t = T_p\Sigma, \quad \text{y } N_t \circ \psi_t = N.$$

Por tanto, (3.1) se escribe

$$(3.2) \quad 3\text{vol}(\Omega_t) = \int_{p_t \in \psi_t(\Sigma)} \langle p_t, (N_t)(p_t) \rangle dA_t = \int_{p \in \Sigma} \langle p + tN_p, N_p \rangle (\psi_t^* dA_t).$$

Por otro lado,  $(\psi_t^* dA_t)_p(e_1, e_2) = (dA_t)_{\psi_t(p)}((d\psi_t)_p(e_1), (d\psi_t)_p(e_2)) = (1 - tk_1)(1 - tk_2) = 1 - 2tH(p) + t^2K(p)$ , donde  $H$  es la curvatura media asociada a  $N$  y  $K$  la curvatura de Gauss. Así, (3.2) se reescribe

$$(3.3) \quad 3\text{vol}(\Omega_t) = \int_{\Sigma} (\langle p, N \rangle + t)(1 - 2tH + t^2K) dA.$$

Derivando (3.3) en  $t = 0$ :

$$(3.4) \quad 3 \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{vol}(\Omega_t) = \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 [(\langle p, N \rangle + t)(1 - 2tH + t^2K)] dA = \int_{\Sigma} dA - 2 \int_{\Sigma} \langle p, N \rangle H dA.$$

Por otro lado, consideremos el campo diferenciable sobre  $\Sigma$   $p^T = p - \langle p, N \rangle N$ ,  $p \in \Sigma$ . La divergencia de este campo es

$$\begin{aligned} [\text{div}_{\Sigma}(p^T)](p) &= \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{e_i}(p^T), e_i \rangle && (\nabla = \text{conexión de Levi-Civita de } \Sigma) \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle D_{e_i}(p^T), e_i \rangle && (D = \text{conexión de Levi-Civita de } \mathbb{R}^3) \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle D_{e_i}(p - \langle p, N \rangle N), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle e_i - e_i(\langle p, N \rangle)N - \langle p, N \rangle D_{e_i}N, e_i \rangle \\ &= 2 - \langle p, N \rangle \sum_{i=1}^2 \langle D_{e_i}N, e_i \rangle \\ &= 2 + 2\langle p, N \rangle H. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de La Divergencia en  $\Sigma$ , tenemos

$$(3.5) \quad 0 = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(p^T) dA = \int_{\Sigma} (2 + 2\langle p, N \rangle H) dA = 2 \int_{\Sigma} dA + 2 \int_{\Sigma} \langle p, N \rangle H dA.$$

Finalmente, de (3.4) y (3.5) tenemos

$$3 \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \operatorname{vol}(\Omega_t) = \int_{\Sigma} dA - 2 \int_{\Sigma} \langle p, N \rangle H dA = 3 \int_{\Sigma} dA = 3 \operatorname{area}(\Sigma).$$

□

El Lema 3.1.1 justifica que definamos el área de un compacto convexo  $A \subset \mathbb{R}^n$  de la siguiente forma: consideremos para  $t \geq 0$  el conjunto  $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq t\}$ . Si existiera el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\operatorname{vol}(A_t) - \operatorname{vol}(A)),$$

entonces ésta sería una buena definición para el área de  $\partial A$ . Probaremos en la siguiente sección que la función  $t \geq 0 \mapsto \operatorname{vol}(A_t)$  es un polinomio de grado  $n$  (relacionar con (3.3)), con lo que el límite anterior tendrá sentido. Esta propiedad se demostrará primero para polítopos y luego es extenderá por densidad a conjuntos convexos compactos cualesquiera.

## 3.2. Estructura de caras en un convexo

**Definición 3.2.1** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo. Un subconjunto  $F \subset A$  se dice una *cara* de  $A$  si:

1.  $F$  es convexo.
2. Para todo segmento  $[x, y] \subset A$  tal que  $(x, y) \cap F \neq \emptyset$ , se tiene que  $[x, y] \subset F$ .

La dimensión de la cara  $F$  de  $A$  es la dimensión de  $F$  como convexo, es decir,  $\dim F = \dim \operatorname{aff}(F)$ .

Por ejemplo, si  $A = \operatorname{conv}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) \subset \mathbb{R}^3$  con  $x_1, \dots, x_4$  puntos afínmente independientes, entonces las caras de  $A$  son:

- De dimensión 3:  $A$ .
- De dimensión 2:  $\operatorname{conv}(\{x_i, x_j, x_k\})$ , con  $1 \leq i < j < k \leq 4$  (4 caras).
- De dimensión 1:  $\operatorname{conv}(\{x_i, x_j\})$ , con  $1 \leq i < j \leq 4$  (6 caras 1-dim = aristas).
- De dimensión 0:  $\{x_i\}$ , con  $1 \leq i \leq 4$  (4 caras 0-dim = vértices).

Veamos algunas propiedades sencillas asociadas a esta definición.

**Proposición 3.2.1** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un convexo.*

- (1) *Si  $\text{int}(A) \neq \emptyset$ , entonces  $\dim(A) = n$  y  $A$  es la única cara  $n$ -dimensional de  $A$ .*
- (2) *Las caras 0-dimensionales de  $A$  son los puntos extremos de  $A$  (ver Definición 1.6.1).*

*Demostración.* Para el apartado (1), como  $\text{int}(A) \neq \emptyset$  entonces  $\dim A = \dim \text{aff}(A) = n$  luego  $A$  es trivialmente una cara  $n$ -dimensional de  $A$ . En cuanto a la unicidad, si  $F \subset A$  es una cara  $n$ -dimensional de  $A$ , entonces al ser  $\dim(F) = n$  existirá un punto  $x_0 \in \text{rel int}(F)$  (ver Definición 1.3.1). Así, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathbb{B}(x_0, \varepsilon) \subset F$ . Veamos que  $A \subset F$  y habremos terminado: sea  $x \in A$ . Aplicando la condición 2 de la definición de cara a  $[x, x_0]$ , obtenemos que  $[x, x_0] \subset F$  luego en particular,  $x \in F$ .

Veamos el apartado (2): Si  $x_0 \in A$  es un punto extremo de  $A$ , entonces la condición 1 de cara se da trivialmente, y la condición 2 se cumple de forma vacía. Así que  $\{x_0\}$  es una cara de  $A$ , cuya dimensión es evidentemente cero. Recíprocamente, supongamos que  $F \subset A$  es una cara 0-dimensional de  $A$ . Así,  $F$  se reduce a un punto  $x_0 \in A$ . Si vemos que  $x_0$  es un punto extremo de  $A$  habremos terminado. Por reducción al absurdo, si  $x_0$  no es un punto extremo de  $A$  entonces existen  $x_1, x_2 \in A$  tales que  $x_0 \in (x_1, x_2)$ . Por la condición 2 de cara para  $F = \{x_0\}$ , se tiene  $[x_1, x_2] \subset F = \{x_0\}$ , lo que es imposible.  $\square$

**Lema 3.2.1** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo, y  $x \in A - \text{extr}(A)$ . Entonces,*

$$(3.6) \quad F := \bigcup_{\substack{I \subset A \text{ segmento} \\ x \in \text{rel int}(I)}} I = \bigcup_{x_1, x_2 \in A \mid x \in (x_1, x_2)} [x_1, x_2]$$

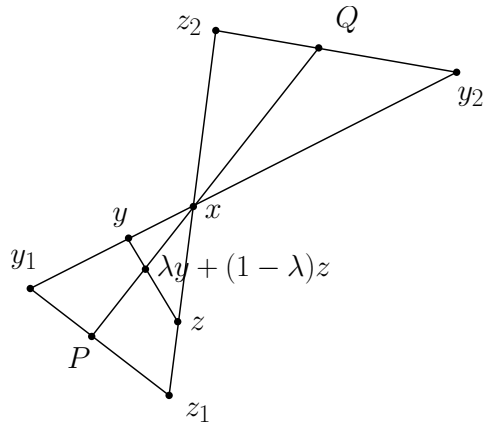
*es una cara de  $A$  y  $x \in \text{rel int}(F)$ .*

*Demostración.* Notemos que  $F$  es no vacío porque  $x$  no es un punto extremo de  $A$  (luego existen  $x_1, x_2 \in A$  tales que  $x \in (x_1, x_2)$ ). Veamos que  $F$  es convexo: Sean  $y, z \in F$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Como  $y \in F$ , existen  $y_1, y_2 \in A$  tales que  $y \in [y_1, y_2]$  y  $x \in (y_1, y_2)$ . Análogamente, como  $z \in F$  existen  $z_1, z_2 \in A$  tales que  $z \in [z_1, z_2]$  y  $x \in (z_1, z_2)$ . Consideremos los segmentos  $[y_1, z_1], [y_2, z_2] \subset A$ . Sean

$$\begin{aligned} P &= [y_1, z_1] \cap (\text{recta que pasa por } x, \lambda y + (1 - \lambda)z), \\ Q &= [y_2, z_2] \cap (\text{recta que pasa por } x, \lambda y + (1 - \lambda)z). \end{aligned}$$

Por ser  $A$  convexo,  $[P, Q] \subset A$ . Como  $x \in (P, Q)$  y  $\lambda y + (1 - \lambda)z \in [P, Q]$ , tenemos  $\lambda y + (1 - \lambda)z \in F$  luego  $F$  es convexo.

Veamos ahora que  $F$  cumple la propiedad 2 de la definición de cara de  $A$  (Definición 3.2.1). Sea  $[y_1, y_2] \subset A$  tal que existe  $z \in (y_1, y_2) \cap F$ . Veamos que  $[y_1, y_2] \subset F$ : Como  $z \in F$ , existen  $z_1, z_2 \in A$  tales que  $z \in [z_1, z_2]$  y  $x \in (z_1, z_2)$ . Tenemos ahora dos opciones:



- $x = z$ . Entonces,  $x \in \text{rel int}([y_1, y_2])$  luego por definición de  $F$ ,  $[y_1, y_2] \in F$ .
- $x \neq z$ . En este caso, consideramos el cuadrilátero cerrado bidimensional

$$C = \text{conv}([y_1, y_2] \cup [z_1, z_2]).$$

Así,  $x \in \text{rel int}(C)$ .

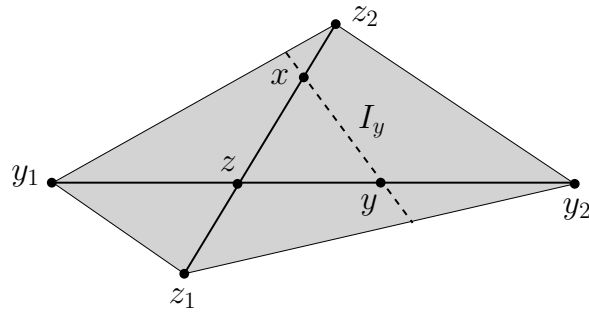


Figura 3.1: El cuadrilátero  $C$  de vértices  $y_1, y_2, z_1, z_2$ .

Si ahora tomamos  $y \in [y_1, y_2]$ , entonces el segmento  $I_y$  obtenido al cortar la recta que pasa por  $x$  e  $y$  con  $C$  cumple  $I_y \subset F$  (ya que  $x \in \text{rel int}(I_y)$  y por definición de  $F$ ). Como  $y \in I_y$ , concluimos que  $y \in F$  luego  $[y_1, y_2] \subset F$ .

Por tanto,  $F$  definida por (3.6) es una cara de  $A$ . Finalmente, veamos que  $x \in \text{rel int}(F)$ . Por definición de  $\text{aff}(F)$ , existen puntos  $x_1, \dots, x_k \in F$  afínmente independientes, de forma

que  $\text{aff}(F) = \text{aff}(\{x_1, \dots, x_k\})$ . Como cada  $x_i$  está en  $F$ , por definición existe  $[y_i, z_i] \subset A$  y tal que  $x \in (y_i, z_i)$ ,  $x_i \in [y_i, z_i]$ . Consideremos el politopo  $P = \text{conv}(\{y_1, z_1, \dots, y_k, z_k\})$ , que está contenido en  $F$  por ser  $F$  convexo. Como  $x \in (y_i, z_i) \forall i$ , tenemos que  $x$  está en la intersección de todas las “diagonales”  $(y_i, z_i)$  de  $P$ . En particular,  $x$  está en  $\text{rel int}(P)$ , que a su vez está contenido en  $\text{rel int}(F)$ .  $\square$

**Proposición 3.2.2** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo, y  $\mathcal{F}_A = \{F \subset A \mid F \text{ es una cara de } A\}$ . Entonces,  $\{\text{rel int}(F) \mid F \in \mathcal{F}_A\}$  es una partición de  $A$ .*

*Demostración.* Sean  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_A$  y  $x \in \text{rel int}(F_1) \cap \text{rel int}(F_2)$ . Veamos que  $F_1 = F_2$ : Sea  $y \in F_1$ . Como  $x \in \text{rel int}(F_1)$ , existe un radio  $r > 0$  tal que la bola  $m$ -dimensional  $\mathbb{B}^m(x, r) \subset \text{aff}(F_1)$  está contenida en  $F_1$ , donde  $m = \dim(F_1)$ . Como  $x, y \in F_1$  y  $F_1$  es convexo (por ser cara de  $A$ ), entonces  $[x, y] \subset F_1$ . Prolongamos  $[x, y]$  hasta un  $z \in \mathbb{B}^m(x, r) - \{x\}$ , es decir tal que  $x \in (y, z)$ . Como  $[y, z] \in A$ ,  $x \in (y, z) \cap F_2$  y  $F_2$  es una

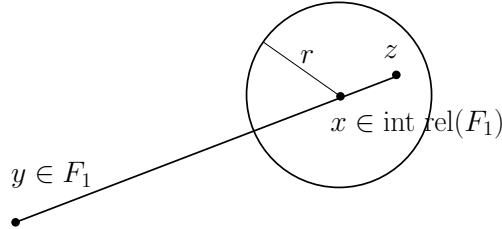


Figura 3.2: Expresando  $x \in \text{rel int}(F_1)$  como punto intermedio entre  $y \in F_1$  y algún punto de la bola  $m$ -dimensional  $\mathbb{B}^m(x, r) \subset F$ .

cara de  $A$ , entonces  $[y, z] \subset F_2$  luego  $y \in F_2$ . Como  $y \in F_1$  es arbitrario, tenemos  $F_1 \subset F_2$ . Análogamente se prueba que  $F_2 \subset F_1$  luego se tiene la igualdad.

Sea  $x \in A$ . Debemos encontrar una cara  $F \in \mathcal{F}_A$  tal que  $x \in \text{rel int}(F)$ . Tenemos dos posibilidades:

- $x$  es un punto extremo de  $A$ . Por el apartado (2) de la Proposición 3.2.1,  $\{x\}$  es una cara 0-dimensional de  $A$ . Como  $x \in \text{rel int}(\{x\})$ , hemos terminado en este caso.
- $x \in A - \text{extr}(A)$ . En este caso, el Lema 3.2.1 asegura que  $F$  definida por (3.6) es una cara de  $A$  y  $x \in \text{rel int}(A)$ .

$\square$

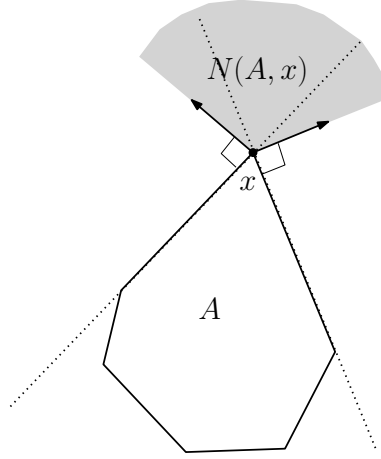


Figura 3.3: Cono normal en  $x \in \partial A$  para un convexo  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Las dos rectas con líneas de puntos son hiperplanos soporte de  $A$  en  $x$ , y los vectores son normales y exteriores a estos dos hiperplanos. La región sombreada (cerrada) es  $x + N(A, x)$ , donde  $N(A, x)$  es el cono normal a  $A$  en  $x$ .

**Definición 3.2.2** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexo y  $x \in \partial A$ . Se define el *cono normal* a  $A$  en  $x$  como

$$N(A, x) = \{u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \mid u \text{ es vector normal exterior a } A \text{ en } x\} \cup \{\vec{0}\}.$$

**Lema 3.2.2** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un convexo y  $x \in \partial A$ . Entonces,  $N(A, x)$  es un cerrado convexo y es un cono, en el sentido del Lema 1.7.2.

*Demostración.* Empezaremos viendo que  $A$  es cerrado. Sea  $\{u_k\}_k \subset N(A, x)$  convergiendo a  $u_\infty \in \mathbb{R}^n$ . Si  $u_\infty = \vec{0}$ , entonces  $u_\infty \in N(A, x)$  y hemos terminado. Así que podemos suponer  $u_\infty \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ , lo cual implica que  $u_k \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  a partir de un natural (supondremos que esto se cumple  $\forall k$ ). Por tanto,  $u_k$  es un vector normal exterior a  $A$  en  $x$ , luego existe un hiperplano soporte  $H_{u_k, \alpha_k} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, u_k \rangle = \alpha_k\}$  de  $A$  en  $x$ , con  $A \subset H_{u_k, \alpha_k}^-$ . Como  $x \in H_{u_k, \alpha_k}$ , entonces  $\alpha_k = \langle x, u_k \rangle$ , que converge a  $\alpha_\infty := \langle x, u_\infty \rangle$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Si vemos que  $H_{u_\infty, \alpha_\infty}$  es un hiperplano soporte de  $A$  en  $x$  podremos concluir que  $u_\infty \in N(A, x)$  y habremos terminado. Que  $H_{u_\infty, \alpha_\infty}$  sea un hiperplano soporte de  $A$  en  $x$  viene implicado por las dos condiciones siguientes:

- $x \in A \cap H_{u_\infty, \alpha_\infty}$ : esto se deduce de la definición de  $\alpha_\infty$ .
- $A \subset H_{u_\infty, \alpha_\infty}^-$ : Esto equivale a probar que  $\langle a, u_\infty \rangle \leq \alpha_\infty \forall a \in A$ , lo cual es consecuencia de  $\langle a, u_k \rangle \leq \alpha_k$  tras tomar límites cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Que  $N(A, x)$  es un cono equivale a probar que si  $u \in N(A, x)$  y  $\lambda \geq 0$ , entonces  $\lambda u \in N(A, x)$ . Esto es trivial a partir de la definición de  $N(A, x)$ .

A continuación probaremos que  $N(A, x)$  es convexo: sean  $u_1, u_2 \in N(A, x)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Debemos comprobar que  $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in N(A, x)$ . Si  $u_1 = \vec{0}$  o  $u_2 = \vec{0}$ , esto es trivial. Supongamos que ambos vectores son no nulos. Así,  $A \subset H_i^- := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - x, u_i \rangle \leq 0\}$ ,  $i = 1, 2$ . Dado  $y \in H_1^- \cap H_2^-$ , se tiene

$$\langle y - x, \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \rangle = \lambda \langle y - x, u_1 \rangle + (1 - \lambda) \langle y - x, u_2 \rangle \leq 0,$$

luego  $A \subset H_1^- \cap H_2^- \subset H_\lambda^- := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - x, \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \rangle \leq 0\}$ , de donde obtenemos que  $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in N(A, x)$  y  $N(A, x)$  es convexo.  $\square$

En la Definición 3.2.2 habíamos exigido  $x \in \partial A$ . Podemos extender la definición al caso  $x \in \text{int}(A)$  con  $N(A, x) = \{\vec{0}\}$ , con lo que el Lema 3.2.1 se sigue cumpliendo trivialmente.

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un convexo. Por la Proposición 3.2.2, si definimos

$$A^r = \bigcup_{\substack{\text{Fcara de } A \\ \dim F=r}} \text{int rel } (F),$$

entonces  $\{A^0, A^1, \dots, A^k\}$  es una partición de  $A$ , donde  $k = \dim A$ .

**Lema 3.2.3** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un convexo. Entonces:*

- (1) *Para cada  $x \in A^r$ , la dimensión del convexo  $N(A, x)$  es a lo más  $n - r$ .*
- (2) *Si  $F$  es una cara de  $A$  y  $x, y \in \text{rel int}(F)$ , entonces  $N(A, x) = N(A, y)$ .*

*Demostración.* Para el apartado (1), tomemos  $x \in A^r$ . Así, existe una cara  $r$ -dimensional  $F$  de  $A$  tal que  $x \in \text{rel int}(F)$ .

- (1.1) Si  $r = n$ , entonces  $x$  es interior a  $F$  en  $\mathbb{R}^n$ . Esto nos dice que  $\text{int}(A) \neq \emptyset$ , luego por el apartado (1) de la Proposición 3.2.1,  $A$  es la única cara  $n$ -dimensional de  $A$ . Por tanto,  $F = A$  y  $x \in \text{int}(A)$ . Esto lleva a  $N(A, x) = \{\vec{0}\}$ , con lo que  $\dim N(A, x) = 0 = n - n$ .

- (1.2) Supongamos ahora que  $r < n$  (en particular,  $x \in \partial A$ ). Sea  $\overrightarrow{\text{aff}(F)}$  la variedad de dirección de  $\text{aff}(F)$ . Si vemos que

$$(3.7) \quad N(A, x) \subset \left[ \overrightarrow{\text{aff}(F)} \right]^\perp,$$

entonces habremos terminado, tomando dimensiones.



- Si  $x$  es un punto extremo de  $A$ , entonces la Proposición 3.2.1 asegura que  $\{x\}$  es una cara 0-dimensional de  $A$  luego  $F = \{x\}$ . Por tanto,  $\left[\overrightarrow{\text{aff}(F)}\right]^\perp = \{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^n$ , que contiene a  $N(A, x)$  trivialmente.
- Si  $x \in A - \text{extr}(A)$ , podemos aplicar el Lema 3.2.1 para concluir que la cara  $F$  de  $A$  que contiene a  $x$  viene dada por (3.6). Sea  $u \in N(A, x) - \{\vec{0}\}$ . Por definición de cono normal, existe un hiperplano soporte  $H = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, u \rangle = \alpha\}$  de  $A$  en  $x$  de forma que  $A \subset H^-$ . Veamos que

$$(3.8) \quad \langle z, u \rangle = \alpha, \quad \forall z \in F.$$

En efecto, como  $H$  es un hiperplano soporte de  $A$  en  $x$ , es  $x \in H$ . Si  $I \subset A$  es un segmento contenido en  $F$ , entonces  $x \in \text{rel int}(I)$  luego  $\langle z, u \rangle = \alpha$  a lo largo de  $I$  porque en caso contrario,  $I$  sería transversal a  $H$  en  $x$  lo que contradiría que  $A \subset H^-$ . Esto prueba (3.8). Finalmente, de (3.8) tenemos que  $\langle v, u \rangle = 0$ ,  $\forall v \in \overrightarrow{\text{aff}(F)}$ , de donde deducimos (3.7) en este caso. Esto prueba (1).

En cuanto a (2), sea  $F$  una cara de  $A$  y  $x, y \in \text{rel int}(F)$ . Si  $\dim(F) = n$  entonces  $F = A$  luego  $N(A, z) = \{\vec{0}\} \forall z \in \text{int}(A)$  y no hay nada que probar en este caso. Supongamos ahora que  $\dim F = r < n$ . Sea  $u \in N(A, x) - \{\vec{0}\}$ . Por definición de cono normal, existe un hiperplano soporte  $H = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, u \rangle = \alpha\}$  de  $A$  en  $x$  de forma que  $A \subset H^-$ . Si vemos que  $H$  también es hiperplano soporte de  $A$  en  $y$  tendremos  $u \in N(A, y)$  luego  $N(A, x) \subset N(A, y)$  y habremos terminado (el recíproco es análogo cambiando los papeles de  $x, y$ ). Como  $A \subset H^-$ , sólo hay que probar que  $y \in H$ , es decir  $\langle y, u \rangle = \alpha$ . Esto se probó en (3.8), que es aplicable ahora.  $\square$

**Nota 3.2.1** En general no es verdad que  $\dim N(A, x) = n - r$  siendo  $x \in A^r$ : tomemos  $A = \mathbb{B}$  y  $x \in \partial A$ . Entonces,  $\{x\}$  es una cara 0-dimensional de  $A$  pero  $\dim N(A, x) = 1$ . Sin embargo, este comportamiento no es posible en politopos, como veremos a continuación.

**Lema 3.2.4** Sea  $P \subset \mathbb{R}^n$  es un politopo y  $x \in P^r$ , entonces  $\dim N(P, x) = n - r$ .

*Demostración.* Sea  $F$  la única cara  $r$ -dimensional de  $P$  tal que  $x \in \text{rel int}(F)$ . Si  $r = n$ , entonces  $x \in \text{int}(A)$  luego  $N(P, x) = \{\vec{0}\}$  y la igualdad a probar es trivial. Supongamos en lo que sigue que  $r < n$ .

Como  $P$  es un politopo,  $P$  es intersección finita de semiespacios cerrados: existen  $H_1, \dots, H_k \subset \mathbb{R}^n$  hiperplanos tales que  $P = H_1^- \cap \dots \cap H_k^-$ . Como  $x \in \partial P$  (porque  $\dim F = r < n$ ),  $x$  estará en alguno de los hiperplanos anteriores. Reordenando, podemos suponer

$$x \in H_1 \cap \dots \cap H_s, \text{ siendo } s \leq k, \text{ y } x \notin H_j \text{ para todo } j = s + 1, \dots, k.$$

Cada  $H_i$  será de la forma  $\{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, u_i \rangle = \alpha_i\}$ , donde para cada  $i$ ,

$$(3.9) \quad u_i \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \text{ es el vector normal unitario exterior a } P \text{ en } x.$$

Veamos que  $F' = P \cap (H_1 \cap \dots \cap H_s)$  es una cara de  $P$ :  $F'$  es convexo, por ser intersección no vacía de convexos. Sea  $[y_1, y_2] \subset P$  un segmento tal que  $(y_1, y_2) \cap F' \neq \emptyset$ . Debemos probar que  $[y_1, y_2] \subset F'$ : Para ello, basta probar que  $[y_1, y_2] \subset H_i \forall i = 1, \dots, s$ . Fijamos  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Entonces,  $(y_1, y_2) \cap F' \subset (y_1, y_2) \cap H_i$  y  $P \subset H_i^-$  luego  $[y_1, y_2]$  no puede ser transversal a  $H_i$ , de donde  $[y_1, y_2] \subset H_i$ . Por tanto,  $F'$  es una cara de  $P$ .

Notemos que  $x \in F' \subset \text{aff}(F')$  y  $x \in \text{int}(F)^{\text{aff}(F)} = \text{int}(F)^{H_1 \cap \dots \cap H_s}$ , ya que en caso contrario  $x$  estará en el borde de  $F$  en la topología inducida de  $H_1 \cap \dots \cap H_s$ , luego existirá  $j \in \{s+1, \dots, k\}$  tal que  $x \in H_j$ , contradicción. Como los interiores relativos de las caras de  $P$  forman una partición de  $P$  y  $x \in \text{int rel}(F) \cap \text{int rel}(F')$ , deducimos que  $F = F'$  luego  $\text{aff}(F) = H_1 \cap \dots \cap H_s$ . Finalmente,

$$\begin{aligned} r &= \dim \text{aff}(F) = \dim(H_1 \cap \dots \cap H_s) = \dim(\langle u_1 \rangle^\perp \cap \dots \cap \langle u_s \rangle^\perp) = \dim(\langle u_1, \dots, u_s \rangle^\perp) \\ &= n - \dim \langle u_1, \dots, u_s \rangle, \end{aligned}$$

luego existen  $n - r$  vectores linealmente independientes en el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $u_1, \dots, u_s$ . Reordenando, podemos suponer que estos vectores linealmente independientes son  $u_1, \dots, u_r$ . Como cada uno de estos  $u_i$  está en  $N(P, x)$  por (3.9), se tiene  $\dim N(P, x) \geq n - r$ . La igualdad se deduce del apartado (1) del Lema 3.2.3.  $\square$

### 3.3. Volumen del $\varepsilon$ -entorno de un politopo

A lo largo de esta sección dado  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $\varepsilon \geq 0$ , denotaremos por

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, P) \leq \varepsilon\}$$

al entorno tubular de  $K$  de radio  $\varepsilon$ .

Consideremos un politopo  $P \in \mathcal{K}^n$ . A continuación calcularemos el volumen de  $P_\varepsilon$ , y comprobaremos que  $\varepsilon \geq 0 \mapsto \text{vol}(P_\varepsilon)$  es un polinomio de grado  $n$ . Para entender la estrategia, veamos lo que ocurre si  $P \in \mathcal{K}^2$ : En este caso,  $P$  es un polígono compacto y convexo de  $\mathbb{R}^2$ , con caras 1-dimensionales (aristas) y 0-dimensionales (vértices) en su borde.

Para producir  $P_\varepsilon$ , añadimos a  $P$  una cantidad finita de recintos, de dos tipos distintos:

- Rectángulos de base las aristas de  $P$  y altura  $\varepsilon$ . El área de cada uno de estos rectángulos puede calcularse a partir de la longitud de la correspondiente arista  $F$  de  $P$ , multiplicada por la “altura”  $\varepsilon$ . Pero  $\text{longitud}(F) = \text{vol}_1(F)$  (volumen de Lebesgue

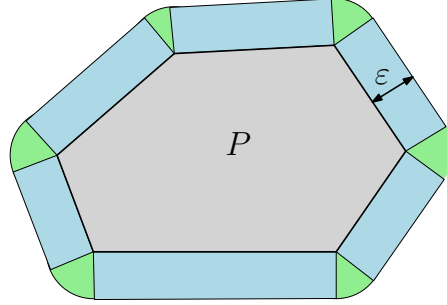


Figura 3.4: El  $\varepsilon$ -entorno tubular de un polígono  $P \in \mathcal{K}^2$ , compuesto de rectángulos de base las aristas de  $P$  y altura  $\varepsilon$ , y sectores circulares  $N_\varepsilon(P, x)$  donde  $x$  es un vértice de  $P$ .

1-dimensional) y  $\varepsilon = \text{vol}_1(N_\varepsilon(P, F))$ , donde  $N(P, F) = N(P, z)$  donde  $z$  es cualquier punto en  $\text{int rel}(F)$  (no depende de  $z$  por el apartado (2) del Lema 3.2.3) y  $N_\varepsilon(P, F) = \{u \in N(P, F) \mid \|u\| \leq \varepsilon\}$ . Así, el volumen 2-dimensional (área) de cada rectángulo es  $\text{vol}_1(F) \text{vol}_1(N_\varepsilon(P, F))$ .

- Sectores circulares en cada uno de los vértices  $x$  de  $P$ , de la forma  $N_\varepsilon(P, x) = \{u \in N(P, x) \mid \|u\| \leq \varepsilon\}$ , que también puede verse como producto:  $\text{vol}_0(\{x\}) \text{vol}_2(N_\varepsilon(P, x))$  (hemos asignado a  $\{x\}$  el volumen 0-dimensional 1). Es decir, el volumen 2-dimensional de cada sector circular es  $\text{vol}_0(\{x\}) \text{vol}_2(N_\varepsilon(P, x))$ .

Los dos volúmenes anteriores pueden unificarse escribiendo  $\text{vol}_{2-i}(F) \text{vol}_i(N_\varepsilon(P, F))$ , donde  $F$  es una cara  $(2 - i)$ -dimensional de  $P$ ,  $i = 1, 2$ . Siguiendo la notación de la Proposición 3.2.2, denotaremos por  $\mathcal{F}_P = \{F \mid F \text{ es una cara de } P\}$ . Entonces, el volumen 2-dimensional de  $P_\varepsilon$  puede escribirse así:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(P_\varepsilon) &= \text{vol}_2(P) + \sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = 2-i}} \text{vol}_{2-i}(F) \text{vol}_i(N_\varepsilon(P, F)) \\ &= \text{vol}_2(P) + \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = 2-i}} \text{vol}_{2-i}(F) \text{vol}_i(N_1(P, F)) \right) \varepsilon^i. \end{aligned}$$

Como las sumas entre paréntesis no dependen de  $\varepsilon$ , podemos verlas como coeficientes  $c_i$  de un polinomio de grado 2 con término independiente  $\text{vol}_2(P)$ .

Ahora haremos lo anterior para cualquier politopo  $P \in \mathcal{K}^n$ . Fijemos  $\varepsilon > 0$  y tomemos un punto  $x \in P_\varepsilon - P$ . Consideremos la proyección métrica  $p_P: \mathbb{R}^n \rightarrow P$ . Así,  $y := p_P(x)$

es el único punto de  $\partial P$  tal que  $t := d(x, y) = d(x, P)$  (que es menor o igual que  $\varepsilon$  por definición de  $P_\varepsilon$ ). Además,

$$(3.10) \quad x = y + tu_P(x), \quad \text{donde } u_P(x) = \frac{x - y}{\|x - y\|}.$$

Aplicando la Proposición 3.2.2, existe una única cara  $F \in \mathcal{F}_P$  tal que  $y \in \text{rel int}(F)$ . Como  $y \in \partial P$ , entonces  $\dim F < n$  luego podemos escribir  $\dim F = n - i$ , siendo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Definimos

$$(3.11) \quad N(P, F) := N(P, z), \quad \text{donde } z \text{ es cualquier punto de } \text{rel int}(F),$$

$$N_\varepsilon(P, z) := \{u \in N(P, F) \mid \|u\| \leq \varepsilon\},$$

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \phi_{F,\varepsilon} : \quad & \text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ & (y, u) \quad \mapsto y + u \end{aligned}$$

(La definición (3.11) no depende de  $z$  por el apartado (2) del Lema 3.2.3). Por tanto, (3.10) prueba la inclusión  $\boxed{\subseteq}$  (la otra inclusión es trivial) de

$$(3.13) \quad P_\varepsilon - P = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-i}} \text{im}(\phi_{F,\varepsilon}).$$

Por otro lado, como  $\{\text{rel int}(F) \mid F \in \mathcal{F}_P\}$  es una partición de  $P$  (Proposición 3.2.2), entonces  $\{\text{rel int}(F) \mid F \in \mathcal{F}_P, \dim F < n\}$  es una partición de  $\partial P$ . Por tanto, las imágenes de  $\phi_{F,\varepsilon}$  para  $F \in \mathcal{F}_P, \dim F < n$ , son todas disjuntas. Esto y (3.13) nos dicen que el volumen de Lebesgue  $n$ -dimensional de  $P_\varepsilon - P$  puede expresarse

$$(3.14) \quad \text{vol}_n(P_\varepsilon - P) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-i}} \text{vol}_n[\text{im}(\phi_{F,\varepsilon})].$$

Ahora calculamos cada uno de los volúmenes anteriores:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n[\text{im}(\phi_{F,\varepsilon})] &= \int_{\phi_{F,\varepsilon}[\text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F)]} dV_n \quad (dV_n = \text{elemento de volumen } n\text{-dim}) \\ &= \int_{\text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F)} \phi_{F,\varepsilon}^* dV_n \quad (\text{fórmula de cambio de variable}) \end{aligned}$$

$\phi_{F,\varepsilon}^* dV_n$  es una  $n$ -forma diferencial en la variedad  $n$ -dimensional  $\text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F) \subset \mathbb{R}^{n-i} \times \mathbb{R}^i$ , donde estamos identificando el segundo factor  $\mathbb{R}^i$  con  $\text{aff}(N(P, F))$  (aquí usamos el Lema 3.2.4 para deducir que  $\dim N(P, F) = i$ ). Por tanto,  $\phi_{F,\varepsilon}^* dV_n$  será un múltiplo de  $dV_{n-i} \wedge dV_i$ . Calculamos dicho múltiplo: tomemos una base ortonormal positiva  $u_1, \dots, u_{n-i}$

de  $\overrightarrow{\text{aff}(F)} \equiv \mathbb{R}^{n-i}$  y una base ortonormal positiva  $v_1, \dots, v_i$  de  $\overrightarrow{\text{aff}(N(P, F))} \equiv \mathbb{R}^i$ . Así,  $dV_{n-i}(u_1, \dots, u_{n-i}) = dV_i(v_1, \dots, v_i) = 1$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} & (\phi_{F,\varepsilon}^* dV_n)(u_1, \dots, u_{n-i}, v_1, \dots, v_i) \\ &= dV_n((\phi_{F,\varepsilon})_*(u_1), \dots, (\phi_{F,\varepsilon})_*(u_{n-i}), (\phi_{F,\varepsilon})_*(v_1), \dots, (\phi_{F,\varepsilon})_*(v_i)) \\ &\stackrel{(\star)}{=} dV_n(u_1, \dots, u_{n-i}, v_1, \dots, v_i) \stackrel{(\star\star)}{=} 1, \end{aligned}$$

donde en  $(\star)$  hemos usado que  $\phi_{F,\varepsilon}(y, u) = y + u$ , y en  $(\star\star)$  que  $\{u_1, \dots, u_{n-i}\}, \{v_1, \dots, v_i\}$  son mutuamente ortogonales luego juntos forman una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^n$ . Por tanto,

$$(3.15) \quad \phi_{F,\varepsilon}^* dV_n = dV_{n-i} \wedge dV_i, \quad y$$

$$\begin{aligned} \text{vol}_n[\text{im}(\phi_{F,\varepsilon})] &= \int_{\text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F)} \phi_{F,\varepsilon}^* dV_n \\ &= \int_{\text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F)} dV_{n-i} \times dV_i \quad (\text{por (3.15)}) \\ &= \left( \int_{\text{int rel}(F)} dV_{n-i} \right) \left( \int_{N_\varepsilon(P, F)} dV_i \right) \quad (\text{Teorema de Fubini}) \\ &= \text{vol}_{n-i}(\text{int rel}(F)) \text{vol}_i(N_\varepsilon(P, F)) \\ &= \text{vol}_{n-i}(F) \text{vol}_i(N_\varepsilon(P, F)) \\ &= \text{vol}_{n-i}(F) \text{vol}_i(N_1(P, F)) \varepsilon^i, \end{aligned}$$

luego usando lo anterior en (3.14) tenemos

$$(3.16) \quad \text{vol}_n(P_\varepsilon - P) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-i}} \text{vol}_{n-i}(F) \text{vol}_i(N_1(P, F)) \varepsilon^i.$$

En resumen:

**Teorema 3.3.1** *Sea  $P \in \mathcal{K}^n$  un politopo. Dado  $\varepsilon > 0$ , el volumen de Lebesgue  $n$ -dimensional de  $P_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, P) \leq \varepsilon\}$  es el polinomio de grado  $n$  en la variable  $\varepsilon$  siguiente:*

$$(3.17) \quad \text{vol}_n(P_\varepsilon) = \text{vol}_n(P) + \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon^i, \quad \text{donde } c_i = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-i}} \text{vol}_{n-i}(F) \text{vol}_i(N_1(P, F)).$$

El siguiente objetivo es estudiar la dependencia de los coeficientes de (3.17) respecto a la distancia de Hausdorff, lo que será útil para extender el Teorema 3.3.1 por densidad a  $\mathcal{K}^n$ . Necesitaremos tres lemas.

**Lema 3.3.1** Si  $K, L \in \mathcal{K}^n$  y  $\varepsilon > 0$ , entonces  $K_\varepsilon, L_\varepsilon \in \mathcal{K}^n$  y  $\delta(K_\varepsilon, L_\varepsilon) \leq \delta(K, L)$ .

*Demostración.* Como  $K_\varepsilon = K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$  y  $K, \overline{\mathbb{B}} \in \mathcal{K}^n$ , tenemos que  $K_\varepsilon \in \mathcal{K}^n$  por ser  $\mathcal{K}^n$  un semigrupo. Análogamente,  $L_\varepsilon \in \mathcal{K}^n$  luego tiene sentido la distancia de Hausdorff  $\delta(K_\varepsilon, L_\varepsilon)$ . Por definición de  $\delta(K, L)$ ,

$$K_\varepsilon = K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}} \subset [L + \delta(K, L)]\overline{\mathbb{B}} + \varepsilon\overline{\mathbb{B}} = [L + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}] + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}} = L_\varepsilon + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}}.$$

Análogamente,  $L_\varepsilon \subset K_\varepsilon + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}}$  luego  $\delta(K_\varepsilon, L_\varepsilon) \leq \delta(K, L)$ .  $\square$

**Lema 3.3.2** Sea  $\varepsilon_0 > 0$ . Si  $\{P_m\}_m \subset \mathcal{K}^n$  es una sucesión de polítopos que converge a  $K \in \mathcal{K}^n$  en distancia de Hausdorff, entonces la sucesión de polinomios  $\{\text{vol}_n[(P_m)_\varepsilon]\}_m$  converge uniformemente a la función  $\varepsilon \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$  en el intervalo  $[0, \varepsilon_0]$ .

*Demostración.* Como  $P_m, K \in \mathcal{K}^n$ , el Lema 3.3.1 asegura que  $(P_m)_\varepsilon, K_\varepsilon \in \mathcal{K}^n \forall \varepsilon \geq 0$ , y fijado  $\varepsilon \geq 0$ , se tiene

$$(3.18) \quad \delta((P_m)_\varepsilon, K_\varepsilon) \leq \delta(P_m, K).$$

Como  $\delta(P_m, K) \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , (3.18) implica que  $\{(P_m)_\varepsilon\}_m$  converge a  $K_\varepsilon$  en distancia de Hausdorff,  $\forall \varepsilon \geq 0$ . Por ser  $\text{vol}: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$  continua (Teorema 2.3.1), concluimos que

$$(3.19) \quad \text{vol}[(P_m)_\varepsilon] \xrightarrow{(m \rightarrow \infty)} \text{vol}(K), \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

Recordemos del Teorema 3.3.1 que fijado  $m \in \mathbb{N}$ , la función  $\varepsilon \geq 0 \mapsto \text{vol}[(P_m)_\varepsilon]$  es un polinomio de grado  $n$  en la variable  $\varepsilon$ . Fijemos  $\varepsilon_0 > 0$  y veamos que la sucesión de polinomios  $\{\text{vol}[(P_m)_\varepsilon]\}_m$  converge uniformemente a la función  $\varepsilon \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$  en el intervalo  $[0, \varepsilon_0]$ : Consideremos el conjunto

$$\mathcal{A} = \{K_\varepsilon \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\} \cup \{(P_m)_\varepsilon \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{K}^n.$$

Como  $\{P_m\}_m \rightarrow K$  en distancia de Hausdorff, entonces  $\{P_m\}_m \cup \{K\}$  es un conjunto  $\delta$ -acotado. Esto implica que existen  $R > 0$  y  $Q \in \mathcal{K}^m$  tales que  $\delta(P_m, Q) \leq R$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , y  $\delta(K, Q) \leq R$ . Dado  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ , tenemos

$$\begin{aligned} \delta((P_m)_\varepsilon, Q) &\leq \delta((P_m)_\varepsilon, Q_\varepsilon) + \delta(Q_\varepsilon, Q) && \text{(desigualdad triangular)} \\ &\leq \delta(P_m, Q) + \delta(Q_\varepsilon, Q) && \text{(Lema 3.3.1)} \\ &\leq \delta(P_m, Q) + \varepsilon \\ &\leq R + \varepsilon_0, \end{aligned}$$

y análogamente,

$$\begin{aligned}\delta(K_\varepsilon, Q) &\leq \delta(K_\varepsilon, Q_\varepsilon) + \delta(Q_\varepsilon, Q) \\ &\leq \delta(K, Q) + \delta(Q_\varepsilon, Q) \\ &\leq R + \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Lo anterior implica que  $\mathcal{A}$  es un conjunto acotado de  $(\mathcal{K}^n, \delta)$ , y por tanto  $\mathcal{A}$  es un conjunto acotado de  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  (recordemos que  $\mathcal{C}^n$  es el conjunto de compactos no necesariamente convexos de  $\mathbb{R}^n$ ). Por el Corolario 2.2.1, el cierre de  $\mathcal{A}$  en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  es compacto. Como  $\mathcal{K}^n$  es cerrado en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  (Proposición 2.2.1) y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}^n$ , concluimos que el cierre de  $\mathcal{A}$  en  $(\mathcal{C}^n, \delta)$  está contenido en  $\mathcal{K}^n$ , y por tanto dicho cierre es un compacto de  $(\mathcal{K}^n, \delta)$ . Por la continuidad de  $\text{vol}: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$  y la compacidad de  $\mathcal{A}$  obtenemos que  $\text{vol}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow [0, \infty)$  es uniformemente continua. Para terminar, veamos que  $\{\text{vol}[(P_m)_\varepsilon]\}_m$  converge uniformemente a la función  $\varepsilon \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$  en el intervalo  $[0, \varepsilon_0]$ : Sea  $\delta > 0$ . Se trata de probar que existe un  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$(3.20) \quad |\text{vol}[(P_m)_\varepsilon] - \text{vol}(K_\varepsilon)| < \delta \quad \forall m \geq m_0, \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Para el  $\delta > 0$  anterior, la continuidad uniforme de  $\text{vol}|_{\overline{\mathcal{A}}}$  implica que existe  $\mu > 0$  tal que si  $L, L' \in \overline{\mathcal{A}}$  y  $\delta(L, L') < \mu$ , entonces  $|\text{vol}(L) - \text{vol}(L')| < \delta$ . Fijemos  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ . Como  $\{(P_m)_\varepsilon\}_m$  converge a  $K_\varepsilon$  en  $\delta$ , existe  $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  de forma que si  $m \geq m_0(\varepsilon)$ , entonces  $\delta((P_m)_\varepsilon, K_\varepsilon) < \mu$ . Como  $(P_m)_\varepsilon, K_\varepsilon \in \mathcal{A}$ , lo anterior implica que  $|\text{vol}[(P_m)_\varepsilon] - \text{vol}(K_\varepsilon)| < \delta \quad \forall m \geq m_0(\varepsilon)$ . Lo único que resta probar es que  $m_0(\varepsilon)$  puede tomarse independiente de  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ . Si esto no se diera, tendríamos una sucesión  $\{\varepsilon_k\}_k$  convergiendo a un  $\varepsilon_\infty \in [0, \varepsilon_0]$  y una sucesión  $\{m_0(\varepsilon_k)\}_k \subset \mathbb{N}$  divergiendo a  $\infty$  de forma que

$$(3.21) \quad \delta((P_m)_{\varepsilon_k}, K_{\varepsilon_k}) < \mu \quad \forall m \geq m_0(\varepsilon_k), \quad \text{pero} \quad \delta((P_{m_0(\varepsilon_k)-1})_{\varepsilon_k}, K_{\varepsilon_k}) \geq \mu.$$

La última desigualdad contradice que

$$\delta((P_{m_0(\varepsilon_k)-1})_{\varepsilon_k}, K_{\varepsilon_k}) \leq \delta(P_{m_0(\varepsilon_k)-1}, K) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0,$$

y el lema está probado.  $\square$

**Lema 3.3.3** *Si  $\{p_m = p_m(x)\}_m$  es una sucesión de polinomios de una variable real  $x$ , todos con grado a lo más  $k \in \mathbb{N}$ , y  $\{p_m\}_m$  converge uniformemente en  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  a una función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $f$  es la restricción a  $[a, b]$  de un polinomio de grado a lo más  $k$ .*

*Demostración.* La convergencia uniforme de  $\{p_m\}_m$  a  $f$  implica  $f$  es de clase  $C^\infty$  en  $[a, b]$ , y que la sucesión de derivadas de cualquier orden fijo de  $\{p_m\}_m$  converge a la correspondiente derivada de ese orden de  $f$ . Como el grado de  $p_m$  no supera a  $k$ , entonces la  $(k+1)$ -ésima

derivada de  $p_m$  es idénticamente nula,  $\forall m \in N$ . Por tanto,  $f^{(k+1)} \equiv 0$  en  $[a, b]$ , luego  $f$  es la restricción a  $[a, b]$  de un polinomio de grado a lo más  $k$ .  $\square$

Como consecuencia directa de los Lemas 3.3.2, 3.3.2 y 3.3.3 tenemos:

**Teorema 3.3.2** *Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $\varepsilon_0 > 0$ . Entonces,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$  es un polinomio de grado a lo más  $n$  en la variable  $\varepsilon$ . Además, los coeficientes de dicho polinomio son funciones continuas en la distancia de Hausdorff.*

### 3.4. Contenido de Minkowski

**Definición 3.4.1** *Sea  $K \in \mathcal{K}^n$ . Por el Teorema 3.3.2, la función  $\varepsilon \geq [0, \varepsilon_0] \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$  es un polinomio de grado a lo más  $n$  en la variable  $\varepsilon$ . Por tanto, tiene sentido el límite*

$$\text{area}(K) = A(K) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [\text{vol}_n(K_\varepsilon) - \text{vol}_n(K)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [\text{vol}_n(K + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}) - \text{vol}_n(K)],$$

Al que llamaremos el *contenido de Minkowski* de  $K$ . Como  $\text{vol}_n(K_\varepsilon) \geq \text{vol}_n(K)$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , deducimos que  $A(K) \in [0, \infty)$ ,  $\forall K \in \mathcal{K}^n$ .

Por el Lema 3.1.1, si  $n = 3$  y  $\partial K$  es una superficie regular de  $\mathbb{R}^3$ , el contenido de Minkowski es el área de  $\partial K$ . En el caso de un politopo, el contenido de Minkowski coincide con el volumen  $(n - 1)$ -dimensional de la frontera topológica:

**Lema 3.4.1** *Si  $P \subset \mathbb{R}^n$  un politopo con caras  $(n - 1)$ -dimensionales  $F_1, \dots, F_r$ , entonces*

$$A(P) = \sum_{i=1}^r \text{vol}_{n-1}(F_i).$$

*Demostración.* Usando la notación del Teorema 3.3.1, tenemos

$$\text{vol}_n(P_\varepsilon) = \text{vol}_n(P) + \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon^i, \text{ donde } c_i = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-i}} \text{vol}_{n-i}(F) \text{ vol}_i(N_1(P, F)).$$

Como por definición  $A(P)$  es la derivada en  $\varepsilon = 0$  del polinomio  $\varepsilon \mapsto \text{vol}_n(P_\varepsilon)$ , es decir, el coeficiente del término de grado 1 de dicho polinomio, tenemos

$$A(P) = c_1 = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-1}} \text{vol}_{n-1}(F) \text{ vol}_1(N_1(P, F)).$$

Así que basta probar que  $\text{vol}_1(N_1(P, F)) = 1$ ,  $\forall F \in \mathcal{F}_P$  con  $\dim F = n - 1$ . Recordemos que dada una cara  $(n - 1)$ -dimensional de  $P$ ,

$$N_1(P, F) = \{u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \mid u \text{ es vector normal exterior a } F, \|u\| \leq 1\} \cup \{\vec{0}\} = [0, 1] \cdot u_0,$$



donde  $u_0 \in N_1(P, x)$  con  $\|u_0\| = 1$  y  $x$  es cualquier punto en  $\text{rel int}(F)$  por el apartado (2) del Lema 3.2.3. Por tanto,  $\text{vol}_1(N_1(P, F)) = \text{longitud}([0, 1]) = 1$ .  $\square$

**Proposición 3.4.1** *La función Area:  $(\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$  es continua.*

*Demostración.* Sea  $K \in \mathcal{K}^n$ . Por definición,  $A(K)$  es la derivada en  $\varepsilon = 0$  del polinomio  $\varepsilon \geq 0 \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$ . Por tanto,  $A(K)$  es el coeficiente del término de grado 1 de dicho polinomio. Como los coeficientes de este polinomio son continuos en la distancia de Hausdorff (Teorema 3.3.2), se tiene la proposición.  $\square$

**Corolario 3.4.1** *Si  $K \in \mathcal{K}^n$  tiene dimensión a lo más  $n - 2$ , entonces su contenido de Minkowski es cero.*

*Demostración.* En el caso de que  $K$  sea un politopo, el Lema 3.4.1 implica que  $A(K) = 0$ , ya que  $K$  no tiene caras no tendrá caras  $(n - 1)$ -dimensionales. Para el caso general usaremos la continuidad del contenido de Minkowski dada por la Proposición 3.4.1.  $\square$

**Nota 3.4.1** Una propiedad interesante del área del borde, que no demostraremos ni usaremos, es que si  $K, K' \in \mathcal{K}^n$  cumplen  $K \subset K'$ , entonces  $A(K) \leq A(K')$ .

### 3.5. Simetrización de Steiner

Sea  $A \in \mathcal{K}^n$  y  $H \subset \mathbb{R}^n$  un hiperplano. Dado  $x \in H$ , llamemos  $L_x = x + (\vec{H})^\perp$  a la recta afín ortogonal a  $H$  que pasa por  $x$ . Tenemos dos posibilidades para la posición relativa de  $L_x$  y  $A$ :

1.  $L_x \cap A \neq \emptyset$ . En este caso,  $L_x \cap A$  es un segmento cerrado y finito (por ser  $A$  convexo y compacto). Sea  $\lambda(x) \in [0, \infty)$  su longitud, y sea  $S_x$  el segmento cerrado de  $L_x$  centrado en  $x$  y de longitud  $\lambda(x)$ . Notemos que puede ser  $S_x = \{x\}$ , cuando  $\lambda(x) = 0$ .
2.  $L_x \cap A = \emptyset$ . En este caso, definimos  $S_x = \emptyset$ .

**Definición 3.5.1** En la situación anterior, se define el *simetrizado de Steiner* de  $A$  respecto a  $H$  como

$$A_H = \bigcup_{x \in H} S_x \subset \mathbb{R}^n,$$

y decimos que  $A_H$  se obtiene a partir de  $A$  por *simetrización*. Es claro que  $A_H$  es simétrico por reflexión en  $H$ , y que si  $A$  es simétrico por reflexión en  $H$ , entonces  $A_H = A$ .

**Lema 3.5.1** Si  $A, A' \in \mathcal{K}^n$  y  $A \subset A'$ , entonces dado un hiperplano  $H \subset \mathbb{R}^n$  se tiene  $A_H \subset A'_H$ .

*Demostración.* Dado  $x \in H$ , claramente  $L_x \cap A \subset L_x \cap A'$  y si  $L_x \cap A \neq \emptyset$ , entonces

$$\lambda(x) = \text{long}(L_x \cap A) \leq \text{long}(L_x \cap A') := \lambda'(x),$$

de donde los correspondientes segmentos simetrizados  $S_x, S'_x$  cumplen  $S_x \subset S'_x$ . Como esto es cierto  $\forall x \in H$ , obtenemos  $A_H \subset A'_H$ .  $\square$

Veamos algunas propiedades más elaboradas del proceso de simetrización.

**Lema 3.5.2** Sean  $A \in \mathcal{K}^n$ ,  $H \subset \mathbb{R}^n$  un hiperplano y  $x \in H$  con  $L_x \cap A \neq \emptyset$ . Entonces:

(1) Para cualquier sucesión  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset H$  convergiendo a  $x$  tal que  $L_{x_i} \cap A \neq \emptyset \forall i$ , se tiene que

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \lambda(x_i) \leq \lambda(x),$$

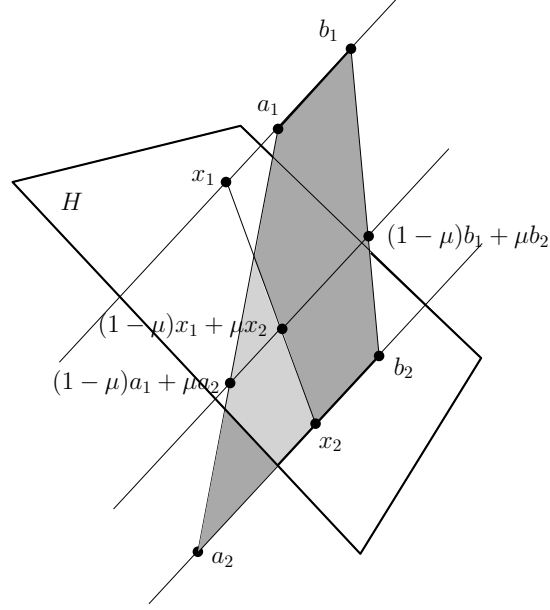
es decir,  $\lambda = \lambda(x)$  es semicontinua superiormente<sup>1</sup>.

(2) Sea  $\Pi_H: \mathbb{R}^n \rightarrow H$  la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $H$ . Entonces,  $\Pi_H(A)$  es convexo y  $\forall x_1, x_2 \in \Pi_H(A)$ ,  $\mu \in [0, 1]$ , se tiene  $\lambda((1-\mu)x_1 + \mu x_2) \geq (1-\mu)\lambda(x_1) + \mu\lambda(x_2)$ , es decir,  $\lambda = \lambda(x)$  es una función cóncava en  $\Pi_H(A)$  (en particular,  $\lambda$  es Lipschitziana en  $\Pi_H(A)$  por el Lema 1.7.1; sin embargo, la continuidad de  $\lambda$  puede fallar en  $\partial\Pi_H(A)$ ).

*Demostración.* Para el apartado (1), llamemos  $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$  a un vector ortogonal a  $H$  de forma que  $L_{x_i} \cap A = [x_i + a_i u, x_i + b_i u]$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i \leq b_i$ . Así,  $\lambda(x_i) = b_i - a_i$ . Pasando a una parcial podemos suponer que  $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \lambda(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(x_i)$ . Por compacidad de  $A$  y por ser  $\{x_i\}_i$  convergente a  $x$ , la sucesión de segmentos  $[x_i + a_i u, x_i + b_i u]$  converge tras pasar a una parcial a un segmento de la forma  $[x + a u, x + b u] \subset A$ , donde  $a = \lim_i a_i \leq \lim_i b_i = b \in \mathbb{R}$ . Esto implica que  $\lambda(x) \geq \text{long}([x + a u, x + b u]) = b - a = \lim_i (b_i - a_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(x_i)$ .

Para el apartado (2),  $\Pi_H(A)$  es convexo por ser  $A$  convexo y  $\Pi_H$  una aplicación afín (apartado (2) de la Proposición 1.1.1). En cuanto a la concavidad de  $\lambda$ , sean  $x_1, x_2 \in \Pi_H(A)$ ,  $\mu \in [0, 1]$ . Así,  $L_{x_i} \cap A$  es de la forma  $[a_i, b_i]$  con  $a_i, b_i \in x_i + H^\perp$  (podría ser  $a_i = b_i$ ). Como  $[a_i, b_i] \subset A$ ,  $i = 1, 2$ , y  $A$  es convexo, el cuadrilátero cerrado  $D = \text{conv}([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2])$  está contenido en  $A$ . Por otro lado, como  $\Pi_H(A)$  es convexo,  $(1-\mu)x_1 + \mu x_2 \in \Pi_H(A)$  luego  $L_{(1-\mu)x_1 + \mu x_2} \cap A \neq \emptyset$ . Además, la recta  $L_{(1-\mu)x_1 + \mu x_2}$  corta al cuadrilátero  $C$  en el segmento  $[(1-\mu)a_1 + \mu a_2, (1-\mu)b_1 + \mu b_2]$  (ver Figura 3.5).

<sup>1</sup>Si  $A \in \mathcal{K}^2$ , la función  $\lambda(x)$  es continua (Sección 1.2, página 29 de [1]). No usaremos esto.

Figura 3.5: El cuadrilátero gris es  $C$ .

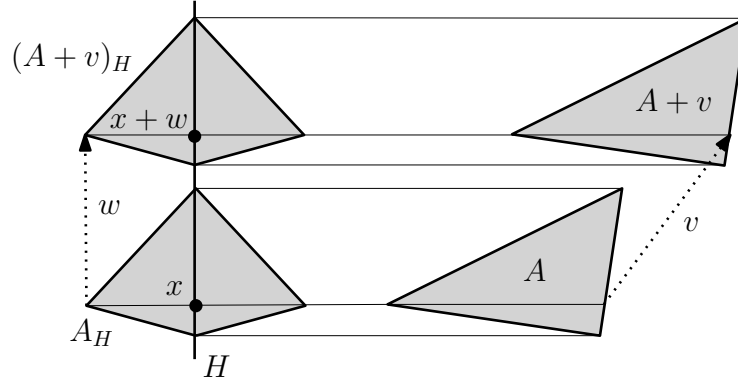
En particular,

$$\begin{aligned}
 \lambda((1-\mu)x_1 + \mu x_2) &\geq \text{long}([(1-\mu)a_1 + \mu a_2, (1-\mu)b_1 + \mu b_2]) \\
 &= \|(1-\mu)b_1 + \mu b_2 - (1-\mu)a_1 - \mu a_2\| \\
 &= \|(1-\mu)(b_1 - a_1) + \mu(b_2 - a_2)\| \\
 &\stackrel{(*)}{=} (1-\mu)\|b_1 - a_1\| + \mu\|b_2 - a_2\| \\
 &= (1-\mu)\lambda(x_1) + \lambda(x_2),
 \end{aligned}$$

donde en  $(*)$  hemos usado que  $b_1 - a_1, b_2 - a_2$  llevan la misma dirección y el mismo sentido (alguno podría anularse).  $\square$

**Lema 3.5.3** *Dados  $A \in \mathcal{K}^n$  y  $v \in \mathbb{R}^n$ , se tiene  $(A+v)_H = A_H + w$ , donde  $w$  es la proyección ortogonal de  $v$  sobre  $\vec{H}$ , es decir,  $u = w + w^\perp$  con  $w \in \vec{H}$ ,  $w^\perp \in \vec{H}^\perp$ .*

*Demostración.* Dado  $x \in H$ ,  $L_{x+w} \cap (A+v) = (L_x + w) \cap (A+v) = (L_x + w) \cap [(A+w) + w^\perp] \stackrel{(*)}{=} [(L_x + w) \cap (A+w)] + w^\perp = [(L_x \cap A) + w] + w^\perp$ , donde en  $(*)$  hemos usado que  $w^\perp$  lleva la dirección de la recta  $L_x + w$ .



Por tanto, si denotamos por  $\lambda_A$ ,  $\lambda_{A+v}$  a las funciones longitud de los segmentos producidos por simetrización de Steiner de  $A$ ,  $A+v$  respecto a  $H$ , tenemos

$$\lambda_{A+v}(x+w) = \text{long}[(L_{x+w}) \cap (A+v)] = \text{long}(L_x \cap A) = \lambda_A(x),$$

lo que implica que el segmento cerrado  $S_A(x) = L_x \cap A_H$  centrado en  $x$  y de longitud  $\lambda_A(x)$  y su correspondiente en  $A+v$ ,  $S_{A+v}(x+w) = L_{x+w} \cap (A+v)_H$ , cumplen  $S_{A+v}(x+w) = S_A(x) + w$ ,  $\forall x \in H$ . Esto equivale a  $(A+v)_H = A_H + w$ .  $\square$

**Lema 3.5.4** Sean  $A \in \mathcal{K}^n$  y  $H \subset \mathbb{R}^n$  un hiperplano tal que  $A$  está contenido en un hiperplano ortogonal a  $H$ . Entonces,  $\text{area}(A) = 2\text{vol}_{n-1}(A)$ .

*Demostración.* Supondremos que  $A$  es un politopo. El caso general se obtendrá a partir de este caso particular, por el Teorema de densidad 2.4.1, la continuidad del contenido de Minkowski (Proposición 3.4.1) y la continuidad del volumen (Teorema 2.3.1). Tomemos entonces un politopo  $A \subset \mathbb{R}^n$  contenido en un hiperplano  $H_1 \subset \mathbb{R}^n$  ortogonal a un hiperplano dado  $H \subset \mathbb{R}^n$ . Podemos escribir  $A$  como límite en distancia de Hausdorff de una sucesión de politopos  $n$ -dimensionales  $A_m \subset \mathbb{R}^n$  obtenidos multiplicando  $A$  por un intervalo de anchura  $2/m$ , centrado en  $H_1$  y en la dirección ortogonal a  $H_1$ , ver Figura 3.6.

Fijado  $m \in \mathbb{N}$ , las caras  $(n-1)$ -dimensionales de  $A_m$  son de dos tipos: las dos caras paralelas a  $A$ , que son  $A - \frac{1}{m}u_1$ ,  $A + \frac{1}{m}u_1$  donde  $u_1 \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$  es ortogonal a  $H_1$ , y el resto de caras de  $A_m$ , que son ortogonales a  $H_1$  (tantas como caras  $(n-2)$ -dimensionales tiene  $A$ ). Llamemos a estas últimas  $F_1(m), \dots, F_k(m)$ . Por el Lema 3.4.1,

$$\text{area}(A_m) = \text{vol}_{n-1}(A - \frac{1}{m}u_1) + \text{vol}_{n-1}(A + \frac{1}{m}u_1) + \sum_{i=1}^k \text{vol}_{n-1}(F_i(m)).$$

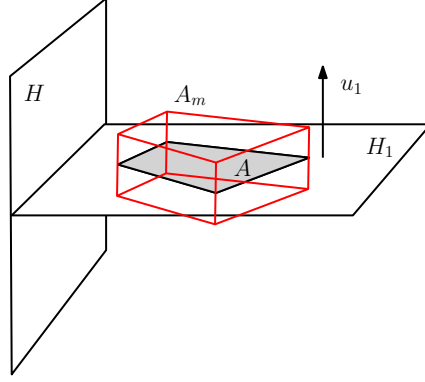


Figura 3.6:  $u_1$  es un vector unitario ortogonal a  $H_1$ . La anchura del politopo  $A_m$  (en rojo) en la dirección de  $u_1$  es  $2/m$ .

Cuando  $m \rightarrow \infty$ , las caras  $F_i(m)$  colapsan a las caras  $(n-2)$ -dimensionales de  $A$ , luego los volúmenes  $(n-1)$ -dimensionales de las  $F_i(m)$  tienden a cero. Por tanto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{area}(A_m) = 2\text{vol}_{n-1}(A).$$

Finalmente, el límite de la izquierda en la última expresión es  $\text{area}(A)$ , por la Proposición 3.4.1.  $\square$

**Teorema 3.5.1** Sean  $A \in \mathcal{K}^n$  y  $H$  un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces:

- (1)  $A_H \in \mathcal{K}^n$ .
- (2)  $\text{vol}(A_H) = \text{vol}(A)$ .
- (3)  $\text{diam}(A_H) \leq \text{diam}(A)$ .
- (4)  $\text{area}(A_H) \leq \text{area}(A)$ , y la igualdad es cierta si y sólo si  $A$  es simétrico respecto a un hiperplano paralelo a  $H$  o bien  $A$  está contenido en un hiperplano ortogonal a  $H$ .

*Demostración.* Veamos el apartado (1). Como  $A \in \mathcal{K}^n$ ,  $A$  es acotado luego existe  $x_0 \in H$ ,  $R > 0$  tales que  $A \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, R)$ . Por el Lema 3.5.1,  $A_H \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, R)_H = \overline{\mathbb{B}}(x_0, R)$ , luego  $A_H$  también es acotado. Para ver que  $A_H$  es cerrado, sea  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset A_H$  convergiendo a  $x \in \mathbb{R}^n$ . Si  $\Pi_H: \mathbb{R}^n \rightarrow H$  es la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $H$ , entonces por continuidad de  $\Pi_H$  tenemos  $\{\Pi_H(x_i)\}_i \rightarrow \Pi_H(x)$ . Por otro lado, como  $x_i \in A_H$  entonces  $\|x_i - \Pi_H(x_i)\| \leq \frac{1}{2}\lambda(\Pi_H(x_i))$ . Así,

$$\|x - \Pi_H(x)\| = \lim_i \|x_i - \Pi_H(x_i)\| \leq \frac{1}{2} \overline{\lim} \lambda(\Pi_H(x_i)) \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{2} \lambda(\Pi_H(x)),$$

donde en  $(\star)$  hemos usado el apartado (1) del Lema 3.5.2. De lo anterior deducimos que  $x \in A_H$  y  $A_H$  es cerrado.

Veamos que  $A_H$  es convexo. Dados  $x_1, x_2 \in A_H$  y  $\mu \in [0, 1]$ , llamemos  $z_i = \Pi_H(x_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Tenemos  $\Pi_H(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) = \mu \Pi_H(x_1) + (1 - \mu) \Pi_H(x_2) = \mu z_1 + (1 - \mu)z_2$  luego

$$\begin{aligned}
 \|(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) - \Pi_H(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2)\| &= \|(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) - (\mu z_1 + (1 - \mu)z_2)\| \\
 &= \|\mu(x_1 - z_1) + (1 - \mu)(x_2 - z_2)\| \\
 &\leq \mu\|x_1 - z_1\| + (1 - \mu)\|x_2 - z_2\| \\
 &\stackrel{(\star)}{\leq} \frac{\mu}{2}\lambda(z_1) + \frac{1-\mu}{2}\lambda(z_2) \\
 &\stackrel{(\star\star)}{\leq} \frac{1}{2}\lambda(\mu z_1 + (1 - \mu)z_2)
 \end{aligned}$$

donde en  $(\star)$  hemos usado que  $x_i \in A_H$ ,  $i = 1, 2$ , y  $(\star\star)$  es consecuencia del apartado (2) del Lema 3.5.2. Por tanto,  $A_H$  es convexo y el apartado (1) está demostrado.

El apartado (2) es consecuencia directa del Teorema de Fubini.

Veamos el apartado (3): Como  $A_H$  es compacto,  $\exists x_1, x_2 \in A_H$  tales que  $\text{diam}(A_H) = \|x_1 - x_2\|$ . Sean  $z_i = \Pi_H(x_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Como  $x_1, x_2$  maximizan la distancia entre puntos de  $A_H$  entonces  $x_1, x_2$  son los extremos de los segmentos  $L_{z_1} \cap A_H$ ,  $L_{z_2} \cap A_H$  y están en lados opuestos de  $H$ , ver Figura 3.7.

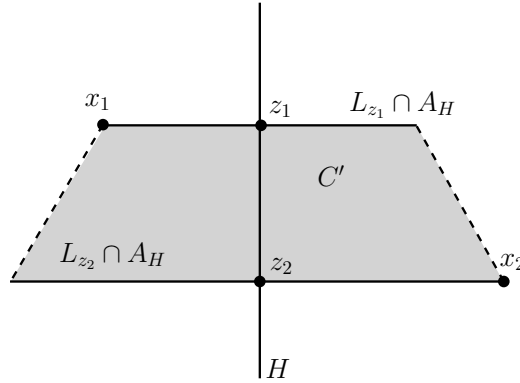


Figura 3.7: El trapecio  $C'$  es la envolvente convexa de los segmentos  $L_{z_1} \cap A_H$ ,  $L_{z_2} \cap A_H$ .

Consideremos los cuadriláteros cerrados siguientes ( $C'$  es un trapecio simétrico respecto a  $H$ ):

$$C = \text{conv}([L_{z_1} \cap A] \cup [L_{z_2} \cap A]), \quad C' = \text{conv}([L_{z_1} \cap A_H] \cup [L_{z_2} \cap A_H]).$$

Entonces,  $\text{diam}(A_H) = \|x_1 - x_2\| = \text{diam}(C')$ . Por otro lado, como  $A$  es convexo y  $L_{z_i} \cap A \subset A$ ,  $i = 1, 2$ , tenemos  $C \subset A$  de donde  $\text{diam}(C) \leq \text{diam}(A)$ . Así que para probar que  $\text{diam}(A_H) \leq \text{diam}(A)$  basta demostrar que  $\text{diam}(C') \leq \text{diam}(C)$ . Como  $C, C'$  están contenidos en el plano ortogonal a  $H$  que pasa por  $z_1, z_2$ , deducimos que basta probar este apartado (3) en el caso  $n = 2$ , es decir,  $A \in \mathcal{K}^2$ . En este caso,  $H$  es una recta afín en  $\mathbb{R}^2$ .

Vamos a cambiar la notación ligeramente. Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  una recta afín  $H$ , dos puntos  $z_1, z_2 \in H$  y las rectas  $r_i = z_i + H^\perp$ ,  $i = 1, 2$ . Dados  $L_1, L_2 \geq 0$ , consideremos el conjunto  $\mathcal{F}$  de todas las parejas  $(S_1, S_2)$  de segmentos cerrados  $S_i \subset r_i$  de longitudes  $\text{long}(S_i) = L_i$ ,  $i = 1, 2$ . Existe una única pareja  $(S_1^H, S_2^H) \in \mathcal{F}$  formada por segmentos simétricos respecto a  $H$ . Claramente, el simetrizado de Steiner de cualquier  $(S_1, S_2) \in \mathcal{F}$  es  $(S_1^H, S_2^H)$ . Para cada  $(S_1, S_2) \in \mathcal{F}$  consideramos el cuadrilátero  $\text{conv}(S_1 \cup S_2)$ . Así, debemos probar que

$$(3.22) \quad \text{diam}[\text{conv}(S_1^H \cup S_2^H)] \leq \text{diam}[\text{conv}(S_1 \cup S_2)], \quad \forall (S_1, S_2) \in \mathcal{F}.$$

Para ello, fijemos  $(S_1, S_2) \in \mathcal{F}$  y llamemos  $S_1 = [x_1, x'_1]$ ,  $S_2 = [x'_2, x_2]$  como en la Figura 3.8. Consideremos los 4 triángulos rectángulos  $A, B, \widehat{A}, \widehat{B}$  obtenidos al unir en cruz  $x_1$  con  $x_2$ ,  $x'_1$  con  $x'_2$  junto con la perpendicular común a  $r_1, r_2$  que pasa por el punto de corte de  $[x_1, x_2]$  y  $[x'_1, x'_2]$ . Llamemos  $\alpha_1, \beta_1$  a las longitudes de los catetos de  $A$  ( $\beta_1$  está medido sobre  $r_1$ ) y  $\delta_1$  a su hipotenusa, ver Figura 3.8. Notemos que  $A, \widehat{A}$  son triángulos semejan-

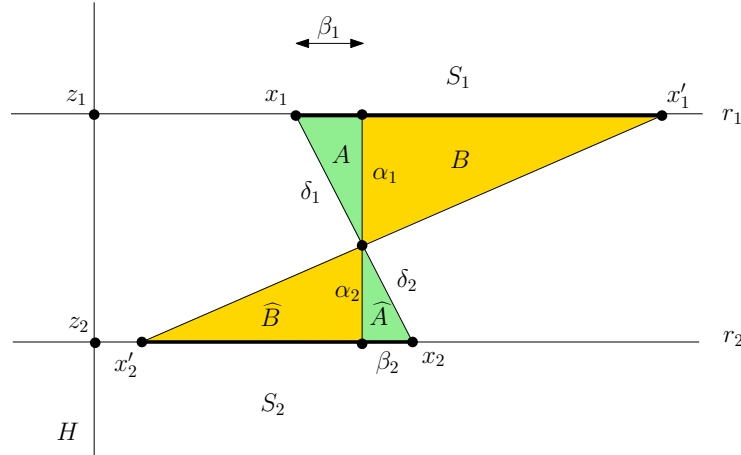


Figura 3.8: Los cuatro triángulos rectángulos  $A, B, \widehat{A}, \widehat{B}$ .

tes (lo mismo que  $B, \widehat{B}$ ). Así,  $\exists \lambda > 0$  tales que los catetos  $\alpha_2, \beta_2$  y la hipotenusa  $\delta_2$  de  $\widehat{A}$  cumplen

$$\alpha_2 = \lambda \alpha_1, \quad \beta_2 = \lambda \beta_1, \quad \delta_2 = \lambda \delta_1.$$

Por tanto,  $\|x_1 - x_2\|^2 = (\delta_1 + \delta_2)^2 = (1 + \lambda)^2 \delta_1^2$ , que por el Teorema de Pitágoras se escribe  $(1 + \lambda)^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2) = (1 + \lambda)^2 \alpha_1^2 + (1 + \lambda)^2 \beta_1^2$ ; es decir,

$$(3.23) \quad \|x_1 - x_2\|^2 = d(r_1, r_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2.$$

Si hacemos el mismo razonamiento con los triángulos  $B, \widehat{B}$  obtenemos  $\|x'_1 - x'_2\|^2 = d(r_1, r_2)^2 + ((\|x_1 - x'_1\| - \beta_1) + (\|x_2 - x'_2\| - \beta_2))^2$ . Pero  $\|x_1 - x'_1\| = L_1$ ,  $\|x_2 - x'_2\| = L_2$  son independientes del par  $(S_1, S_2) \in \mathcal{F}$ , es decir,

$$(3.24) \quad \|x'_1 - x'_2\|^2 = d(r_1, r_2)^2 + (L - \beta)^2,$$

donde  $L = L_1 + L_2$  (fijo en  $\mathcal{F}$ ) y  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ . Veamos ya (3.22):

$$(3.23), (3.24) \quad \text{diam}[\text{conv}(S_1 \cup S_2)] = \text{máx}\{d(x_1, x_2), d(x'_1, x'_2)\} \\ \stackrel{(3.23), (3.24)}{=} \text{máx}\left\{ \left(d(r_1, r_2)^2 + \beta^2\right)^{1/2}, \left(d(r_1, r_2)^2 + (L - \beta)^2\right)^{1/2} \right\}.$$

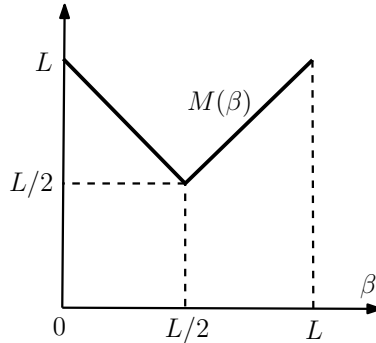
Las dos expresiones que aparecen en el máximo anterior son del tipo  $f(t) = (d^2 + t^2)^{1/2}$ , donde  $d = d(r_1, r_2)$ . La función  $f$  es no decreciente en  $t \in [0, \infty)$  y  $\beta, L - \beta \geq 0$ , luego la última expresión se escribe

$$\text{máx}\{f(\beta), f(L - \beta)\} = f(\text{máx}\{\beta, L - \beta\}) = \left[d(r_1, r_2)^2 + (\text{máx}\{\beta, L - \beta\})^2\right]^{1/2},$$

de donde

$$(3.25) \quad \text{diam}[\text{conv}(S_1 \cup S_2)] = \left[d(r_1, r_2)^2 + M(\beta)^2\right]^{1/2},$$

donde  $M(\beta) = \text{máx}\{\beta, L - \beta\}$ . Ahora estimamos  $M(\beta)$  por abajo.  $\beta = \beta_1 + \beta_2$  se mueve en  $[0, L = L_1 + L_2]$  ya que  $\beta_i \in [0, L_i]$ ,  $i = 1, 2$ . La gráfica de  $\beta \in [0, L] \mapsto M(\beta)$  es





Por tanto, de (3.25) tenemos

$$(3.26) \quad \text{diam}[\text{conv}(S_1 \cup S_2)] \geq [d(r_1, r_2)^2 + M(L/2)^2]^{1/2} = [d(r_1, r_2)^2 + (L/2)^2]^{1/2}.$$

El caso simétrico en la familia  $\mathcal{F}$ , es decir, cuando producimos el miembro de la izquierda de (3.22), es cuando  $\beta_i = L_i/2$ , en cuyo caso  $\beta = \beta_1 + \beta_2 = L/2$ . Esto no es otra cosa que el miembro de la derecha de (3.26), con lo que (3.22) está probado. Esto termina la demostración del apartado (3) del Teorema 3.5.1.

Para el apartado (4), tomemos  $A \in \mathcal{K}^n$ .

$$\begin{aligned} \text{area}(A_H) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [\text{vol}_n(A_H + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}) - \text{vol}_n(A_H)] \\ &\stackrel{\text{(apdo (2))}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [\text{vol}_n(A_H + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}) - \text{vol}_n(A)]. \end{aligned}$$

Si probamos que

$$(3.27) \quad \text{vol}_n(A_H + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}) \leq \text{vol}_n(A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}) \quad \forall \varepsilon \geq 0,$$

entonces tendremos la desigualdad  $\text{area}(A_H) \leq \text{area}(A)$  que buscábamos. Supongamos probado que

$$(3.28) \quad A_H + \varepsilon \overline{\mathbb{B}} \subseteq (A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}})_H \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

En tal caso,

$$\text{vol}_n(A_H + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}) \stackrel{(3.28)}{\leq} \text{vol}_n[(A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}})_H] \stackrel{\text{(apdo (2))}}{=} \text{vol}_n(A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}),$$

que es (3.27). Es decir, basta probar (3.28).

Tomemos  $x \in A_H$  y  $v \in \overline{\mathbb{B}}$ . Sea  $\Pi_H: \mathbb{R}^n \rightarrow H$  la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $H$  y  $\overrightarrow{\Pi}_H: \mathbb{R}^n \rightarrow \overrightarrow{H}$  su aplicación lineal asociada. Llamemos  $z = \Pi_H(x)$ ,  $w = \overrightarrow{\Pi}_H(v)$ . Así,  $\Pi_H(x + \varepsilon v) = z + \varepsilon w$ . Por definición de simetrización de Steiner para  $A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}$ , para probar que  $x + \varepsilon v \in (A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}})_H$  (que es lo que queremos ver ya que esto implicaría (3.28)), basta comprobar que la siguiente desigualdad se cumple:

$$(3.29) \quad \|(x + \varepsilon v) - (z + \varepsilon w)\| \leq \frac{1}{2} \text{long} [L_{\Pi_H(x + \varepsilon v)} \cap (A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}})],$$

donde  $L_{\Pi_H(x + \varepsilon v)}$  es la recta ortogonal a  $H$  que pasa por  $\Pi_H(x + \varepsilon v)$ .

Para probar (3.29), simplificaremos un poco la notación. Dado  $q \in H$ , llamaremos

$$\lambda(q) = \text{long}(L_q \cap A), \quad \lambda_\varepsilon(q) = \text{long} [L_q \cap (A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}})].$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|(x + \varepsilon v) - (z + \varepsilon w)\|^2 &= \|(x - z) + \varepsilon(v - w)\|^2 \\
&= \|x - z\|^2 + \varepsilon^2\|v - w\|^2 + 2\varepsilon\langle x - z, v - w \rangle \\
&\stackrel{(\star)}{=} \|x - z\|^2 + \varepsilon^2(\|v\|^2 - \|w\|^2) + 2\varepsilon\langle x - z, v - w \rangle \\
&\leq \|x - z\|^2 + \varepsilon^2(\|v\|^2 - \|w\|^2) + 2\varepsilon\|x - z\|\|v - w\| \\
&\stackrel{(\star)}{=} \|x - z\|^2 + \varepsilon^2(\|v\|^2 - \|w\|^2) + 2\varepsilon\|x - z\|(\|v\|^2 - \|w\|^2)^{1/2} \\
&= (\|x - z\| + \varepsilon(\|v\|^2 - \|w\|^2)^{1/2})^2,
\end{aligned}$$

donde en  $(\star)$  hemos usado que la descomposición  $v = w + (v - w)$  es ortogonal. Como  $x \in A_H$  y  $z = \Pi_H(x)$ , por definición de simetrización de Steiner de  $A$  tenemos  $\|x - z\| \leq \frac{1}{2}\lambda(z)$  luego lo anterior se escribe

$$(3.30) \quad \|(x + \varepsilon v) - (z + \varepsilon w)\| \leq \frac{1}{2}\lambda(z) + \varepsilon(\|v\|^2 - \|w\|^2)^{1/2}.$$

Por otro lado, recordemos que  $\|w\| \leq \|v\| \leq 1$  y que  $w \in \vec{H}$ . Tomemos  $v_1 \in (\vec{H})^\perp$  tal que  $\|w + v_1\| = 1$ . Así,  $z + (w + v_1), z + (w - v_1) \in \mathbb{S}^{n-1}(z, 1)$ . Por tanto, si llamamos  $L_z \cap A = [a, b]$ , entonces  $a + \varepsilon(w - v_1), b + \varepsilon(w + v_1) \in A + \varepsilon\mathbb{B}$ , ver Figura 3.9.

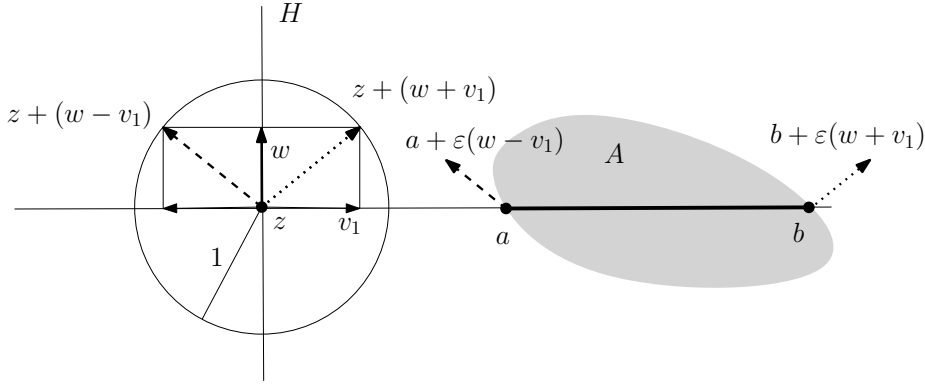


Figura 3.9: Los puntos  $a + \varepsilon(w - v_1), b + \varepsilon(w + v_1)$  están en  $A + \varepsilon\mathbb{B}$ .

Además,  $\Pi_H(a + \varepsilon(w - v_1)) = \Pi_H(b + \varepsilon(w + v_1)) = z + \varepsilon w$ . Como  $A + \varepsilon\mathbb{B}$  es convexo, tenemos  $[a + \varepsilon(w - v_1), b + \varepsilon(w + v_1)] \subset L_{z + \varepsilon w} \cap (A + \varepsilon\mathbb{B})$ , luego

$$\lambda_\varepsilon(z + \varepsilon w) \geq \text{long}([a + \varepsilon(w - v_1), b + \varepsilon(w + v_1)]) = \|b - a + 2\varepsilon v_1\|.$$

Como  $b - a$  y  $v_1$  son vectores con la misma dirección y sentido,

$$\|b - a + 2\varepsilon v_1\| = \|b - a\| + 2\varepsilon\|v_1\| = \lambda(z) + 2\varepsilon(1 - \|w\|^2)^{1/2},$$

y por tanto,

$$(3.31) \quad \frac{1}{2}\lambda_\varepsilon(z + \varepsilon w) \geq \frac{1}{2}\lambda(z) + \varepsilon(1 - \|w\|^2)^{1/2}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|(x + \varepsilon v) - (z + \varepsilon w)\| & \stackrel{(3.30)}{\leq} \frac{1}{2}\lambda(z) + \varepsilon(\|v\|^2 - \|w\|^2)^{1/2} \\ & \leq \frac{1}{2}\lambda(z) + \varepsilon(1 - \|w\|^2)^{1/2} \stackrel{(3.31)}{\leq} \frac{1}{2}\lambda_\varepsilon(z + \varepsilon w), \end{aligned}$$

lo que prueba (3.29). Esto prueba la desigualdad del apartado (4) del Teorema 3.5.1 (veremos otra demostración de esta desigualdad en las página 103).

Terminaremos la demostración del Teorema 3.5.1 analizando cuándo se da la igualdad en el apartado (4).

- Si  $A \in \mathcal{K}^n$  es simétrico respecto a un hiperplano paralelo a  $H$ , que podrá escribirse  $H + v$  para algún  $v \in \vec{H}^\perp$ , entonces

$$\begin{aligned} A_H &= [(A - v) + v]_H \\ &= (A - v)_H && \text{(por el Lema 3.5.3)} \\ &= A - v && \text{(por ser } A - v \text{ simétrico respecto a } H) \end{aligned}$$

luego  $\text{area}(A_H) = \text{area}(A - v) = \text{area}(A)$ .

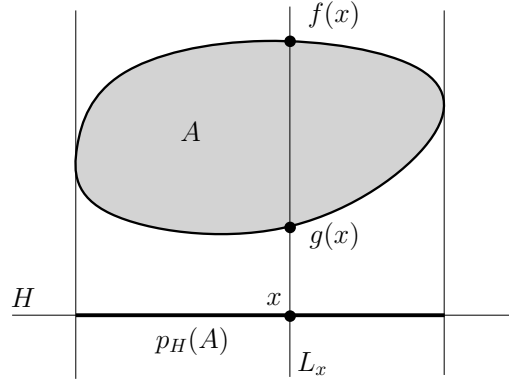
- Si  $A$  está contenido en un hiperplano ortogonal a  $H$ , el Lema 3.5.4 implica que  $\text{area}(A) = 2 \text{vol}_{n-1}(A)$ . En este caso,  $A_H$  también está contenido en el mismo hiperplano ortogonal a  $H$ , luego análogamente  $\text{area}(A_H) = 2 \text{vol}_{n-1}(A_H)$ . En esta situación, podemos aplicar el apartado (2) de este teorema (viendo  $A, A_H$  en  $H_1 \equiv \mathbb{R}^{n-1}$  donde la simetrización se hace respecto al hiperplano  $H \cap H_1$  de  $H_1$ ) para concluir que  $\text{vol}_{n-1}(A) = \text{vol}_{n-1}(A_H)$  luego  $\text{area}(A) = \text{area}(A_H)$ .

Los dos puntos anteriores prueban la condición suficiente en la igualdad del apartado (4) del teorema. Para la condición necesaria, supongamos que  $A \in \mathcal{K}^n$  cumple  $\text{area}(A) = \text{area}(A_H)$  y que  $A$  no está contenido en ningún hiperplano ortogonal a  $H$ . Debemos comprobar que

$$(3.32) \quad \exists v \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } A \text{ es simétrico respecto al hiperplano } H + v.$$

Para ello, calcularemos  $\text{area}(A)$  a partir de la geometría de  $\Pi_H(A)$ , la proyección ortogonal de  $A$  sobre  $H$ , y haremos lo mismo con  $\text{area}(A_H)$ . Esto nos dará otra demostración de que  $\text{area}(A_H) \leq \text{area}(A)$ , como habíamos adelantado en la página 103. Obviaremos algunas cuestiones de regularidad en lo que sigue.

Salvo un cambio en el sistema de referencia, podemos suponer  $H = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ .  $\Pi_H(A)$  es un convexo de  $H$  con interior relativo no vacío, porque  $A$  no está contenido en ningún hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  ortogonal a  $H$ . Definimos dos funciones  $f, g: \Pi_H(A) \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente forma: dado  $x \in \Pi_H(A)$ , la recta afín  $L_x = x + \vec{H}^\perp = x + \langle e_n \rangle$  corta a  $A$  en un segmento cerrado  $S_x$  (que puede ser un punto), que será de la forma  $S_x = [x + g(x)e_n, x + f(x)e_n]$ .



La convexidad de  $A$  hace que  $f$  sea cóncava y  $g$  convexa. Además,

$$\partial A = \text{grafo}(f) \cup \text{grafo}(g) \cup C,$$

donde  $C = \partial A - [\text{grafo}(f) \cup \text{grafo}(g)]$  está contenida en  $\Pi_H^{-1}(\partial \Pi_H(A))$ . Como  $g$  es convexa en el compacto  $\Pi_H(A)$ , es Lipschitziana por el Lema 1.7.1. Por tanto, existe el gradiente  $\nabla g$  de  $g$  casi por doquier (c.p.d.) en  $\Pi_H(A)$ ; para esto, usar derivadas débiles, o bien usar el capítulo 1.5 de [2]. Análogamente, existe  $\nabla f$  c.p.d. en  $\Pi_H(A)$ .

Ya podemos escribir el contenido de Minkowski de  $A$ :

$$\begin{aligned} \text{area}(A) &= \text{area}[\text{grafo}(f)] + \text{area}[\text{grafo}(g)] + \text{area}(C) \\ &= \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dV_{n-1} + \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2} dV_{n-1} \\ &\quad + \int_{\partial \Pi_H(A)} (f - g) dV_{n-2}, \end{aligned}$$

donde  $dV_k$  es el elemento de volumen métrico de  $\mathbb{R}^k$ . A continuación describimos de forma análoga  $\text{area}(A_H)$ : Dado  $x \in \Pi_H(A)$ , el punto medio del segmento  $S_x$  es  $\frac{1}{2}(f(x) + g(x))$ , luego por simetrización respecto a  $H = \{x_n = 0\}$ ,  $S_x$  se transforma en el segmento

$$\left[ x + \left( g(x) - \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) \right) e_n, x + \left( f(x) - \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) \right) e_n \right]$$

$$= \left[ x - \frac{1}{2}(f(x) - g(x))e_n, x + \frac{1}{2}(f(x) - g(x))e_n \right],$$

es decir,

$$A_H = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in \Pi_H(A), \tilde{g}(x) \leq x_n \leq \tilde{f}(x)\},$$

donde  $\tilde{f}, \tilde{g}: \Pi_H(A) \rightarrow \mathbb{R}$  viene dadas por

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f + g)(x), \quad \tilde{g}(x) = -\frac{1}{2}(f - g)(x), \quad \forall x \in \Pi_H(A).$$

Aplicando el desarrollo anterior para expresar el contenido de Minkowski de  $A_H$ :

$$\begin{aligned} \text{area}(A_H) &= \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla \tilde{f}\|^2} dV_{n-1} + \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla \tilde{g}\|^2} dV_{n-1} \\ &\quad + \int_{\partial \Pi_H(A)} (\tilde{f} - \tilde{g}) dV_{n-2}, \\ &= 2 \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla \left(\frac{f-g}{2}\right)\|^2} dV_{n-1} + \int_{\partial \Pi_H(A)} (f - g) dV_{n-2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, en  $\Pi_H(A)$  tenemos  $2 \left(1, \nabla \left(\frac{f-g}{2}\right)\right) = (1, \nabla f) + (1, -\nabla g)$  luego tomando normas,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1 + \|\nabla \left(\frac{f-g}{2}\right)\|^2} &= 2 \left\| \left(1, \nabla \left(\frac{f-g}{2}\right)\right) \right\| \\ &\stackrel{(\star)}{\leq} \|(1, \nabla f)\| + \|(1, -\nabla g)\| \\ &= \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} + \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}, \end{aligned}$$

donde en  $(\star)$  hemos usado la desigualdad triangular. Usando esto en la expresión anterior de  $\text{area}(A_H)$ , deducimos:

$$\begin{aligned} \text{area}(A_H) &\leq \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dV_{n-1} + \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2} dV_{n-1} \\ &\quad + \int_{\partial \Pi_H(A)} (f - g) dV_{n-2} \\ &= \text{area}(A). \end{aligned}$$

Notemos que el desarrollo anterior nos proporciona otra forma de probar la desigualdad del apartado (4) del teorema. Veamos ya (3.32): Si  $\text{area}(A_H) = \text{area}(A)$ , entonces se da la igualdad en  $(\star)$  c.p.d. en  $\Pi_H(A)$ , luego  $\nabla f = -\nabla g$  c.p.d. en  $\Pi_H(A)$ . Por tanto,  $\nabla(f + g) = 0$  c.p.d. en  $\Pi_H(A)$ , lo que implica que  $f + g$  es constante  $2a \in \mathbb{R}$  en  $\Pi_H(A)$ . Así,  $A$  es simétrico respecto al hiperplano  $\{x_n = a\}$ , que es paralelo a  $H$ .  $\square$

### 3.6. La desigualdad isoperimétrica

Veremos a continuación que la bola es el convexo que encierra más volumen para un perímetro dado, y que es el único convexo con esta propiedad de minimización.

**Teorema 3.6.1** *Sea  $A \in \mathcal{K}_0^n$  y  $\bar{\mathbb{B}} \subset \mathbb{R}^n$  una bola cerrada con  $\text{vol}_n(A) = \text{vol}_n(\bar{\mathbb{B}})$ . Entonces,  $\text{area}(\bar{\mathbb{B}}) \leq \text{area}(A)$ , y la igualdad es cierta si y sólo si  $\exists v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $A = \bar{\mathbb{B}} + v$ .*

*Demostración.* Como  $A \in \mathcal{K}_0^n$ , tenemos  $\text{int}(A) \neq \emptyset$  y  $\text{vol}_n(A) > 0$ . Dado  $r > 0$ , sea

$$\mathcal{F}_r = \{X \in \mathcal{K}_0^n \mid \text{vol}_n(X) = \text{vol}_n(A), \text{ y } X \text{ contiene una bola cerrada de radio } r\}.$$

Fijado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , sea

$$\mathcal{F}_r(x_0) = \{X \in \mathcal{F}_r \mid X \text{ contiene a } \bar{\mathbb{B}}(x_0, r)\}.$$

Es evidente que  $\forall X \in \mathcal{F}_r, \exists v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $X + v \in \mathcal{F}_r(x_0)$ . Por tanto,

$$\inf_{X \in \mathcal{F}_r} \text{area}(X) = \inf_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} \text{area}(X).$$

La razón de que usemos la familia  $\mathcal{F}_r(x_0)$  en vez de  $\mathcal{F}$  es que  $\mathcal{F}(x_0)$  es acotada en distancia de Hausdorff (Afirmación 3.6.2) mientras que  $\mathcal{F}$  no lo es: esto es consecuencia directa del Lema 2.1.3, ya que podemos tomar  $X \in \mathcal{F}_r$  conteniendo a una bola cerrada de radio  $r$  a distancia arbitrariamente grande del origen. Llamemos

$$D_r = \sup_{X \in \mathcal{F}_r} \text{diam}(X) = \sup_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} \text{diam}(X).$$

(El diámetro anterior está medido en la distancia usual de  $\mathbb{R}^n$ ).

**Afirmación 3.6.1** *En la situación anterior,  $D_r < \infty$ .*

*Demostración.* Basta comprobar que  $\exists R > 0$  tal que  $X \subseteq \bar{\mathbb{B}}(\vec{0}, R) \forall X \in \mathcal{F}_r(x_0)$ . Por reducción al absurdo, supongamos que existe una sucesión  $\{X_m\}_m \subset \mathcal{F}_r(x_0)$  y puntos  $x_m \in X_m$  tales que  $\|x_m\| \rightarrow \infty$  cuando  $m \rightarrow \infty$ . Como  $X_m$  es convexo y contiene a  $\bar{\mathbb{B}}(x_0, r)$  y a  $x_m$ ,  $X_m$  contendrá un cono cerrado  $C(x_m, r)$  de vértice  $x_m$  y base un disco  $(n-1)$ -dimensional centrado en  $x_0$  de radio  $r$ . Usando la fórmula (2.16),

$$\text{vol}_n(C(x_m, r)) = \frac{\omega_{n-1}}{n} r^{n-1} \|x_m - x_0\| \rightarrow \infty,$$

lo que contradice que  $\text{vol}_n(X_m) = \text{vol}_n(A)$  para todo  $m$ . □

**Afirmación 3.6.2**  $\mathcal{F}_r(x_0)$  es acotado en distancia de Hausdorff.

*Demostración.* Por el Lema 2.1.3, basta probar que  $\cup_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} X$  es acotado en  $\mathbb{R}^n$  con la distancia usual. Pero  $X \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, D_r) \forall X \in \mathcal{F}_r(x_0)$  por definición de diámetro, luego  $\cup_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} X \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, D_r)$ , luego  $\cup_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} X$  es acotado en  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Afirmación 3.6.3** *Existe un mínimo para el área en  $\mathcal{F}_r(x_0)$ , al que llamaremos  $X_\infty$ .*

*Demostración.* Sea  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_r(x_0)$  una sucesión con  $\text{area}(X_i) \searrow \inf_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} \text{area}(X)$ . Como  $\{X_i\}_i \subset \mathcal{K}^n$  es acotada en distancia de Hausdorff por serlo  $\mathcal{F}_r(x_0)$ , el Teorema de selección de Blaschke (Teorema 2.2.2) asegura que tras pasar a una parcial,  $\{X_i\}_i$  converge en distancia de Hausdorff a un compacto  $X_\infty \in \mathcal{K}^n$ . Como  $\text{vol}_n: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$  es continua (Teorema 2.3.1) y  $\text{area}: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$  es continua (Proposición 3.4.1), tenemos

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(X_\infty) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol}_n(X_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol}_n(A) = \text{vol}_n(A), \\ \text{area}(X_\infty) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \text{area}(X_i) = \inf_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} \text{area}(X). \end{aligned}$$

Además, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $i_0 \geq i$  tal que  $\forall i \geq i_0$ ,  $\overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset X_i \subset X_\infty + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1)$  luego  $X_\infty$  contiene a  $\overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$ , es decir,  $X_\infty \in \mathcal{F}_r(x_0)$ .  $\square$

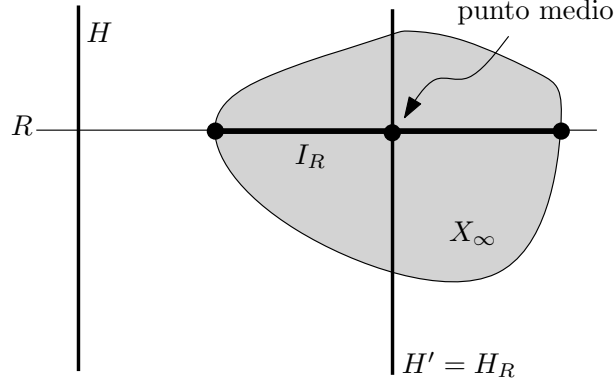
Nuestro siguiente objetivo será probar que  $X_\infty$  es una bola cerrada. Lo haremos en cuatro pasos.

**Afirmación 3.6.4** *Dado cualquier hiperplano  $H \subset \mathbb{R}^n$ , existe un hiperplano  $H'$  paralelo a  $H$  tal que  $X_\infty$  es simétrico respecto a  $H'$ .*

*Demostración.* Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  una recta ortogonal a  $H$ , que corte a  $X_\infty$  en al menos dos puntos. Así,  $R \cap X_\infty$  es un segmento cerrado no trivial  $I_R \subset R$ . Sea  $H_R$  el hiperplano paralelo a  $H$  (es decir, ortogonal a  $R$ ) que pasa por el punto medio de  $I_R$ . Si vemos que  $X_\infty$  es simétrico respecto a  $H' = H_R$  habremos terminado.

Sea  $(X_\infty)_{H'}$  el simetrizado de Steiner de  $X_\infty$  respecto a  $H'$ . Por el Teorema 3.5.1 tenemos  $(X_\infty)_{H'} \in \mathcal{K}^n$ ,  $\text{vol}_n[(X_\infty)_{H'}] = \text{vol}_n(X_\infty)$  ( $= \text{vol}_n(A)$ ) y  $\text{area}[(X_\infty)_{H'}] \leq \text{area}(X_\infty)$  con igualdad si y sólo si  $X_\infty$  es simétrico respecto a un hiperplano paralelo a  $H'$  o bien  $X_\infty$  está contenido en un hiperplano ortogonal a  $H'$ . Esta última opción no puede darse, ya que  $\text{vol}_n(X_\infty) > 0$ . Por otro lado, como  $\overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset X_\infty$ , por definición de simetrización de Steiner tenemos que  $(X_\infty)_{H'}$  contiene a la bola cerrada  $\overline{\mathbb{B}}(\Pi_{H'}(x_0), r)$ , donde  $\Pi_{H'}: \mathbb{R}^n \rightarrow H'$  es la proyección ortogonal sobre  $H'$ . Por tanto,  $(X_\infty)_{H'} \in \mathcal{F}_r$  luego  $\text{area}(X_\infty) \leq \text{area}[(X_\infty)_{H'}]$ . Esto implica que  $\text{area}(X_\infty) = \text{area}[(X_\infty)_{H'}]$ , luego  $X_\infty$  es simétrico respecto a un hiperplano paralelo a  $H'$ . Como  $H'$  pasa por el punto medio de  $I_R$ , deducimos que  $X_\infty$  es simétrico respecto a  $H'$ .  $\square$

A continuación definiremos el centro de la “futura” bola cerrada  $X_\infty$ . Tomemos una base ortonormal  $v_1, \dots, v_n$  de  $\mathbb{R}^n$ . Por la Afirmación 3.6.4, existen hiperplanos  $H_1, \dots, H_n$  de



$\mathbb{R}^n$ , ortogonales a estas direcciones, de forma que  $X_\infty$  es simétrico respecto a  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  el único punto de intersección en  $H_1 \cap \dots \cap H_n$ . Así,  $X_\infty$  es simétrico respecto a la simetría central  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de centro  $y_0$ . Por el mismo argumento de la demostración de la Afirmación 3.6.4,  $X_\infty$  contiene a  $\bar{\mathbb{B}}(y_0, r)$ ; en particular,  $y_0 \in \text{int}(X_\infty)$ .

**Afirmación 3.6.5** *Dado cualquier hiperplano  $H \subset \mathbb{R}^n$  que pase por  $y_0$ ,  $X_\infty$  es simétrico respecto a  $H$  (en particular,  $X_\infty$  sólo es simétrico respecto a hiperplanos que pasan por  $y_0$ ).*

*Demostración.* Por la Afirmación 3.6.4, existe un hiperplano  $H' \subset \mathbb{R}^n$  paralelo a  $H$  tal que  $X_\infty$  es simétrico respecto a  $H'$ . Se trata de comprobar que  $y_0 \in H'$  (con lo que  $H = H'$  y habremos terminado). Por reducción al absurdo, supongamos que  $y_0 \notin H'$  y llamemos  $y'_0$  al simétrico de  $y_0$  respecto a  $H'$ . Como  $y_0 \in \text{int}(X_\infty)$ , la intersección de la recta  $r$  que pasa por  $y_0, y'_0$  con  $X_\infty$  es un segmento cerrado  $I$  no trivial. Como  $X_\infty$  es simétrico respecto a  $\phi$ , se tiene

$$\phi(I) = \phi(X_\infty \cap r) = \phi(X_\infty) \cap \phi(r) = X_\infty \cap r = I,$$

luego  $y_0$  es el punto medio de  $I$ . Pero  $X_\infty$  es simétrico respecto a  $H'$ , e  $I$  es ortogonal a  $H'$  (por pasar por  $y_0, y'_0$ ), luego  $I$  también es simétrico respecto a  $H'$ . Esto nos dice que  $y_0 \in H'$ , contradicción.  $\square$

**Afirmación 3.6.6** *Si  $x_1, x_2 \in \partial X_\infty$ ,  $x_1 \neq x_2$ , entonces  $(x_1, x_2) \subset \text{int}(X_\infty)$ .*

*Demostración.* Caso 1: Existe  $z \in (x_1, x_2) \mid z \in \text{int}(X_\infty)$ . Usando dos veces el Lema 1.1.3 concluimos que  $\overline{(x_1, z]}$  y  $\overline{[z, x_2)} \subset \text{int}(X_\infty)$ , luego  $(x_1, x_2) \subset \text{int}(X_\infty)$ .

Caso 2:  $[x_1, x_2] \subset \partial X_\infty$ . Ampliamos  $[x_1, x_2]$  al mayor intervalo posible  $[y_1, y_2]$  contenido en  $\partial X_\infty$ . Por la Afirmación 3.6.4, existe un hiperplano  $H_1$  ortogonal a  $[y_1, y_2]$  tal que  $X_\infty$



es simétrico respecto a  $H_1$ . Por la Afirmación 3.6.5,  $H_1$  pasa por  $y_0$ . Como  $y_0 \in \text{int}(X_\infty)$  y  $[x_1, x_2] \subset \partial X_\infty$ , concluimos que  $y_0 \notin [y_1, y_2]$ . Además por simetría de  $X_\infty$  respecto a  $H_1$  y por la propiedad de maximalidad de  $[y_1, y_2]$ , tenemos que  $[y_1, y_2]$  corta a  $H_1$  en el punto medio  $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  de  $y_1$  e  $y_2$ . Para seguir debemos quitarnos los casos  $n = 1, 2$ .

Si  $n = 1$ , entonces  $y_0 \in X_\infty = [y_1, y_2]$ , contradicción. Supongamos  $n = 2$  y consideremos una simetría  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  respecto a una recta que pase por  $y_0$  y que corte al segmento  $(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), y_2)$  como en la Figura 3.10. Entonces,  $X_\infty$  es simétrico respecto a

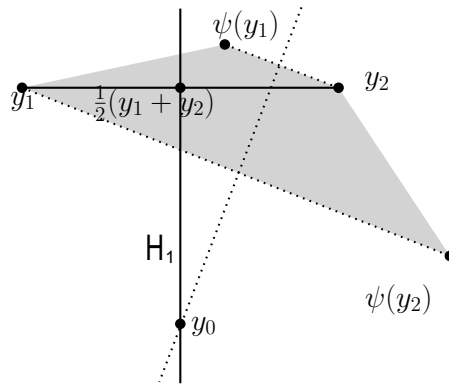


Figura 3.10: La zona sombreada está contenida en  $X_\infty$ .

$\psi$  (Afirmación 3.6.5) luego  $\psi(y_1), \psi(y_2)$  están en  $\psi(\partial X_\infty) = \partial X_\infty$ . Por ser  $X_\infty$  convexo, esto implica que  $\text{conv}(\{y_1, y_2, \psi(y_1), \psi(y_2)\}) \subset X_\infty$ , lo que contradice que  $[y_1, y_2] \subset \partial X_\infty$ . Así, que en lo que resta supondremos  $n \geq 3$ .

Sea  $L \subset \mathbb{R}^n$  la recta que pasa por  $y_0, \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ . Los hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$  con base  $L$  están parametrizados por  $H_\theta, \theta \in SO(n - 2)$ .

Dado  $H_\theta$ , sea  $\psi_\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la simetría respecto a  $H_\theta$ . Así,

$$D := \bigcup_{\theta \in SO(n-2)} \psi_\theta([y_1, y_2])$$

es el disco  $(n - 1)$ -dimensional contenido en el hiperplano  $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) + L^\perp$ , centrado en  $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  y con  $y_1, y_2 \in \partial D$ . Como  $X_\infty$  es simétrico respecto a  $\psi_\theta$  (Afirmación 3.6.5), tenemos  $\psi_\theta([y_1, y_2]) \subset \psi_\theta(X_\infty) = X_\infty$  para todo  $\theta \in SO(n - 2)$  luego  $D \subset X_\infty$ . Ahora consideramos simetrías  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  respecto a hiperplanos “inclinados” que pasan por  $y_0$  y que cortan al disco  $D$ , tal y como hicimos en el caso  $n = 2$  anterior, llegando a contradicción. Esto termina el caso 2 y con ello la demostración de la afirmación.  $\square$

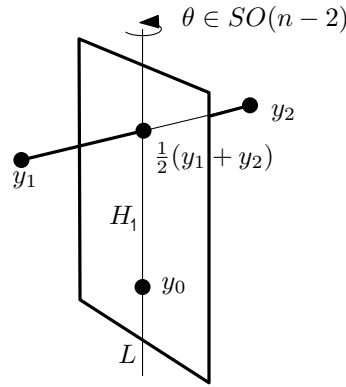


Figura 3.11: Las rotaciones alrededor de la recta  $L$  forman un grupo isomorfo a  $SO(n-2)$ .

**Afirmación 3.6.7** *Existe  $R > 0$  tal que  $X_\infty = \overline{\mathbb{B}}(y_0, R)$ .*

*Demostración.* Fijemos  $x_1, x_2 \in \partial X_\infty$ ,  $x_1 \neq x_2$ , que existen por el Teorema 1.2.1. Por la Afirmación 3.6.6,  $(x_1, x_2) \subset \text{int}(X_\infty)$ . Por la Afirmación 3.6.5,  $X_\infty$  es simétrico respecto al hiperplano  $H$  ortogonal a  $[x_1, x_2]$  que pasa por  $y_0$ . Como  $[x_1, x_2]$  es ortogonal a  $H$ ,  $(x_1, x_2) \subset \text{int}(X_\infty)$  y  $x_1, x_2 \in \partial X_\infty$ , deducimos que  $[x_1, x_2]$  es simétrico respecto a  $H$ , es decir,  $H$  pasa por el punto medio de  $x_1, x_2$ . Esto implica que  $d(y_0, x_1) = d(y_0, x_2)$ . Fijando  $x_1 \in \partial X_\infty$  y moviendo  $x_2 \in \partial X_\infty - \{x_1\}$ , obtenemos que  $d(y_0, x)$  es una constante (positiva) independiente de  $x \in \partial X_\infty$ . Por tanto,  $\partial X_\infty \subset \mathbb{S}^{n-1}(y_0, R)$ . Finalmente, por el Teorema 1.2.1,  $\partial X_\infty$  es homeomorfo a una esfera  $(n-1)$ -dimensional, luego  $\partial X_\infty = \mathbb{S}^{n-1}(y_0, R)$ . Esto implica que  $X_\infty = \overline{\mathbb{B}}(y_0, R)$ . Esto termina de demostrar el teorema.  $\square$

### Nota 3.6.1

- (1) Cabe preguntarse si la desigualdad isoperimétrica puede extenderse a  $A \in \mathcal{K}^n$ , es decir cuando  $\text{Vol}(A) = 0$ . Esto implica que  $k := \dim(A) < n$ . En este caso, aplicaremos la desigualdad isoperimétrica en  $\text{aff}(A) \cong \mathbb{R}^k$  (recordemos que el interior relativo de  $A$  en  $\text{aff}(A)$  es no vacío por la Proposición 1.3.1, luego podemos considerar  $A$  como un elemento de  $\mathcal{K}_0^k$  para aplicar el Teorema 3.6.1, para concluir que la desigualdad isoperimétrica sigue siendo cierta, comparando  $A$  con una bola de su mismo volumen  $k$ -dimensional.
- (2) La desigualdad isoperimétrica y la caracterización de la igualdad son ciertas sin imponer convexidad sobre  $A \subset \mathbb{R}^n$ , siempre que su volumen  $n$ -dimensional y el área de su borde tengan sentido. Por ejemplo, es válida si  $A$  es la región encerrada por una hipersuperficie compacta y orientable de  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.7. La desigualdad isodiamétrica

**Definición 3.7.1** Dado un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , se define su *inradio* y *circunradio* como

$$\text{inradio}(A) = \sup\{r > 0 \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ con } \mathbb{B}(x, r) \subset A\},$$

$$\text{circunradio}(A) = \inf\{R > 0 \mid \exists y \in \mathbb{R}^n \text{ con } A \subset \mathbb{B}(y, R)\}.$$

A una bola  $\mathbb{B}(x, r) \subset A$  con  $r = \text{inradio}(A)$  se le llama *in-bola*, y a una bola  $\mathbb{B}(y, R) \supset A$  con  $R = \text{circunradio}(A)$  se le llama *circumbola*.

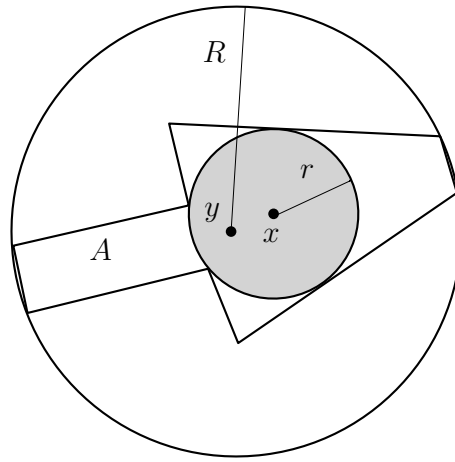


Figura 3.12:  $\mathbb{B}(x, r)$  es una in-bola y  $\mathbb{B}(y, R)$  es la circumbola de  $A$ .

Es fácil comprobar que la in-bola, si existe, no tiene porqué ser única. Sin embargo, la circumbola es única caso de existir: si  $\mathbb{B}(y_1, R), \mathbb{B}(y_2, R)$  son dos circumbolas de  $A \subset \mathbb{R}^n$  con  $y_1 \neq y_2$ , entonces  $A \subset \mathbb{B}(y_1, R) \cap \mathbb{B}(y_2, R)$  luego existen  $R' \in (0, R)$  e  $y_3 \in \mathbb{R}^n$  tales que  $\mathbb{B}(y_1, R) \cap \mathbb{B}(y_2, R) \subset \mathbb{B}(y_3, R')$ , lo que contradice la definición de circunradio.

Recordemos que  $\mathcal{C}^n$  es la familia de compactos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 3.7.1** *El circunradio  $\text{cr}: (\mathcal{C}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$  es una aplicación contractiva (en particular, es continua en la distancia de Hausdorff):*

$$|\text{cr}(A) - \text{cr}(A')| \leq \delta(A, A'), \quad \forall A, A' \in \mathcal{C}^n.$$

*Demostración.* Sean  $A, A' \in \mathcal{C}^n$ . Denotemos por  $\bar{\mathbb{B}} = \bar{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1)$ . Por definición de circunradio de  $A'$ , existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $A' \subset \bar{\mathbb{B}}(x, \text{cr}(A'))$ . Así,

$$A \subset A' + \delta(A, A')\bar{\mathbb{B}} \subset \bar{\mathbb{B}}(x, \text{cr}(A')) + \delta(A, A')\bar{\mathbb{B}}$$

$$= \{x\} + \text{cr}(A')\overline{\mathbb{B}} + \delta(A, A')\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(x, \text{cr}(A') + \delta(A, A')),$$

luego por definición de circunradio de  $A$ ,  $\text{cr}(A) \leq \text{cr}(A') + \delta(A, A')$ . Análogamente se prueba que  $\text{cr}(A') \leq \text{cr}(A) + \delta(A, A')$ .  $\square$

**Lema 3.7.2** *La aplicación diámetro,  $\text{diam}: (\mathcal{C}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$ , es continua.*

*Demostración.* Sea  $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$  una sucesión convergente a  $A \in \mathcal{C}^n$  en distancia de Hausdorff, y sea  $\varepsilon > 0$ . Veamos que  $\exists m_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{diam}(A_m) - \text{diam}(A) \leq \varepsilon \forall m \geq m_0$ . Invirtiendo los papeles de  $A_m, A$  se probará análogamente que  $\text{diam}(A) - \text{diam}(A_m) \leq \varepsilon$  a partir de un natural (dependiendo de  $\varepsilon$ ), y habremos terminado.

Necesitaremos la siguiente caracterización del diámetro (que es evidente):

$$(3.33) \quad \text{diam}(A) = \inf\{R > 0 \mid A \subset \overline{\mathbb{B}}(x, R), \forall x \in A\}.$$

Tomemos  $x \in A_m$ . Como  $A_m \subset A + \delta(A_m, A)\overline{\mathbb{B}}$ , existe  $y_m \in A$  tal que  $x \in \overline{\mathbb{B}}(y_m, \delta(A_m, A))$ . Como  $y_m \in A$ , por definición de diámetro tenemos  $A \subset \overline{\mathbb{B}}(y_m, \text{diam}(A))$ . Por tanto,

$$(3.34) \quad A_m \subset A + \delta(A_m, A)\overline{\mathbb{B}} \subset \overline{\mathbb{B}}(y_m, \text{diam}(A)) + \delta(A_m, A)\overline{\mathbb{B}}.$$

Por otro lado, dado  $z \in \overline{\mathbb{B}}(y_m, \text{diam}(A))$  se tiene  $d(z, x) \leq d(z, y_m) + d(y_m, x) \leq \text{diam}(A) + d(y_m, x) \leq \text{diam}(A) + \delta(A_m, A)$ . Por tanto,

$$(3.35) \quad \overline{\mathbb{B}}(y_m, \text{diam}(A)) \subset \overline{\mathbb{B}}(x, \text{diam}(A) + \delta(A_m, A)).$$

De (3.34) y (3.35) se tiene

$$(3.36) \quad A_m \subset \overline{\mathbb{B}}(x, \text{diam}(A) + \delta(A_m, A)) + \delta(A_m, A)\overline{\mathbb{B}} \subset \overline{\mathbb{B}}(x, \text{diam}(A) + 2\delta(A_m, A)).$$

Como  $\delta(A_m, A) \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  a partir del cual  $2\delta(A_m, A) < \varepsilon$ , luego (3.36) nos dice que  $A_m \subset \overline{\mathbb{B}}(x, \text{diam}(A) + \varepsilon) \forall m \geq m_0$ . Como  $x$  es arbitrario en  $A_m$  y  $m_0$  no depende de  $x$ , de la caracterización (3.33) para el diámetro de  $A_m$  obtenemos que  $\text{diam}(A_m) \leq \text{diam}(A) + \varepsilon \forall m \geq m_0$ .  $\square$

Ahora vamos a minimizar el circunradio en cierta familia de compactos convexos dependiendo de un  $A \in \mathcal{K}_0^n$ :

**Lema 3.7.3** *Dado  $A \in \mathcal{K}_0^n$ , consideremos la familia*

$$\mathcal{N}(A) = \{C \in \mathcal{K}_0^n \mid \text{vol}(A) \leq \text{vol}(C), \quad \text{diam}(C) \leq \text{diam}(A)\}.$$

*Entonces, existe  $C \in \mathcal{N}(A)$  tal que  $\text{cr}(C) = \min_{C' \in \mathcal{N}(A)} \text{cr}(C')$ .*

*Demostración.* Notemos que la familia  $\mathcal{N}(A)$  es no vacía porque  $A \in \mathcal{N}(A)$ . Como  $\mathcal{N}(A)$  es cerrada por traslaciones en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{N}(A)$  no puede ser acotada en distancia de Hausdorff (Lema 2.1.3). Dado  $C \in \mathcal{N}(A)$ , denotaremos por  $\overline{\mathbb{B}}_C$  al cierre de la circumbola de  $C$ .  $\overline{\mathbb{B}}_C$  no pertenece en general a  $\mathcal{N}(A)$ , porque no tiene porqué cumplir  $\text{diam}(\overline{\mathbb{B}}_C) \leq \text{diam}(A)$ .

Consideremos la subfamilia

$$\mathcal{H}(A) = \{C \in \mathcal{N}(A) \mid C \subset \overline{\mathbb{B}}_A\}.$$

De nuevo  $\mathcal{H}(A) \neq \emptyset$  porque  $A \in \mathcal{H}(A)$ . Como  $\cup_{C \in \mathcal{H}(A)} C \subset \overline{\mathbb{B}}_A$ , entonces  $\cup_{C \in \mathcal{H}(A)} C$  es acotado en  $\mathbb{R}^n$  con la distancia usual. Por el Lema 2.1.3,  $\mathcal{H}(A)$  es acotado en la distancia de Hausdorff.

Veamos que

$$(3.37) \quad \inf_{C \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C) = \inf_{C \in \mathcal{N}(A)} \text{cr}(C).$$

La desigualdad  $\geq$  se deduce de que  $\mathcal{H}(A) \subset \mathcal{N}(A)$ . Por reducción al absurdo, supongamos que  $\inf_{C \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C) > \inf_{C \in \mathcal{N}(A)} \text{cr}(C)$ . Así, existe  $C_0 \in \mathcal{N}(A) - \mathcal{H}(A)$  tal que  $\text{cr}(C_0) < \inf_{C' \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C')$ . Dado  $C' \in \mathcal{H}(A)$ , tenemos  $C' \subset \overline{\mathbb{B}}_A$  luego  $\text{cr}(C') \leq \text{cr}(\overline{\mathbb{B}}_A) = \text{cr}(A)$ , de donde

$$\text{cr}(C_0) < \inf_{C' \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C') \leq \text{cr}(A).$$

Lo anterior implica que existe  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $C_0 + v \subset \overline{\mathbb{B}}_A$ , luego  $C_0 + v \in \mathcal{H}(A)$  y así,

$$\inf_{C' \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C') \leq \text{cr}(C_0 + v) = \text{cr}(C_0) < \inf_{C' \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C'),$$

contradicción. Esto prueba (3.37).

Finalmente, tomemos una sucesión  $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(A)$  tal que  $\text{cr}(C_i) \searrow \inf_{C \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C)$ . Como  $\{C_i\}_i \subset \mathcal{K}^n$  es acotada en distancia de Hausdorff por serlo  $\mathcal{H}(A)$ , el Teorema de selección de Blaschke (Teorema 2.2.2) asegura que tras pasar a una parcial,  $\{C_i\}_i$  converge en distancia de Hausdorff a un compacto convexo  $C_\infty \in \mathcal{K}^n$ . Como  $\text{vol}_n(A) \leq \text{vol}_n(C_i) \forall i$  y  $\text{vol}_n: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$  es continua (Teorema 2.3.1), tenemos  $\text{vol}_n(A) \leq \text{vol}_n(C_\infty)$ . En particular,  $\text{vol}_n(C_\infty) > 0$  luego  $C_\infty \in \mathcal{K}_0^n$ .

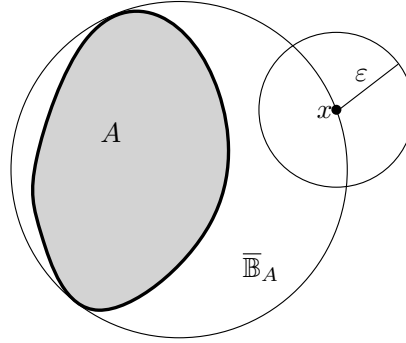
Como  $\text{diam}(C_i) \leq \text{diam}(A) \forall i$  y  $\text{diam}: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$  es continua (Lema 3.7.2), tenemos  $\text{diam}(C_\infty) \leq \text{diam}(A)$ . Por tanto,  $C_\infty \in \mathcal{N}(A)$ . Además,

$$\text{cr}(C_\infty) \geq \inf_{C' \in \mathcal{N}(A)} \text{cr}(C') \stackrel{(3.37)}{=} \inf_{C' \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C') = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{cr}(C_i) \stackrel{(\text{Lema 3.7.1})}{=} \text{cr}(C_\infty),$$

de donde deducimos que  $C_\infty$  minimiza el circunradio en  $\mathcal{N}(A)$ . □

**Lema 3.7.4** Sea  $A \in \mathcal{K}_0^n$  y sea  $\overline{\mathbb{B}}_A = \overline{\mathbb{B}}(c, cr(A))$  su circumbola cerrada. Si  $A \neq \overline{\mathbb{B}}_A$ , entonces tras simetrizar  $A$  una cantidad finita de veces en hiperplanos podemos decrecer estrictamente su circunradio. Es decir, existen hiperplanos  $H_1, \dots, H_k \subset \mathbb{R}^n$  tales que  $cr([\dots (A_{H_1})_{H_2} \dots]_{H_k}) < cr(A)$ .

*Demostración.* Veamos que  $\partial\overline{\mathbb{B}}_A - A \neq \emptyset$ : en caso contrario,  $\partial\overline{\mathbb{B}}_A \subset A$  luego por convexidad de  $A$ ,  $\overline{\mathbb{B}}_A \subset A$  y por tanto  $\overline{\mathbb{B}}_A = A$ , contradicción. Por tanto, podemos elegir un punto  $x \in \partial\overline{\mathbb{B}}_A - A$ . Como  $A$  es cerrado,  $\partial\overline{\mathbb{B}}_A - A$  es abierto en  $\partial\overline{\mathbb{B}}_A$  luego existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$  no contiene puntos de  $A$ .

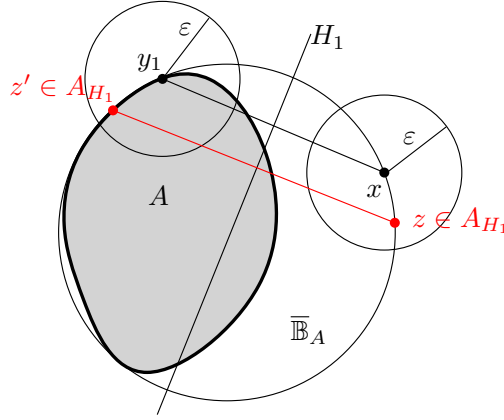


Vamos a localizar ahora los puntos de  $A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$ : consideremos el recubrimiento por abiertos  $\{\mathbb{B}(y, \varepsilon) \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A \mid y \in A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A\}$  del compacto  $A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$  (aquí  $\varepsilon > 0$  es fijo, definido arriba). Por compacidad, existen  $y_1, \dots, y_k \in A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$  tales que

$$(3.38) \quad A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A \subset \left[ \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}(y_i, \varepsilon) \right] \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A.$$

Dado  $i = 1, \dots, k$ , notemos que  $x \neq y_i$  (ya que  $x \in \partial\overline{\mathbb{B}}_A - A$  e  $y \in A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$ ). Sea  $H_i \subset \mathbb{R}^n$  el hiperplano ortogonal al segmento  $[x, y_i]$  que pasa por el punto medio de dicho segmento. Como  $H_i$  biseca a  $[x, y_i]$ , el centro  $c$  de  $\overline{\mathbb{B}}_A$  pertenece a  $H_i$ . Como esto puede hacerse para cada  $i$ , tenemos  $c \in H_1 \cap \dots \cap H_k$ .

El siguiente paso consiste en hacer simetrización de Steiner de  $A$  respecto a  $H_1$ . Veamos que  $A_{H_1} \cap [\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A] = \emptyset$ : por reducción al absurdo, supongamos que  $\exists z \in A_{H_1} \cap [\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A]$ . Como  $A_{H_1}$  es simétrico respecto a  $H_1$ , el simétrico  $z'$  de  $z$  respecto a  $H_1$  estará en  $A_{H_1}$ . Como  $A_{H_1}$  es convexo,  $[z, z'] \subset A_{H_1}$  luego por definición de simetrización de Steiner,  $A$  contendrá un segmento de longitud  $\|z - z'\|$  en la recta afín ortogonal a  $H_1$  que pasa por  $z$ . Pero  $A \subset \overline{\mathbb{B}}_A$ , luego  $[z, z'] \subset A$ . En particular,  $z \in A$ , lo que contradice que  $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$  no contiene puntos de  $A$ .



El mismo argumento prueba que  $A_{H_1} \cap [\mathbb{B}(y_1, \varepsilon) \cap \partial\bar{\mathbb{B}}_A] = \emptyset$ . Con esto, hemos cambiado  $A$  por  $A_{H_1}$  y hemos obtenido que  $A_{H_1}$  no corta a  $\partial\bar{\mathbb{B}}_A$  en  $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cup \mathbb{B}(y_1, \varepsilon)$ .

Ahora repetimos el proceso simetrizando  $A_{H_1}$  respecto al hiperplano  $H_2$ , obteniendo  $(A_{H_1})_{H_2}$ , que por lo anterior no corta a  $\partial\bar{\mathbb{B}}_A$  en  $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cup \mathbb{B}(y_2, \varepsilon)$ . Pero  $(A_{H_1})_{H_2}$  tampoco corta a  $\partial\bar{\mathbb{B}}_A$  en  $\mathbb{B}(y_1, \varepsilon)$ : si existiera  $z \in (A_{H_1})_{H_2} \cap [\mathbb{B}(y_1, \varepsilon) \cap \partial\bar{\mathbb{B}}_A]$ , entonces por simetría de  $(A_{H_1})_{H_2}$  respecto a  $H_2$ , el simétrico  $z'$  de  $z$  respecto a  $H_2$  estaría en  $(A_{H_1})_{H_2}$ . Como  $(A_{H_1})_{H_2}$  es convexo,  $[z, z']$  estaría contenido en  $(A_{H_1})_{H_2}$  luego por definición de simetrización de Steiner,  $A_{H_1}$  contendría un segmento de longitud  $\|z - z'\|$  en la recta afín ortogonal a  $H_2$  que pasa por  $z$ . Pero  $A_{H_1} \subset \bar{\mathbb{B}}_A$ , luego  $[z, z'] \subset A_{H_1}$ . En particular,  $z \in A_{H_1}$ , lo que contradice que  $A_{H_1} \cap [\mathbb{B}(y_1, \varepsilon) \cap \partial\bar{\mathbb{B}}_A] = \emptyset$ . Por tanto,  $(A_{H_1})_{H_2}$  no corta a  $\partial\bar{\mathbb{B}}_A$  en  $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cup \mathbb{B}(y_1, \varepsilon) \cup \mathbb{B}(y_2, \varepsilon)$ .

Reiterando el proceso, obtenemos que la simetrización de Steiner  $[\dots(A_{H_1})_{H_2}\dots]_{H_k}$  no corta a  $\partial\bar{\mathbb{B}}_A$  en  $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cup \mathbb{B}(y_1, \varepsilon) \cup \dots \cup \mathbb{B}(y_k, \varepsilon)$ . Por (3.38),  $[\dots(A_{H_1})_{H_2}\dots]_{H_k}$  no corta a  $\partial\bar{\mathbb{B}}_A$  en ningún punto. Esto nos permite decrecer *estrictamente* el radio de la circumbola de  $[\dots(A_{H_1})_{H_2}\dots]_{H_k}$  en relación con el radio  $\text{cr}(A)$  de  $\bar{\mathbb{B}}_A$ .  $\square$

Ya estamos en condiciones de probar el resultado central de esta sección. Recordemos que  $\omega_n = \text{vol}_n(\bar{\mathbb{B}}(1))$ .

**Teorema 3.7.1 (Desigualdad isodiamétrica)** *Sea  $A \in \mathcal{K}_0^n$ . Entonces,*

$$(3.39) \quad \text{vol}_n(A) \leq \omega_n \left( \frac{1}{2} \text{diam}(A) \right)^n,$$

*y la igualdad es cierta si y sólo si  $A$  es una bola cerrada.*

*Demostración.* Consideremos la familia  $\mathcal{N}(A) = \{C \in \mathcal{K}_0^n \mid \text{vol}(A) \leq \text{vol}(C), \text{diam}(C) \leq \text{diam}(A)\}$  del Lema 3.7.3. Por ese lema, existe  $C \in \mathcal{N}(A)$  tal que  $\text{cr}(C) = \min_{C' \in \mathcal{N}(A)} \text{cr}(C')$ .

Veamos que  $C = \overline{\mathbb{B}}_C$ , la circumbola cerrada de  $C$ : si  $C \neq \overline{\mathbb{B}}_C$ , entonces el Lema 3.7.4 asegura que tras aplicar a  $C$  una cantidad finita de simetrizaciones de Steiner, producimos un nuevo compacto convexo  $C'$  que cumple  $\text{cr}(C') < \text{cr}(C)$ . Pero  $\text{vol}_n(C') = \text{vol}_n(C)$  (apartado (2) del Teorema 3.5.1) y  $\text{diam}(C') \leq \text{diam}(C)$  (apartado (3) del Teorema 3.5.1), luego  $C' \in \mathcal{N}(A)$ , lo que contradice que  $C$  minimiza el circunradio en  $\mathcal{N}(A)$ . Por tanto,  $C = \overline{\mathbb{B}}_C$ .

Finalmente,

$$\begin{aligned} \text{vol}(A) &\leq \text{vol}(C) && (\text{def. de } \mathcal{N}(A)) \\ &= \text{vol}(\overline{\mathbb{B}}_C) \\ &= \omega_n \left( \frac{1}{2} \text{diam}(\overline{\mathbb{B}}_C) \right)^n \\ &\leq \omega_n \left( \frac{1}{2} \text{diam}(A) \right)^n. && (C = \overline{\mathbb{B}}_C \in \mathcal{N}(A)) \end{aligned}$$

Si la igualdad se da en (3.39), entonces como el miembro de la derecha de (3.39) es el volumen de la circumbola cerrada  $\overline{\mathbb{B}}_A$  de  $A$ , tenemos que  $A \subset \overline{\mathbb{B}}_A$  ambos con el mismo volumen. Por tanto,  $\text{vol}(\overline{\mathbb{B}}_A - A) = 0$ . Como  $\overline{\mathbb{B}}_A - A$  es abierto en  $\overline{\mathbb{B}}_A$ , tenemos  $\overline{\mathbb{B}}_A - A = \emptyset$ , es decir,  $A = \overline{\mathbb{B}}_A$ .  $\square$

Finalmente, extenderemos la desigualdad isodiamétrica a compactos no necesariamente convexos.

**Corolario 3.7.1** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un compacto con interior no vacío. Entonces,*

$$(3.40) \quad \text{vol}_n(X) \leq \omega_n \left( \frac{1}{2} \text{diam}(X) \right)^n,$$

*y la igualdad es cierta si y sólo si  $X$  es una bola cerrada.*

*Demostración.* Como  $X$  es compacto,  $\text{conv}(X)$  es también compacto. Como  $\emptyset \neq \text{int}(X) \subset \text{int}(\text{conv}(X))$ , tenemos  $\text{conv}(X) \in \mathcal{K}_0^n$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}(X) &\leq \text{vol}(\text{conv}(X)) \\ &\stackrel{(\star)}{\leq} \omega_n \left( \frac{1}{2} \text{diam}(\text{conv}(X)) \right)^n && (\text{Teorema 3.7.1}) \\ &= \omega_n \left( \frac{1}{2} \text{diam}(X) \right)^n. && (\text{Teorema 1.6.2}) \end{aligned}$$

Si la igualdad se da en (3.40), entonces  $\text{vol}(X) = \text{vol}(\text{conv}(X))$ . Como  $X \subset \text{conv}(X)$ , entonces  $\text{vol}(\text{conv}(X) - X) = 0$ . Como  $\text{conv}(X) - X$  es abierto en  $\text{conv}(X)$ , tenemos  $\text{conv}(X) - X = \emptyset$ , es decir,  $X = \text{conv}(X)$ . Además, la igualdad en  $(\star)$  implica que  $\text{conv}(X)$  es una bola cerrada de radio  $\text{diam}(X)/2$ , y hemos terminado.  $\square$



### 3.8. Ejercicios.

1. Dados  $K_1, \dots, K_r \in \mathcal{K}^n$ , consideremos la función

$$(3.41) \quad f_n(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = \text{vol}_n(\varepsilon_1 K_1 + \dots + \varepsilon_r K_r), \quad \forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \geq 0.$$

Es posible probar que la función  $f_n(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  es un polinomio homogéneo de grado  $n$  en las variables  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ , es decir, una suma finita de monomios de la forma

$$c(i_1, \dots, i_r) \varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_r^{i_r},$$

donde  $i_1, \dots, i_r \in \{0, \dots, n\}$  con  $i_1 + \dots + i_r = n$  y  $c(i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{R}$ . Estos coeficientes  $c(i_1, \dots, i_r)$  dependen de los compactos convexos  $K_1, \dots, K_r$  de forma continua en distancia de Hausdorff.

(A) Probar que dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , el volumen de Lebesgue de  $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) \leq \varepsilon\}$  es  $f_n(1, \varepsilon)$ , donde hemos tomado  $K_1 = K$ ,  $K_2 = \overline{\mathbb{B}}$  en (3.41).

(B) Sean  $K_1 = [-1, 2] \times [-1, 2]$ ,  $K_2 = [-2, -1] \times [1, 2]$ . Calcular  $f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  en este caso.

2. Se define el *volumen mixto* de  $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$  como

$$(3.42) \quad V_n(K_1, \dots, K_n) = \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \dots \partial \varepsilon_n} \Big|_{(0, \dots, 0)} \text{vol}_n(\varepsilon_1 K_1 + \dots + \varepsilon_n K_n).$$

Calcular el volumen mixto  $V_2(K_1, K_2)$ , donde  $K_1, K_2$  son las siguientes parejas de compactos convexos en  $\mathbb{R}^2$ :

(A)  $K_1 = [0, 3] \times [-2, 1]$ ,  $K_2 = \text{conv}(\{(0, 0), (0, 1), (2, 1), (3, 0)\})$ .

(B)  $K_1 = [-1, 2] \times [-1, 2]$ ,  $K_2 = [-2, -1] \times [1, 2]$ . Calcular también  $V_2(K_1, K_1)$ ,  $V_2(K_2, K_2)$ ,  $V_2(K_2, K_1)$ .

(C)  $K_1 = \overline{\mathbb{B}}((-1, 0), 1)$ ,  $K_2 = \overline{\mathbb{B}}((1, 4), 3)$ ,  $K_3 = \overline{\mathbb{B}}((2, 1), 2)$ . Calcular en este caso  $V_2(K_i, K_j)$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ .

3. Con la definición anterior de volumen mixto, probar que para cada  $K \in \mathcal{K}^2$  se tienen

(A)  $V_2(K, K) = 2 \text{vol}_2(K)$ ,  $V_2(K, \overline{\mathbb{B}}) = \text{contenido de Minkowski}(K)$ .

(B) Generalizar las fórmulas del apartado anterior probando que si  $K \in \mathcal{K}^n$ , entonces  $V_n(K, \dots, K) = n! \text{vol}_n(K)$ ,  
 $V_n(K, \overset{n-1}{\overline{\mathbb{B}}}, K, \overline{\mathbb{B}}) = (n-1)! \text{contenido de Minkowski}(K)$ .

4. Sean  $P = \text{conv}(\{(0, 0), (-1, 2), (2, 0)\}) \subset \mathbb{R}^2$  y  $H$  la recta en  $\mathbb{R}^2$  de ecuación  $x = y$ . Calcular  $P_H$ ,  $\text{area}(P)$  y  $\text{area}(P_H)$ .

5. Sean  $P = \text{conv}(\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}) \subset \mathbb{R}^2$  y  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$ . Calcular  $P_H$ ,  $\text{area}(P)$  y  $\text{area}(P_H)$ .
6. Probar que la desigualdad isoperimétrica (Teorema 3.6.1) es equivalente a la siguiente propiedad: Sea  $A \in \mathcal{K}_0^n$  y  $\mathbb{B}$  cualquier bola cerrada. Entonces,

$$(3.43) \quad \left( \frac{\text{vol}_n(A)}{\text{vol}_n(\mathbb{B})} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left( \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\mathbb{B})} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

y la igualdad es cierta si y sólo si  $A$  es una bola cerrada  $n$ -dimensional.

7. Sean  $K, L \in \mathcal{K}_0^n$ . Probar que las siguientes desigualdades son equivalentes:

(A)  $\text{vol}_n(K)^{\frac{1}{n}} + \text{vol}_n(L)^{\frac{1}{n}} \leq \text{vol}_n(K + L)^{\frac{1}{n}}$ .

(B)  $(1 - \lambda)\text{vol}_n(K)^{\frac{1}{n}} + \lambda \text{vol}_n(L)^{\frac{1}{n}} \leq \text{vol}_n((1 - \lambda)K + \lambda L)^{\frac{1}{n}}, \forall \lambda \in (0, 1)$ .

(C)  $s \text{vol}_n(K)^{\frac{1}{n}} + t \text{vol}_n(L)^{\frac{1}{n}} \leq \text{vol}_n(sK + tL)^{\frac{1}{n}}, \forall s, t \geq 0$ .

La *desigualdad de Brunn-Minkowski* asegura que cualquiera de las anteriores desigualdades es cierta, y que la igualdad se cumple si y sólo si  $K$  y  $L$  difieren en una traslación y una dilatación (es decir,  $K, L$  son homotéticos). Usar la definición de contenido de Minkowski de un compacto convexo para deducir la desigualdad isoperimétrica (en su forma (3.43), sin la caracterización de igualdad<sup>2</sup>) a partir de la desigualdad de Brunn-Minkowski.

---

<sup>2</sup>La caracterización de la igualdad en la desigualdad isoperimétrica también puede deducirse de la igualdad en la desigualdad de Brunn-Minkowski, pero el argumento es algo más complicado.

# Bibliografía

- [1] Richard J. Gardner, *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, 1995.
- [2] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.