Joaquín Pérez Muñoz

Algebra Lineal y Geometría II

Índice general

Capítulo 0

Introducción

Estos son los apuntes de la asignatura **Algebra Lineal y Geometría II,** obligatoria de 6 créditos en el segundo cuatrimestre del primer curso del Grado en Físicas de la Universidad de Granada. Son de libre distribución, y pueden bajarse de la página web
`http://wpd.ugr.es/~jperez/algebra-lineal-y-geometria-ii/`
Están basados en apuntes previos del profesor Miguel Sánchez, y en ellos encontrarás los enunciados y demostraciones de los resultados contenidos en el programa de la asignatura, distribuidos por temas tal y como ésta se estructura en la Guía Docente. Algunas veces, las demostraciones están resumidas y dejan que el lector compruebe los detalles como ejercicio. Además de éstos, al final de cada tema hay una relación de ejercicios propuestos.

Como siempre en estos casos, los apuntes no estarán libres de errores, y es labor conjunta del autor y de los lectores mejorarlos, un trabajo que nunca se termina. Si encuentras algún error, por favor envía un e-mail a la dirección de correo electrónico `jperez@ugr.es`
Todo lo que se dice en los apuntes puede encontrarse, a menudo explicado con más profundidad, en numerosos textos básicos, como los que aparecen relacionados en la Guía Docente.

Granada, enero de 2020
Joaquín Pérez Muñoz

Capítulo 1

Aplicaciones multilineales y tensores

1.1. Repaso y notación sobre el espacio dual

El objetivo de esta sección es doble. En primer lugar, se hace un repaso de algunos elementos del espacio dual que serán útiles para estudiar los tensores. En segundo, se introduce la notación de índices 'arriba y abajo', que resultará muy conveniente para el estudio sistemático de tensores arbitrarios.

Dado un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), se define el espacio dual $V^*(\mathbb{K})$ de $V(K)$ como:

$$V^*(\mathbb{K}) := \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = \{\varphi \colon V \to \mathbb{K} \mid \varphi \text{ lineal } \}.$$

A cada elemento del dual $\varphi \in V^*$ se le llama *forma lineal.* El espacio dual $V^*(\mathbb{K})$, dotado de sus operaciones naturales, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Si V tiene dimensión finita $n \in \mathbb{N}$ y fijamos una base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V, y tomamos $\{1\}$ como base del espacio vectorial $\mathbb{K}(\mathbb{K})$, entonces para cada $\varphi \in V^*$ podemos calcular la matriz de la aplicación lienal φ en dichas bases,

$$M(\varphi, B, \{1\}) = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)).$$

De esta forma, si $v = \sum_{i=1}^{n} a^i v_i \in V$ entonces

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) a^i = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)) \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = M(\varphi, B, \{1\})) \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}.$$

En la situación anterior, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.1.1 *Dada una base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V, existe una única base ordenada $B^* = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ de V^* que verifica $\varphi^i(v_j) = \delta_i^j$ (delta de Kronecker). A esta base B^* se la llama* base dual *de la base B.*

En la situación del Teorema 1.1.1, dado $v \in V$ sus coordenadas $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ respecto a B se pueden calcular como

$$a_i = \varphi^i(v), \quad i = 1, \ldots n.$$

y dualmente, si $V \in V^*$ tiene coordenadas $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ respecto a B^*, entonces

$$b_i = \varphi(v_i), \quad i = 1, \ldots n.$$

En cuanto al cambio de base, se tiene que:

Proposición 1.1.1 *Si B, B' son bases ordenadas de $V(\mathbb{K})$ y $B^*, (B')^*$ son sus bases duales, entonces las matrices de cambio de bases entre B, B' y entre $(B')^*, B^*$ están relacionadas mediante*

$$M(1_V, B', B) = M(1_{V^*}, B^*, (B')^*)^t,$$

donde A^t denota la transpuesta de una matriz A.

Demostración. Pongamos $B = (v_1, \ldots, v_n)$, $B' = (v_1', \ldots, v_n')$, $B^* = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$, $(B')^* = ((\varphi')^1, \ldots, (\varphi')^n)$. Además, escribimos $\varphi^j = \sum_{i=1}^n a_{ij}(\varphi')^i$, $v_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} v_i'$, es decir,

$$A = (a_{ij})_{i,j} = M(1_{V^*}, B^*, (B')^*), \quad C = (c_{ij})_{i,j} = M(1_V, B, B').$$

Entonces,

$$\delta_h^j = \varphi^j(v_h) = \left[\sum_{i=1}^n a_{ij}(\varphi')^i\right](v_h) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(\varphi')^i(v_h) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(\varphi')^i \left(\sum_{k=1}^n c_{kh} v_k'\right)$$

$$= \sum_{i,k} a_{ij} c_{kh} (\varphi')^i(v_k') = \sum_{i,k} a_{ij} c_{kh} \delta_k^i = \sum_i a_{ij} c_{ih} = (A^t \cdot C)_{jh},$$

de donce $A^t \cdot C = I_n$, y por tanto $M(1_{V^*}, B^*, (B')^*)^t = A^t = C^{-1} = M(1_V, B, B')^{-1} = M(1_V, B', B)$. □

Dados $V(\mathbb{K}), V'(\mathbb{K})$ dos espacios vectoriales (no necesariamente de dimensión finita) y $f \colon V \to V'$ una aplicación lineal, se define la *traspuesta* de f como la aplicación $f^t \colon (V')^* \to V^*$ tal que

$$f^t(\varphi') = \varphi' \circ f, \quad \forall \varphi' \in (V')^*.$$

f^t resulta ser lineal, es decir, $f^t \in \mathcal{L}((V')^*, V^*)$ para cada $f \in \mathcal{L}(V, V')$.

La trasposición define un isomorfismo de espacios vectoriales $f \in \mathcal{L}(V, V') \mapsto f^t \in \mathcal{L}((V')^*, V^*)$. En cuanto a la composición y la trasposición, es fácil probar que

$$(g \circ f)^t = f^t \circ g^t, \forall f \in \mathcal{L}(V, V'), g \in \mathcal{L}(V', V'').$$

Además, si V, V' tienen dimensiones finitas n, m respectivamente y B, B' son bases respectivas de V y V', con bases duales B^*, $(B')^*$, entonces

$$M(f^t, (B')^*, B^*) = M(f, B, B')^t \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}).$$

Si $V(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita), y V^* es su espacio dual, podemos considerar $V^* = (V^*)^*$, el bidual de V:

$$V^{**} = \{\Gamma \colon V^* \to \mathbb{K} \mid \Gamma \text{ lineal } \},$$

que vuelve a ser un espacio vectorial. Hay una aplicación natural $\Phi \colon V \to V^{**}$ dada por

$$\Phi(x) = \Phi_x \colon V^* \to \mathbb{K}, \quad \Phi_x(\varphi) = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in V, \forall x \in V. \tag{1.1}$$

La aplicación Φ_x es lineal, con lo que Φ está bien definida. También Φ es lineal, claramente. Además, Φ es inyectiva ya que si $x \in \ker(\Phi)$, entonces $\varphi(x) = 0 \ \forall \varphi \in V$. Esto implica que $x = 0$ porque en caso contrario, podríamos ver x como el primer vector x_1 de una base ordendada B de V, y entonces la primera forma lineal φ^1 de la base ordenada dual de B cumpliría $\varphi^1(x) = 1 \neq 0$, contradicción. Así que Φ es un monomorfismo de espacios vectoriales.

En el caso de que $\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$, tenemos que $\dim V^* = \dim V^{**} = n$ y por tanto Φ es un isomorfismo de espacios vectoriales (éste es el contenido del llamado *Teorema de Reflexividad*). Es conveniente resaltar que en este caso de dimensión finita, V y V^* son isomorfos pero no existe ningún isomorfismo natural entre ellos, donde por natural entendemos que no dependa de las bases elegidas en V y V^* para definirlo (un isomorfismo lleva bases en bases). Sin embargo, el isomorfismo Φ entre V y V^{**} es natural, porque no se define a partir de bases. Por ello, en la práctica, consideraremos ambos espacios V, V^{**} como iguales.

Otro modo de construir el isomorfismo Φ es el siguiente (ejercicio 1): Sea B una base ordenada de V, B^* su base ordenada dual y $F \colon V \to V^*$ el único isomorfismo de espacios vectoriales tal que $F(B) = B^*$. Sea B^{**} la base dual de B^* y $G \colon V^* \to V^{**}$ el único isomorfismo de espacios vectoriales tal que $G(B^*) = B^{**}$. Entonces, $\Phi = G \circ F$. Notemos que si cambiamos de base B en V, entonces F y G cambian pero su composición no.

Una consecuencia inmediata del Teorema de Reflexividad es en dimensión finita, que cualquier base ordenada de V^* es base dual de una única base ordenada de V (ejercicio 2).

1.2. Concepto de aplicación multilineal y tensor

Definición 1.2.1 Sean $V_1, \ldots, V_m, W$ espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación

$$F \colon V_1 \times \cdots \times V_m \to W$$

se dice *multilineal* cuando es lineal en cada una de sus m variables, esto es, se verifica:

$$\begin{aligned} &F(w_1, \ldots, w_{i-1}, aw_i + b\bar{w}_i, w_{i+1}, \ldots, w_m) = \\ &= aF(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_m) + bF(w_1, \ldots, w_{i-1}, \bar{w}_i, w_{i+1}, \ldots, w_m) \end{aligned}$$

para todo $w_j \in V_j, j \in \{1, \ldots, m\}$, $\bar{w}_i \in V_i$, $a, b \in \mathbb{K}$ y para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Un caso particular de aplicación multilineal es el concepto de tensor: si $V(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial, un *tensor* r veces covariante y s veces contravariante (o de tipo (r, s)) sobre V es una aplicación multilineal

$$\begin{array}{rcl} T \colon V \times \overset{r)}{\cdots} \times V \times V^* \times \overset{s)}{\cdots} \times V^* & \to & \mathbb{K} \\ (u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) & \mapsto & T(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s). \end{array}$$

Denotaremos por $\mathcal{T}_{r,s}(V)$ al conjunto de los tensores de tipo (r, s) sobre $V(\mathbb{K})$. De manera natural se puede definir en este conjunto una suma y un producto por escalares. Concretamente,

(1) si $T, T' \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$, su *suma* $T + T'$ se define por

$$(T + T')(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) =$$

$$T(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) + T'(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s);$$

(2) si $T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$, $a \in \mathbb{K}$, el *producto escalar* $a \cdot T$ de a por T se define por:

$$(a \cdot T)(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) = a \cdot T(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s).$$

(para cualesquiera $u_1, \ldots, u_r \in V, \phi^1, \ldots, \phi^s \in V^*$).

Es un ejercicio mecánico comprobar que las aplicaciones $T+T'$ y $a \cdot T$ son multilineales y, por tanto, $T+T', a \cdot T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$. Análogamente, es fácil comprobar que estas operaciones generan una estructura de espacio vectorial sobre $\mathcal{T}_{r,s}(V)$, siendo el 0 de este espacio el tensor nulo T_0 definido por $T_0(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) = 0$. En resumen:

Proposición 1.2.1 $(\mathcal{T}_{r,s}(V), +, \cdot \mathbb{K})$ *tiene estructura de espacio vectorial, que será denotado simplemente como* $\mathcal{T}_{r,s}(V)$.

Claramente, $\mathcal{T}_{1,0}(V) = V^*$ y $\mathcal{T}_{0,1} = V^{**}$. Suponiendo $V(\mathbb{K})$ de dimensión finita, como por el Teorema de Reflexividad podemos identificar V^{**} con el propio V, podemos identificar $\mathcal{T}_{0,1}(V) = V$. Esto es, cada vector $v \in V$ se identificará con el tensor 1-contravariante

$$\begin{aligned} v\colon V^* &\to \mathbb{K} \\ \phi &\mapsto \phi(v). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.1 (1) Producto escalar. El producto escalar usual en $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$, $(u,v) \mapsto u \cdot v = \langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ donde $u = (a_1, \ldots, a_n)$, $v = (b_1, \ldots, b_n)$ (o con más generalidad, las métricas que se verán más adelante) es un tensor 2-covariante. Análogamente, el producto vectorial sobre $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ de la geometría elemental (visto como la aplicación $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto u \times v$) es una aplicación multilineal.

(2) Determinantes. Consideremos la aplicación $\det : \mathbb{R}^n \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Es directo comprobar que $\det \in \mathcal{T}_{n,0}(\mathbb{R}^n)$.

(3) Endomorfismos. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} T_f\colon V \times V^* &\to \mathbb{R} \\ (u,\phi) &\mapsto \phi(f(u)). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Se demuestra fácilmente que $T_f \in \mathcal{T}_{1,1}(V)$.

Nota 1.2.1 Por convenio, definimos $\mathcal{T}_{0,0}(V) = \mathbb{K}$. Así, se puede considerar que el concepto de tensor incluye simultáneamente los de escalar (por este convenio), vector y forma lineal. Más aún, posteriormente se comprobará que la aplicación $\mathrm{End}(V) \to \mathcal{T}_{1,1}(V)$, $f \mapsto T_f$ donde T_f está definido por (1.2), es un isomorfismo de espacios vectoriales. De este modo, también los endomorfismos podrán verse como casos particulares de tensores.

1.3. Producto tensorial

El producto tensorial resultará útil para producir nuevos tensores aumentando la covarianza o contravarianza. El objetivo final será poder estudiar todos los tensores a partir de los de tipo $(1,0)$ (formas lineales) y $(0,1)$ (vectores, si la dimansión de V es finita).

Definición 1.3.1 Sean $T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$ y $T' \in \mathcal{T}_{r',s'}(V)$. Se define el *producto tensorial de T por T'* como $T \otimes T' : V \times \overset{r+r')}{\cdots} \times V^* \times \overset{s+s')}{\cdots} \times V^* \to \mathbb{K}$, donde

$$(T \otimes T')(u_1, \ldots, u_{r+r'}, \phi^1, \ldots, \phi^{s+s'}) = T(u_1, \ldots, u_r, \phi^1, \ldots, \phi^s) \cdot T'(u_{r+1}, \ldots, u_{r+r'}, \phi^{s+1}, \ldots, \phi^{s+s'}).$$

Proposición 1.3.1 *Se comprueba fácilmente (ejercicio 3):*

(1) $T \otimes T'$ es multilineal y, por tanto, $T \otimes T' \in \mathcal{T}_{r+r',s+s'}(V)$.

(2) La operación producto tensorial es lineal en cada variable:

$$(aT + b\overline{T}) \otimes T' = a(T \otimes T') + b(\overline{T} \otimes T')$$
$$T \otimes (aT' + b\overline{T}') = a(T \otimes T') + b(T \otimes \overline{T}')$$

para cualesquiera $T, \overline{T} \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$ y $T', \overline{T}' \in \mathcal{T}_{r',s'}(V)$.

(3) La operación producto tensorial es asociativa (aunque no conmutativa).

1.4. Tensores de orden 2

1.4.1. Tensores 2-covariantes

Consideremos en primer lugar el espacio vectorial $\mathcal{T}_{2,0}(V)$. Acabamos de ver que si $\phi, \psi \in V^* = \mathcal{T}_{1,0}(V)$, entonces $\phi \otimes \psi \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$, siendo

$$(\phi \otimes \psi)(v, w) = \phi(v) \cdot \psi(w), \qquad \forall v, w \in V.$$

Supongamos que $V(\mathbb{K})$ tiene dimensión finita $n \in \mathbb{N}$. Fijemos una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, y su correspondiente base dual $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$. Nuestro objetivo será construir una base de $\mathcal{T}_{2,0}(V)$ a partir de todos los productos tensoriales de elementos de B^*:

$$B_{2,0} := \{\varphi^i \otimes \varphi^j : \ i, j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Teorema 1.4.1 *En la situación anterior, $B_{2,0}$ es una base de $\mathcal{T}_{2,0}(V)$, luego* $\dim \mathcal{T}_{2,0}(V) = n^2$*. Además, la coordenada t_{kl} de un tensor $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ respecto a la base $B_{2,0}$ es $T(v_k, v_l)$.*

Demostración. En primer lugar veamos que $B_{2,0}$ es linealmente independiente. En efecto, supongamos $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi^i \otimes \varphi^j = T_0$ (tensor nulo) para $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Dados $k, h \in \{1, \ldots, n\}$,

$$0 = T_0(v_k, v_h) = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi^i \otimes \varphi^j \right) (v_k, v_h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\varphi^i \otimes \varphi^j)(v_k, v_h)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\varphi^i(v_k)\varphi^j(v_h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\delta_k^i\delta_h^j = a_{kh},$$

lo que prueba que $B_{2,0}$ es linealmente independiente.

Para demostrar que $B_{2,0}$ es un sistema de generadores de $\mathcal{T}_{2,0}(V)$ basta comprobar que para todo $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ se tiene $T = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}\phi^i \otimes \phi^j$, siendo $t_{ij} = T(v_i, v_j)$ (esto terminará de probar el teorema).

Dados $u, v \in V$ cualesquiera (no necesariamente de la base B),

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} T(v_i, v_j)\varphi^i \otimes \varphi^j\right)(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} T(v_i, v_j)(\varphi^i \otimes \varphi^j)(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} T(v_i, v_j)\varphi^i(u)\varphi^j(v)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} T(\varphi^i(u)v_i, \varphi^j(v)v_j) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi^i(u)v_i, \sum_{j=1}^{n} \varphi^j(v)v_j\right) = T(u, v),$$

luego $\sum_{i,j=1}^{n} T(v_i, v_j)\varphi^i \otimes \varphi^j = T$. □

Nota 1.4.1 1. Seguimos con la notación del Teorema 1.4.1. Las coordenadas t_{ij} de T en $B_{2,0}$ se pueden escribir de modo matricial

$$M_B(T) = (t_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} T(v_1, v_1) & \dots & T(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T(v_n, v_1) & \dots & T(v_n, v_n) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si $u = \sum_{i=1}^{n} a^i v_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} b^j v_j$ entonces:

$$T(u, v) = (a^1, \dots, a^n) M_B(T) \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

2. Todos los tensores de tipo $(2, 0)$ se pueden escribir como sumas finitas de productos tensoriales del tipo $\phi \otimes \psi$. Esto lleva a que algunos textos usen la notación $\mathcal{T}_{2,0}(V) = V^* \otimes V^*$. No todo tensor $(2, 0)$ es de la forma $\phi \otimes \psi$ (ejercicio 5).

Estudiaremos a continuación el cambio de base en $\mathcal{T}_{2,0}(V)$. Seguimos usando la notación del Teorema 1.4.1, y tomamos otra base $\overline{B} = \{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n\}$ con base dual $\overline{B}^* = (\overline{\varphi}^1, \dots, \overline{\varphi}^n)$. Construimos la correspondiente base $\overline{B}_{2,0} = \{\overline{\varphi}^i \otimes \overline{\varphi}^j \mid i, j = 1, \dots, n\}$ de $\mathcal{T}_{2,0}(V)$. Escribimos el cambio de base en V como

$$\overline{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i, \qquad \forall j = 1, \dots, n, \tag{1.4}$$

donde $(a_{ij})_{i,j} = M(1_V, \overline{B}, B)$.

Teorema 1.4.2 *Sea $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$, con coordenadas $(t_{ij})_{i,j}$, $(\bar{t}_{k,l})_{kl}$ respecto a $B_{2,0}$ y $\overline{B}_{2,0}$, respectivamerte, es decir*

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}\varphi^i \otimes \varphi^j = \sum_{k,l=1}^{n} \bar{t}_{kl}\overline{\varphi}^k \otimes \overline{\varphi}^l.$$

Entonces:

$$\bar{t}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ik}a^j_{jl}t_{ij},$$

o, matricialmente,

$$M_{\overline{B}}(T) = P^t \cdot M_B(T) \cdot P,$$

donde $P = M(1_V, \overline{B}, B)$.

Demostración. En adelante, el rango de variación de los índices es siempre $1, \ldots, n$.

$$\bar{t}_{kl} = T\left(\overline{v}_k, \overline{v}_l\right) = T(\sum_i a_{ik}v_i, \sum_j a_{jl}v_j) = \sum_{i,j} a_{ik}a_{jl}T(v_i, v_j)$$

$$= \sum_{i,j}(P^t)_{ki}(M_B(T))_{ij}P_{jl} = (P^t \cdot M_B(T) \cdot P)_{kl}.$$

□

1.4.2. Tensores 2-contravariantes

Un desarrollo análogo al que hemos hecho para $\mathcal{T}_{2,0}(V)$ se puede llevar a cabo para $\mathcal{T}_{0,2}(V)$. De ahora en adelante supondremos que $V(\mathbb{K})$ tiene dimensión finita n. Dados dos vectores $u, v \in V \equiv \mathcal{T}_{0,1}(V)$, podemos considerar su producto tensorial

$$\begin{aligned} u \otimes v : V^* \times V^* &\to \mathbb{R} \\ (\phi, \psi) &\mapsto \phi(u) \cdot \psi(v). \end{aligned}$$

Fijada una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y su correspondiente base dual $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$, consideramos el conjunto $B_{0,2} = \{v_i \otimes v_j \mid i, j = 1, \ldots, n\}$.

Teorema 1.4.3 *En la situación anterior, $B_{0,2}$ es una base de $\mathcal{T}_{0,2}(V)$. En consecuencia, $\dim \mathcal{T}_{0,2}(V) = n^2$. Además, la coordenada t^{kl} de un tensor T en la base $B_{0,2}$ es $T(\varphi^k, \varphi^l)$.*

Nota 1.4.2 A veces se usa la notación $\mathcal{T}_{0,2}(V) \equiv V \otimes V$.

Para estudiar el cambio de coordenadas (cambio de base) en $\mathcal{T}_{0,2}(V)$, tomemos dos bases $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\overline{B} = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ de V. Recordemos que si (1.4) son las ecuaciones de cambio de base de $\overline{B}$ a B, entonces las bases duales $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$, $\overline{B}^* = \{\overline{\varphi}^1, \ldots, \overline{\varphi}^n\}$ verifican

$$M(1_{V^*}, B^*, \overline{B}^*) = M(1_V, \overline{B}, B)^t = (a_{ij})^t_{i,j},$$

es decir,

$$\varphi^i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\overline{\varphi}^j, \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Llamando $(b_{ij})_{i,j} = (a_{ij})^{-1}_{i,j}$ a la matriz inversa de $M(1_V, \overline{B}, B)$ (esto es, $(b_{ij})_{i,j} = M(1_V, B, \overline{B})$), se tiene:

$$\sum_{i=1}^n b_{ki}\varphi^i = \sum_{i,j} b_{ki}a_{ij}\overline{\varphi}^j = \sum_j \delta_{kj}\overline{\varphi}^j = \overline{\varphi}^k,$$

luego

$$\overline{\varphi}^i = \sum_{j=1}^n b_{ij}\varphi^j, \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Razonando ahora como en el caso 2-covariante se tiene:

Teorema 1.4.4 *Sea $T \in \mathcal{T}_{0,2}(V)$ con coordenadas $(t^{ij})_{i,j}$, $(\overline{t}^{kl})_{k,l}$ respecto a $B_{0,2}$ y $\overline{B}_{0,2}$ respectivamente, esto es*

$$T = \sum_{i,j=1}^n t^{ij} v_i \otimes v_j = \sum_{k,l=1}^n \overline{t}^{kl}\overline{v}_k \otimes \overline{v}_l.$$

Entonces,

$$\overline{t}^{kl} = \sum_{i,j=1}^n b_{ki}b_{lj}t^{ij},$$

o, matricialmente,

$$M_{\overline{B}}(T) = P^{-1} \cdot M_B(T) \cdot (P^{-1})^t,$$

donde $P = M(1_V, \overline{B}, B)$.

Demostración.

$$\overline{t}^{kl} = T(\overline{\varphi}^k, \overline{\varphi}^l) = T(\sum_i b_{ki}\varphi^i, \sum_j b_{lj}\varphi^j) = \sum_{i,j} b_{ki}b_{lj}t^{ij}.$$

□

1.4.3. Tensores 1-covariantes, 1-contravariantes

Para terminar con los tensores de orden 2, consideremos el espacio vectorial $\mathcal{T}_{1,1}(V)$. Dados $\phi \in V^*$ y $u \in V$ podemos considerar su producto tensorial

$$\begin{aligned} \phi \otimes u : V \times V^* &\to \mathbb{R} \\ (v, \psi) &\mapsto \phi(v) \cdot \psi(u). \end{aligned}$$

Fijada una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y su dual $\overline{B} = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$, llamamos

$$B_{1,1} = \{\varphi^i \otimes v_j \mid i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Teorema 1.4.5 *En la situación anterior, $B_{1,1}$ es una base de $\mathcal{T}_{1,1}(V)$, $\dim \mathcal{T}_{1,1}(V) = n^2$ y dado $T \in \mathcal{T}_{1,1}(V)$, la coordenada de T correspondiente al elemento $\varphi^i \otimes v_j$ de la base $B_{1,1}$ es $T(v_i, \varphi^j)$.*

Demostración. Ejercicio. □

En cuanto al cambio de base en $\mathcal{T}_{1,1}(V)$, tomemos dos bases $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\overline{B} = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ de V. Usaremos las ecuaciones de cambio de base (1.4) entre B, $\overline{B}$ y (1.5) entre las bases duales respectivas $B^* = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$, $\overline{B}^* = (\overline{\varphi}^1, \ldots, \overline{\varphi}^n)$. Cada una de las parejas B, B^* y $\overline{B}, \overline{B}^*$ producen bases $B_{1,1}$ y $\overline{B}_{1,1}$ de $\mathcal{T}_{1,1}(V)$.

Teorema 1.4.6 *Sea $T \in \mathcal{T}_{1,1}(V)$ con coordenadas $(t_i^j)_{i,j}$, $(\overline{t}_k^l)_{k,l}$ respecto a $B_{1,1}$ y $\overline{B}_{1,1}$ respectivamente, es decir*

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} T(v_i, \varphi^j)\, \varphi^i \otimes v_j = \sum_{k,l=1}^{n} T(\overline{v}_k, \overline{\varphi}^l)\, \overline{\varphi}^k \otimes \overline{v}_l.$$

Entonces,

$$T(\overline{v}_k, \overline{\varphi}^l) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ik} b_{lj} T(v_i, \varphi^j),$$

o, matricialmente, si $M_B(T) = (T(v_i, \varphi^j))_{j,i}$ y $M_{\overline{B}}(T) = (T(\overline{v}_k, \overline{\varphi}^l))_{l,k}$ (¡ojo con filas y columnas!),

$$M_{\overline{B}}(T) = P^{-1} \cdot M_B(T) \cdot P, \tag{1.7}$$

donde $P = M(1_V, \overline{B}, B)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} (M_{\overline{B}}(T))_{lk} &= T(\overline{v}_k, \overline{\varphi}^l) = T(\sum_i a_{ik} v_i, \sum_j b_{lj} \varphi^j) = \sum_{i,j} a_{ik} b_{lj} T(v_i, \varphi^j) \\ &= \sum_{i,j} (P^{-1})_{lj} (M_B(T))_{ji} P_{ik} = (P^{-1} M_B(T) P)_{lk}. \end{aligned}$$

□

Definición 1.4.1 Dos matrices $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dicen *congruentes* (resp. *semejantes*) cuando $P \in Gl(n, \mathbb{K})$ tal que

$$C = P^t \cdot A \cdot P \qquad (\text{resp.} \qquad C = P^{-1} \cdot A \cdot P)$$

De lo anterior se deduce fácilmente que si A y C son matrices cuadradas congruentes (resp. semejantes) y $A = M_B(T)$ para algún tensor T de tipo $(2,0)$ o $(0,2)$ (resp. $(1,1)$) y alguna base B de V, entonces existe una segunda base $\overline{B}$ de V tal que $C = M_{\overline{B}}(T)$.

Relación con los endomorfismos

Del estudio anterior deducimos que la dimensión de cualquier espacio de tensores (r,s) con $r+s=2$ es n^2. En consecuencia, $\mathcal{T}_{2,0}(V)$, $\mathcal{T}_{0,2}(V)$ y $\mathcal{T}_{1,1}(V)$ son isomorfos al espacio $\mathrm{End}(V)$ de los endomorfismos de $V(\mathbb{K})$. Una propiedad particular de los tensores de tipo $(1,1)$ es que existe un isomorfismo *canónico* (no depende de bases) entre $\mathcal{T}_{1,1}(V)$ y $\mathrm{End}(V)$. Recordemos que para cada endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ se definió en (1.2) un tensor de tipo $(1,1)$ mediante $T_f(v,\phi) := \phi(f(v))$.

Teorema 1.4.7 *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{End}(V) & \to & \mathcal{T}_{1,1}(V) \\ f & \mapsto & T_f \end{array}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además, se verifica

$$M_B(T_f) = M(f,B) \tag{1.8}$$

para cualquier base B de V.

Demostración. Es fácil comprobar que $T_{af+b\bar{f}} = aT_f + bT_{\bar{f}}$ para todo $a, b \in \mathbb{K}$ y $f, \bar{f} \in \mathrm{End}(V)$, lo que demuestra la linealidad. La inyectividad se sigue de que si $T_f = T_0$ (tensor nulo), entonces fijado $v \in V$ se tiene:

$$0 = T_0(v,\phi) = T_f(v,\phi)) = \phi(f(v)), \qquad \forall \phi \in V^*,$$

lo que implica que $f(v) = 0$ y, al ser v arbitrario, f es el endomorfismo nulo. Como $\mathrm{End}(V)$ y $\mathcal{T}_{1,1}(V)$ tienen la misma dimensión, esto prueba que la aplicación del teorema es un isomorfismo. En cuanto a (1.8), recordemos que si $M(f,B) = (a_{ij})_{i,j}$ entonces $f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$ luego

$$M_B(T_f)_{ij} = (T_f(v_j, \varphi^i))_{ij} = \varphi^i(f(v_j)) = \varphi^i(\sum_{h=1}^n a_{hj} v_h) = \sum_{h=1}^n a_{hj} \delta_{ih} = a_{ij} = (M(f,B))_{ij}.$$

$\square$

1.5. Tensores de tipo (r, s)

1.5.1. Bases y propiedades generales

Consideremos r formas lineales $\psi^1, \ldots, \psi^r$ en V^* y s vectores $u_1, \ldots, u_s$ en V. Usando la asociatividad de $\otimes$ puede escribirse inequívocamente $\psi^1 \otimes \cdots \otimes \psi^r \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_s \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$. Explícitamente,

$$(\psi^1 \otimes \cdots \otimes \psi^r \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_s)(w_1, \ldots, w_r, \rho^1, \ldots, \rho^s) = \psi^1(w_1) \cdots \psi^r(w_r)\rho^1(u_1) \cdots \rho^s(u_s).$$

Para construir una base de $\mathcal{T}_{r,s}(V)$ consideramos una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y su base dual $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ de V^*. Definimos entonces

$$B_{r,s} = \{\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_s} \mid i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s = 1, \ldots, n\}.$$

Argumentos análogos a los del caso $r + s = 2$ permiten demostrar:

Teorema 1.5.1 *En la situación anterior, $B_{r,s}$ es una base de $\mathcal{T}_{r,s}(V)$, dim $\mathcal{T}_{r,s}(V) = n^{r+s}$ y dado $T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$, la coordenada $t_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$ de T correspondiente al elemento $\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_s}$ de la base $B_{r,s}$ es $T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}, \varphi^{j_1}, \ldots, \varphi^{j_s})$.*

Abusando del lenguaje, a veces se dice que los escalares $t_{i_1, \ldots, i_r}^{j_1, \ldots, j_s}$ son las coordenadas de T en B (en lugar de en $B_{r,s}$).

En cuanto al cambio entre bases B y $\overline{B}$, consideremos otra base $\overline{B} = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ de V, con base dual $\overline{B}^* = \{\overline{\varphi}^1, \ldots, \overline{\varphi}^n\}$.

Teorema 1.5.2 *Sea $T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$, con coordenadas $t_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$ y $\overline{t}_{k_1 \ldots k_r}^{h_1 \ldots h_s}$ en $B_{r,s}$ y $\overline{B}_{r,s}$ respectivamente, esto es,*

$$\begin{aligned} T = & \sum_{i_1, \ldots, j_s = 1}^{n} t_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} \, \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_s} \\ = & \sum_{k_1, \ldots, h_s = 1}^{n} \overline{t}_{k_1 \ldots k_r}^{h_1 \ldots h_s} \, \overline{\varphi}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \overline{\varphi}^{k_r} \otimes \overline{v}_{h_1} \otimes \cdots \otimes \overline{v}_{h_s}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\overline{t}_{k_1 \ldots k_r}^{h_1 \ldots h_s} = \sum_{i_1, \ldots, j_s = 1}^{n} a_{i_1 k_1} \ldots a_{i_r k_r} b_{h_1 j_1} \ldots b_{h_s j_s} \, t_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s},$$

donde $(a_{ij})_{i,j} = M(1_V, \overline{B}, B)$ y $(b_{ij})_{i,j} = (a_{ij})_{i,j}^{-1} = M(1_V, B, \overline{B})$.

1.5.2. Contracción tensorial

Recordemos que la traza de um endmorfismo $f\colon V \to V$ es la suma $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ de los elementos de la diagonal principal de la matriz $M(f,B)$, y que resulta independiente de la base ordenada B que elegimos en V. Debido a la relación estudiada en el Teorema 1.4.7 entre endomorfismos y tensores de tipo $(1,1)$, se puede definir una traza para estos tensores, sin más que asignar a cada $T \in \mathcal{T}_{1,1}(V)$ la traza del único endomorfismo f tal que $T_f = T$. Es decir, si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V y $B^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ es su base dual,

$$\operatorname{traza} T = \operatorname{traza} T_f = \operatorname{traza} f = \sum_{i=1}^n \varphi^i(f(v_i)) = \sum_{i=1}^n T_f(v_i, \varphi^i) = \sum_{i=1}^n T(v_i, \varphi^i).$$

Esto se podría haber hecho directamente, sin hacer mención a los endomorfismos:

Proposición 1.5.1 *Sea $T \in \mathcal{T}_{1,1}(V)$, B una base ordenada de V y $M_B(T) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz de coordenadas de T een B, definida como en el Teorema 1.4.6. Entonces, el escalar dado por*

$$C_1^1(T) := \mathit{traza}(M_B(T))$$

es independiente de la base B.

Demostración. (1.7) implica que para cualquier otra base ordenada $\overline{B}$ de V se tiene

$$\operatorname{traza}(M_{\overline{B}}(T)) = \operatorname{traza}\left((P^{-1}M_B(T))\cdot P\right) = \operatorname{traza}\left(P.(P^{-1}M_B(T))\right) = \operatorname{traza}(M_B(T)).$$

donde hemos usado la propiedad $\operatorname{traza}(AC) = \operatorname{traza}(CA)$, $\forall A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. □

La proposición anterior nos dice que $C_1^1\colon \mathcal{T}_{1,1}(V) \to \mathcal{T}_{0,0}(V)$ es una aplicación bien definida. Es fácil comprobar que además es lineal. Esto se puede generalizar a cualquier tensor T de tipo (r,s) con $r,s \geq 1$, sin más que tener en cuenta que si en T fijamos los argumentos de todas las variables salvo la i-ésima covariante y la j-ésima contravariante, entonces se tiene un tensor de tipo $(1,1)$ que se puede contraer en esas variables como hemos explicado arriba. Esto asegura la consistencia de la siguiente definición.

Definición 1.5.1 Sea $T \in \mathcal{T}_{r,s}(V)$ con $r,s \geq 1$. Dados $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$. La *contracción* de T con respecto a la i-ésima variable covariante y la j-ésima contravariante es el tensor $C_i^j(T) \in \mathcal{T}_{r-1,s-1}(V)$ definido por:

$$[C_j^i(T)](u_1, \dots, u_{r-1}, \psi^1, \dots, \psi^{s-1}) =$$

$$\sum_{k=1}^n T(u_1, \dots, u_{j-i}, v_k, u_j, \dots u_{r-1}, \psi^1, \dots, \psi^{i-1}, \varphi^k, \psi^i, \dots, \psi^{s-1}),$$

$\forall u_1, \dots, u_{r-1} \in V$, $\psi^1, \dots, \psi^{s-1} \in V^*$, donde $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es cualquier base de V y $B^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ su base dual.

1.6. Tensores 2-covariantes simétricos y antisimétricos

Definición 1.6.1 (1) Un tensor $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ se dice *simétrico* si $T(v,w) = T(w,v)$, $\forall v,w \in V$. Denotaremos por $\mathcal{S}_2(V)$ al conjunto de todos los tensores simétricos de orden 2 (es decir, (2,0)) sobre V.
(2) Diremos que un tensor $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ es *antisimétrico* si $T(v,w) = -T(w,v)$, $\forall v,w \in V$. Denotaremos por $\mathcal{A}_2(V) = \Lambda^2(V)$ al conjunto de todos los tensores antisimétricos de orden 2 sobre V.
(3) Diremos que $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ es *alternado* si $T(v,v) = 0$ para todo $v \in V$.

Nota 1.6.1 (a) Todo tensor alternado es antisimétrico:
Si T es alternado, $0 = T(v+w, v+w) = T(v,v) + T(v,w) + T(w,v) + T(w,w) = T(v,w) + T(w,v)$.
El recíproco es cierto[1]: si T es antisimétrico, $T(v,v) = -T(v,v)$ lo que implica $2\,T(v,v) = 0$ luego $T(v,v) = 0$.

(b) En caso de tensores de tipo $(0,2)$ se puede dar una definición análoga; en cambio; en cambio para tensores de tipo $(1,1)$ esto no tiene sentido.

Proposición 1.6.1 *$\mathcal{S}_2(V)$ y $\mathcal{A}_2(V)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{T}_{2,0}(V)$. Además:*

$$\mathcal{T}_{2,0}(V) = \mathcal{S}_2(V) \oplus \mathcal{A}_2(V)$$

Demostración. Es inmediato comprobar que $\mathcal{S}_2(V)$, $\mathcal{A}_2(V)$ son subespacios vectoriales y que $\mathcal{S}_2(V) \cap \mathcal{S}_2(V) = \{0\}$. Para la expresión como suma, obsérvese que $2T = T^S + T^A$ con $T^S \in \mathcal{S}_2(V)$, $T^A \in \mathcal{A}_2(V)$ definidos por $T^S(v,w) = T(v,w) + T(w,v)$, $T^A(v,w) = T(v,w) - T(w,v)$ para todo $v,w \in V$. $\square$

Proposición 1.6.2 *Sea $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$. Son equivalentes:*

(1) T es simétrico (resp. antisimétrico).

(2) Existe una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $T(v_i,v_j) = T(v_j,v_i)$ (resp. $T(v_i,v_j) = -T(v_j,v_i)$), $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

(3) Cualquier base de V verifica la propiedad (2).

Demostración. Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (3) y (3) $\Rightarrow$ (2) son triviales. (2) $\Rightarrow$ (1) es consecuencia de la bilinealidad de T. $\square$

[1] Aquí estamos usando que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Más generalmente, este recíproco es cierto para espacios vectoriales sobre cualquier cuerpo $\mathbb{K}$ con característica distinta de dos.

Definición 1.6.2 Para cada $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ se define su *tensor traspuesto* $T^t \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ por:

$$T^t(v,w) = T(w,v) \qquad \forall v, w \in V.$$

Resulta inmediato demostrar las siguientes propiedades.

Proposición 1.6.3

(1) T es simétrico (resp. antisimétrico) si y sólo si $T = T^t$ (resp. $T = -T^t$).

(2) $\forall T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$, el tensor $T + T^t$ es simétrico (resp. $T - T^t$ es antisimétrico).

(3) La aplicación trasposición

$$(\cdot)^t : \mathcal{T}_{2,0}(V) \to \mathcal{T}_{2,0}(V) \qquad T \mapsto T^t$$

es un automorfismo de $\mathcal{T}_{2,0}(V)$ cuyo cuadrado es la identidad y sus subsespacios propios son $V_1 = \mathcal{S}_2(V)$, $V_{-1} = \mathcal{A}_2(V)$.

Definición 1.6.3 Si $\phi, \psi \in V^*$ se define su *producto exterior* como el tensor antisimétrico

$$\phi \wedge \psi = \phi \otimes \psi - \psi \otimes \phi \in \mathcal{A}_2(V),$$

y su *producto simetrizado* como

$$\phi \otimes_s \psi = \phi \otimes \psi + \psi \otimes \phi \in \mathcal{S}_2(V).$$

A continuación construiremos bases de tensores simétricos y antisimétricos de orden 2 a partir de una base $B^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ de V^*. Definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} B_2^S = &\ \{\phi^i \otimes_s \phi^j = \phi^i \otimes \phi^j + \phi^j \otimes \phi^i \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\phi^i \otimes \phi^i \mid 1 \leq i \leq n\}, \\ B_2^A = &\ \{\phi^i \wedge \phi^j = \phi^i \otimes \phi^j - \phi^j \otimes \phi^i \mid 1 \leq i < j \leq n\} \end{aligned}$$

Teorema 1.6.1 *B_2^S y B_2^A son bases de los espacios $\mathcal{S}_2(V)$ y $\mathcal{A}_2(V)$, respectivamente. Por tanto,*

$$\dim \mathcal{S}_2(V) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \dim \mathcal{A}_2(V) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Nota 1.6.2 El conjunto $\{\phi^i \otimes_s \phi^j = \phi^i \otimes \phi^j + \phi^j \otimes \phi^i :\ 1 \leq i \leq j \leq n\}$ forma también una base de $\mathcal{S}_2(V)$, que difiere de B_2^S sólo en que cada elemento $\phi^i \otimes \phi^i$ de B_2^S se reemplaza por $2\phi^i \otimes \phi^i$.

1.7. Estudio especial de tensores antisimétricos r covariantes

En esta sección estudiaremos más en profundidad los tensores antisimétricos por su relación con el álgebra exterior (para cualquier orden $r \in \{1, \ldots, n = \dim_{\mathbb{K}} V\}$) y con los determinantes (en el caso $r = n$).

1.7.1. Permutaciones

Definición 1.7.1 Sea $S(r) = \{1, 2, \ldots, r\} \subset \mathbb{N}$. Llamaremos *permutación* de $S(r)$ (o de r elementos) a toda aplicación biyectiva $\sigma : S(r) \to S(r)$. Al conjunto de todas las permutaciones de $S(r)$ lo denotaremos por S_r, que tiene cardinal $r!$.

Propiedades básicas:

(1) S_r con la composición tiene estructura de grupo no abeliano, A veces a la composición en S_r se la llama *producto*. La notación estándar para permutaciones es

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(r) \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son permutaciones en S_4 y S_3, respectivamente.

(2) Un *ciclo* es una permutación $\sigma \in S_r$ que verifica que la reordenación de los elementos que no son fijos es circular. Por ejemplo,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

son ciclos, pero

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

no lo es. Existe una notación simplificada para ciclos. En ella, σ y τ se escriben

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S_5, \qquad \tau = (1\ 2\ 3\ 4) \in S_5.$$

Se llama **longitud de un ciclo** al número de símbolos no fijos de un ciclo. Por ejemplo, $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S_5$ tiene longitud 5, y $\tau = (1\ 2\ 3\ 4) \in S_5$ tiene longitud 4.

(3) Toda permutación $\sigma \in S_r$, $\sigma \neq 1$, se descompone como producto de ciclos disjuntos.
Demostración: Tomemos una permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(r) \end{pmatrix}.$$

Supongamos primero que 1 no es fijo por σ. Consideremos el ciclo

$$\tau_1 = (1\ \sigma(1)\ \sigma^2(1)\ \ldots\ \sigma^s(1)),$$

donde s es el menor número natural que verifica $\sigma^{s+1} = 1$ (s existe porque $\{1, 2, \ldots, r\}$ es un conjunto finito). Llamemos $\sigma^t(1) = i_t, \quad \forall t = 1, \ldots s$.

Si $s = r$, hemos terminado: σ es un ciclo.

Si $s > r$, en τ_1 hay más de r cifras, luego al menos dos cifras se repiten. Así, existen índices $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ tales que $\sigma^i(1) = \sigma^j(1)$, luego $\sigma^{-i+j}(1) = 1$. Por lo tanto, $-i + j \geq s + 1$, y de aquí se tiene que $j \geq s + i + 1$. Como $j \leq s$, obtenemos que $i + 1 \leq 0$, contradicción.

Supongamos entonces que $s < r$. Y por tanto, quedan $j_1, \ldots, j_{r-s}$ cifras que no han salido en τ_1. Ordenemos estas cifras de menor a mayor:

$$j_1 < \ldots < j_{r-s},$$

y la restricción de σ a $\{j_1, \ldots, j_{r-s}\}$ vuelve a ser una permutación, a la aplicaremos el razonamiento anterior. En un número finito de pasos se termina, y por tanto,

$$\sigma = (1\ i_1\ \ldots i_s)(j_1\ \ldots j_t) \cdot \ldots \cdot (k_1\ \ldots k_h),$$

que es un producto de ciclos. Esto termina la demostración en el caso de que 1 no sea fijo por σ. Si $\sigma(1) = 1$, basta aplicar el razonamiento anterior al primer dígito de $\{2, \ldots, n\}$ que no sea fijo por σ, lo que termina la demostración.

(4) Una *trasposición* es un ciclo de longitud dos. Por ejemplo, las siguientes permutaciones son trasposiciones:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (2\ 3), \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 5).$$

(5) Todo ciclo se descompone como producto de trasposiciones.
Demostración: $(i_1, \ldots, i_r) = (i_1, i_2) \cdot \ldots \cdot (i_{r-1}, i_r)$.

(6) Toda permutación se descompone como producto de trasposiciones (es consecuencia de (3) y (5)).
Pero en general, la descomposición de una permutación en producto de trasposiciones no es única. Por ejemplo,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{cases} = (1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4) \\ = (2\ 3\ 4\ 1) = (2\ 3)(3\ 4)(4\ 1) \end{cases}$$

(7) Dada $\sigma \in S_r$, la paridad ó imparidad del número de trasposiciones en que se descompone σ no depende de la descomposición, sino sólo de σ.
Demostración: Tomemos dos descomposiciones de σ en producto de trasposiciones:

$$\sigma = (i_1\ i_2)\ldots(i_{r-1}\ i_r) = (j_1\ j_2)\ldots(j_{s-1}\ j_s).$$

Así,

$$(i_{r-1}\ i_r)\ldots(i_1\ i_2)(j_1\ j_2)\ldots(j_{s-1}\ j_s) = 1,$$

luego hemos reducido el enunciado a probar que la identidad sólo puede descomponerse en un número par de trasposiciones. Para ver esto, consideremos ahora el polinomio simétrico de r variables,

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R}^r & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,\ldots,x_r) & \mapsto & \prod_{i<j}(x_i - x_j). \end{array}$$

Dados $i,j \in \{1,\ldots,r\}$, $i<j$, podemos escribir P como

$$P(x_1,\ldots,x_r) = (x_i - x_j)\cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq j}}^{r} (x_i - x_k)(x_j - x_k)\cdot Q,$$

donde $Q = Q(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots x_r)$ es un polinomio en $r-2$ variables. Llamemos σ a la trasposición $\sigma = (i\ j)$, con $i<j$. Entonces, de la última ecuación se tiene que

$$P(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(r)}) = -P(x_1,\ldots,x_r).$$

Y por tanto, si σ_1,σ_2 son dos trasposiciones,

$$P(x_{(\sigma_1\circ\sigma_2)(1)},\ldots,x_{(\sigma_1\circ\sigma_2)(r)}) = -P(x_{\sigma_2(1)},\ldots,x_{\sigma_2(r)}) = P(x_1,\ldots,x_r),$$

y en general, si $\sigma_1,\ldots,\sigma_s$ son trasposiciones,

$$P(x_{(\sigma_1\circ\ldots\circ\sigma_s)(1)},\ldots,x_{(\sigma_1\circ\ldots\circ\sigma_s)(r)}) = (-1)^s\cdot P(x_1,\ldots,x_r).$$

Luego si descomponemos la identidad de S_r como producto de s trasposiciones, $1 = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_s$, entonces de la última fórmula obtenemos que

$$P(x_1, \ldots, x_r) = (-1)^s \cdot P(x_1, \ldots, x_r),$$

$\forall (x_1, \ldots x_r) \in \mathbb{R}^r$. Luego s debe ser par (P no es idénticamente cero), lo que completa la demostración.

(8) Una permutación $\sigma \in S_r$ se dice *par* cuando se descompone en un número par de trasposiciones, y se dice *impar* cuando se descompone en un número impar de trasposiciones. Por ejemplo,

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) \quad \text{es impar},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)(4\ 5) = (1\ 2)(2\ 3)(4\ 5) \quad \text{es impar},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3) \quad \text{es par}.$$

(9) Se define la *signatura* de una permutación $\sigma \in S_r$ como

$$\operatorname{sig}(\sigma) := (-1)^{[\sigma]} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ es par}, \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ es impar}. \end{cases}$$

(10) sig: $S_r \to (\{-1, 1\}, \cdot)$ es un homomorfismo de grupos. En particular, se verifican:

$$\operatorname{sig}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sig}(\sigma) \cdot \operatorname{sig}(\tau), \quad \operatorname{sig}(\sigma) = \operatorname{sig}(\sigma^{-1}), \quad \operatorname{sig}(1) = 1.$$

Demostración: Sean $\sigma, \tau \in S_r$. Veamos que $\operatorname{sig}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sig}(\sigma) \cdot \operatorname{sig}(\tau)$, y habremos terminado. Notemos que si tenemos σ y τ descompuestas en producto de trasposiciones, al yuxtaponer estas descomposiciones tendremos una descomposición de $\sigma \circ \tau$ en producto de trasposiciones, y el número de trasposiciones que aparece en dicha descomposición para $\sigma \circ \tau$ es la suma de los números de trasposiciones de las descomposiciones de σ y de τ. Así pues, si ambas son pares ó ambas impares, la composición es par, y si una es par y la otra impar, la composición es impar. Esto prueba la fórmula que se buscaba.

1.7.2. Tensores antisimétricos de orden r

Definición 1.7.2 Dado $r \geq 2$, diremos que un tensor $T \in \mathcal{T}_{r,0}(V)$ es *antisimétrico* si

$$T(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_j, \ldots, y_r) = -T(y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_i, \ldots, y_r)$$

$1 \leq i < j \leq r$, para todo $y_1, \ldots, y_r \in V$, esto es, si T es *antisimétrico respecto a cualquier par* (i, j), $i < j$ de sus variables.

Es fácil comprobar que el conjunto de todos los tensores r-covariantes antisimétricos es un subespacio vectorial de $\mathcal{T}_{r,0}(V)$, que se denotará por $\Lambda^r(V)$. Por convenio, extenderemos esta notación a $\Lambda^1(V) = V^*$ y $\Lambda^0(V) = \mathbb{K}$.

Proposición 1.7.1 *Sea $T \in \Lambda^r(V)$, $r \geq 2$. Si un conjunto de r vectores $\{w_1, \ldots, w_r\} \subset V$ es linealmente dependiente, entonces $T(w_1, \ldots, w_r) = 0$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $w_r = \sum_{i=1}^{r-1} a_i w_i$ y por tanto

$$T(w_1, \ldots, w_r) = T(w_1, \ldots, \sum_{i=1}^{r-1} a_i w_i) = \sum_{i=1}^{r-1} a_i T(w_1, \ldots, w_i) = 0,$$

donde en la última igualdad hemos usado que, al ser T antisimétrico, también es alternado respecto a cada par de índices (i, r), con lo que cada sumando se anula. $\square$

El siguiente resultado se deduce directamente de las definiciones de tensor antisimétrico y signatura de una permutación, y puede considerarse como una definición alternativa de tensor antisimétrico:

Proposición 1.7.2 *Si $T \in \Lambda^r(V)$ y $\sigma \in S_r$ entonces, para cualesquiera $w_1, \ldots, w_r \in V$:*

$$T(w_{\sigma(1)}, \ldots, w_{\sigma(r)}) = \mathrm{sig}(\sigma)\, T(w_1, \ldots, w_r).$$

Se puede construir un tensor antisimétrico a partir de formas lineales como sigue:

Proposición 1.7.3 *Para cualesquiera $\psi^1, \ldots, \psi^r \in V^*$,*

$$\sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sig}(\sigma)\, \psi^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{\sigma(r)} \in \Lambda^r(V).$$

Demostración. Sea $\tau = (i\, j) \in S_r$ la trasposición de índices $i \neq j$. Entonces,

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sig}(\sigma)\, \psi^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{\sigma(r)} \right) (w_{\tau(1)}, \ldots, w_{\tau(r)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sig}(\sigma) \psi^{\sigma(1)}(w_{\tau(1)}) \ldots \psi^{\sigma(r)}(w_{\tau(r)}) = \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sig}(\sigma) \psi^{\tau\circ\sigma(1)}(w_1) \ldots \psi^{\tau\circ\sigma(r)}(w_r) \\ &= -\sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sig}(\tau \circ \sigma) \psi^{\tau\circ\sigma(1)}(w_1) \ldots \psi^{\tau\circ\sigma(r)}(w_r) = -\sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sig}(\sigma) \psi^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{\sigma(r)}(w_1, \ldots, w_r), \end{aligned}$$

lo que demuestra que $\sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sig}(\sigma)\, \psi^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{\sigma(r)}$ es antisimétrico respecto a cada par de variables i, j. $\square$

La última proposición sugiere generalizar el *producto exterior* de dos formas lineales visto en la sección anterior (Definición 1.6.3) al caso de r formas lineales como sigue:

$$\psi^1 \wedge \ldots \wedge \psi^r := \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sig}(\sigma)\, \psi^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{\sigma(r)} \in \Lambda^r(V).$$

Este producto exterior puede verse como un caso particular del producto exterior de dos tensores antisimétricos, cuyas propiedades se detallarán en un apéndice a esta sección. Ahotra nos centraremos a continuación únicamente en construir una base de $\Lambda^r(V)$ y estudiar su dimensión.

Proposición 1.7.4 *Sea $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ una base de V^*. Entonces,*

(1) $\{\varphi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi^{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}$ *es una base de* $\Lambda^r(V)$.

(2) Si $T \in \Lambda^r(V)$, $\quad T = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} t_{i_1 \ldots i_r}\, \varphi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi^{i_r}$, *donde* $t_{i_1 \ldots i_r} = T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$ *y* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *tiene por base dual a* B^*.

(3) $\dim \Lambda^r(V) = \binom{n}{r}$ *si* $r \leq n$, *y* 0 *si* $r > n$.

Demostración. Dado $T \in \Lambda^r(V)$, escribimos como hasta ahora $t_{i_1 \cdots i_r} = T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$. La antisimetría de T implica:

$$t_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(r)}} = \operatorname{sig}(\sigma) t_{i_1 \ldots i_r}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} T &= \textstyle\sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^n t_{i_1, \ldots, i_r}\, \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_r} \\ &= \textstyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \sum_{\sigma \in S_r} t_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(r)}}\, \varphi^{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_{\sigma(r)}} \\ &= \textstyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sig}(\sigma) t_{i_1 \ldots i_r}\, \varphi^{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_{\sigma(r)}} \\ &= \textstyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} t_{i_1 \ldots i_r}\, \varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_r}. \end{aligned}$$

De lo anterior deducimos (2) y que que el conjunto en (1) es sistema de generadores de $\Lambda^r(V)$. Para comprobar la independencia lineal de ese mismo conjunto, supongamos que

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} a_{i_1 \ldots i_r}\, \varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_r} = 0.$$

Entonces, aplicando los dos miembros de la última expresión a la lista $(v_{h_1}, \ldots, v_{h_r})$, $1 \leq h_1 < \cdots < h_r \leq n$, obtenemos que $a_{h_1 \cdots h_r} = 0$. Esto termina de probar (1).

Finalmente, (3) es un ejercicio de combinatoria. □

Definición 1.7.3 Dado un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$ de dimensión n, llamaremos *álgebra exterior* sobre V al espacio vectorial

$$\Lambda(V) := (\oplus_{r=0}^{n}\Lambda^r(V), \wedge),$$

donde $\oplus_{r=0}^{n}\Lambda^r(V)$ es el conjunto de sumas formales de tensores antisimétricos de todos los órdenes, y el producto exterior $\wedge$ se define para cualesquiera par de tensores antisimétricos extendiéndolo de manera natural por bilinealidad a partir del producto exterior de formas lineales y de la Proposición 1.7.4.

1.7.3. Apéndice: Simetrizadores y producto exterior

Como extensión de la sección anterior, consideraremos ahora la posibilidad de simetrizar o antisimetrizar tensores covarientes de cualquier orden, así como la de definir un produccto exterior para tensores antisimétricos covariantes también de cualquier orden; esta construcción también se puede extender a la de producto tensorial simetrizado para cualesquiera tensores simétricos covarientes.

Definición 1.7.4 Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se define el *antisimetrizador* de orden $r \in \mathbb{N}$ para V como la aplicación

$$\begin{array}{rll} h_r\colon & \mathcal{T}_{r,0}(V) & \to \mathcal{T}_{r,0}(V) \\ & T & \mapsto \sum_{\sigma\in S_r} \operatorname{sig}(\sigma)\, T^\sigma, \end{array}$$

donde dada $\sigma \in S_r$, $T^\sigma(y_1, \ldots, y_r) := T(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(r)})$ para todo $y_1, \ldots, y_r \in V$.

Lema 1.7.1 *El antisimetrizador cumple las siguientes propiedades:*

(1) h_r *es lineal y* $h_r(T^\sigma) = \operatorname{sig}(\sigma)\, h_r(T)$.

(2) $\operatorname{Im} h_r \subset \Lambda^r(V)$, *y si* $T \in \Lambda^r(V)$ *entonces* $h_r(T) = r!\, T$.

(3) Para cada $T \in \mathcal{T}_{r,0}(V)$, $T' \in \mathcal{T}_{r',0}(V)$ *se tiene*

$$h^{r+r'}(h_r(T) \otimes T') = r!\, h^{r+r'}(T \otimes T'),$$

$$h^{r+r'}(T \otimes h^{r'}(T')) = r'!\, h^{r+r'}(T \otimes T').$$

(4) $h^{r+r'}(T \otimes T') = (-1)^{r\cdot r'} h^{r+r'}(T' \otimes T)$.

Definición 1.7.5 Se definen los siguientes *productos exteriores*:

$$\begin{array}{rl} \wedge\colon \Lambda^r(V) \times \Lambda^{r'}(V) & \to \Lambda^{r+r'}(V) \\ (T, T') & \mapsto T \wedge T' = \frac{1}{r!r'!} h^{r+r'}(T \otimes T') \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \overline{\wedge}\colon \Lambda^r(V) \times \Lambda^{r'}(V) & \to \Lambda^{r+r'}(V) \\ (T, T') & \mapsto T \overline{\wedge} T' = \frac{1}{(r+r')!} h^{r+r'}(T \otimes T'). \end{array}$$

Se puede comprobar que estos productos pueden expresarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} T \wedge T' &= \tfrac{1}{k!k'!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_{r+r'}} \mathrm{sig}(\sigma)(T \otimes T')^\sigma = \sum_{\sigma \in \sigma_{r,r'}} \mathrm{sig}(\sigma)(T \otimes T')^\sigma \\ T \overline{\wedge} T' &= \tfrac{1}{(k+k')!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_{r+r'}} \mathrm{sig}(\sigma)(T \otimes T')^\sigma, \end{aligned}$$

donde $\sigma_{r,r'} = \{\sigma \in S_{r+r'} : \sigma(1) < \cdots < \sigma(r) \text{ y } \sigma(r+1) < \cdots < \sigma(r+r')\}$.

Lema 1.7.2 *Los productos exteriores $\wedge$, $\overline{\wedge}$ cumplen las siguientes propiedades:*

(1) $\wedge$, $\overline{\wedge}$ son bilineales y asociativos (para lo segundo resulta esencial la elección hecha de los factores $r!r'!$ o $(r+r')!$).

(2) $\wedge$, $\overline{\wedge}$ son antisimétricos, en el siguiente sentido:

$$T \wedge T' = (-1)^{r.r'} T' \wedge T, \qquad T \overline{\wedge} T' = (-1)^{r.r'} T' \overline{\wedge} T,$$

para $T \in \Lambda^r(V), T' \in \Lambda^{r'}(V)$.

Nota. A lo largo de todo nuestro desarrollo, se escoge siempre el producto exterior $\wedge$.

1.8. Tensores antisimétricos covariantes de orden $r = n$

A lo largo de esta sección, $V(\mathbb{K})$ denotará un espacio vectorial de dimensión finita n. Por tanto, la dimensión de $\Lambda^n(V)$ es igual a 1.

1.8.1. Elementos de volumen

Definición 1.8.1 Dada una base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V y su correspondiente base ordenada dual $B^* = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$, llamaremos *tensor determinante en la base B* a

$$\det_B := \varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^n \ (\in \Lambda^n(V)).$$

Proposición 1.8.1

(A) $\{\det_B\}$ es una base de $\Lambda^n(V)$.

(B) Sean $w_1, \ldots, w_n \in V$. Entonces $\det_B(w_1, \ldots, w_n)$ coincide con el determinante de la matriz de orden n que tiene por columnas a las coordenadas de $w_1, \ldots, w_n$ (en ese orden) respecto a B.

(C) Dada $\omega \in \Lambda^n(V)$, $\omega = \omega(v_1, \ldots, v_n)\ \det_B$.

(D) Si $\overline{B} = (\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)$ es otra base ordenada de V, entonces

$$\det_B = \det(M(1_V, \overline{B}, B) \cdot \det_{\overline{B}}. \tag{1.9}$$

Demostración. (A) Puesto que $\dim \Lambda^n(V) = 1$, basta comprobar que $\det_B \neq 0$ (tensor nulo). Pero

$$\det_B(v_1, \ldots, v_n) = (\varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^n)(v_1, \ldots, v_n) = 1 \neq 0.$$

(B) Si $w_j = \sum_i a_{ij} v_i \ \forall j = 1, \ldots, n$, entonces

$$\begin{aligned}
&\det_B(w_1, \ldots, w_n) = \\
&= \det_B(\sum_{i_1}^{n} a_{i_1,1} v_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n}^{n} a_{i_n,n} v_{i_n}) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \ldots a_{i_n,n} \det_B(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n} \det_B(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n} \operatorname{sig}(\sigma) \det_B(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n},
\end{aligned}$$

y la última expresión es el determinate de la matriz $(a_{ij})_{i,j}$.
(C) es inmediato a partir del apartado (1) anterior y de la Proposición 1.7.4(2).
(D) Aplicar primero el punto (C) para concluir que $\det_B = \det_B(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) \det_{\overline{B}}$ y luego el apartado (B) para deducir que $\det_B(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) = \det M(1_V, \overline{B}, B)$. □

Definición 1.8.2 Llamaremos *elemento de volumen* de V a todo $\omega \in \Lambda^n(V)$ no nulo.

El nombre "elemento de volumen" viene de que en $\mathbb{R}^n$, $|\det_{B_u}(w_1, \ldots, w_n)|$ mide el volumen del "paralelepípedo" generado por $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$, donde B_u es la base usual.

1.8.2. Orientación en un espacio vectorial real

El siguiente concepto sólo tiene sentido en un espacio vectorial *real*, por lo que que en esta sección $V(\mathbb{R})$ denotará un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{R}$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{B}$ de todas las bases ordenadas de $V(\mathbb{R})$, y se considera la relación binaria:

$$B \sim \overline{B} \ \Leftrightarrow \ \det(M(1_V, \overline{B}, B) > 0, \qquad \forall B, \overline{B} \in \mathcal{B}. \tag{1.10}$$

Resulta inmediato comprobar:

Proposición 1.8.2 *(1) La relación $\sim$ es de equivalencia.*

(2) Existen exactamente dos clases de equivalencia, que son $[B]$ y $[B^-]$ donde $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $B^- := (-v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Esto permite introducir el siguiente concepto.

Definición 1.8.3 A cada clase de equivalencia en $\mathcal{B}/\sim$ se le llama una *orientación* en $V(\mathbb{R})$. Una vez elegida una orientación $[B]$, llamaremos al par $(V(\mathbb{R}), [B])$ un *espacio vectorial orientado*. A todas las bases ordenadas $\overline{B} \in \mathcal{B}$ tales que $\overline{B} \in [B]$ (resp. $\overline{B} \notin [B]$) las llamaremos *positivamente ordenadas* (resp. *negativamente ordenadas*) respecto de $[B]$.

El concepto de orientación permite formalizar ideas intuitivas como:

- Si $n = \dim_{\mathbb{R}} V = 1$, estamos distinguiendo las bases que "apuntan a la derecha" de las que "apuntan a la izquierda". Una orientación es, en este caso, un "sentido" a la hora de moverse a lo largo de V.

- Si $n = 2$, tenemos las bases ordenadas según el "sentido opuesto al giro de las agujas del reloj" y bases ordenadas según el sentido contrario. Una orientación es, en este caso, un "sentido de giro".

- Si $n = 3$, tenemos las bases ordenadas que siguen "la regla de la mano derecha" y las que siguen la "regla de la mano izquierda".

Como ejercicio, el lector puede comprobar que se puede introducir el concepto de orientación en $V(\mathbb{R})$ de un modo completamente equivalente mediante elementos de volumen como sigue:

(a) Consideremos la relación de equivalencia en $\Lambda^n(V) - \{0\}$ definida por: $\omega_1 \approx \omega_2$ si y sólo si $w_1 = a\,w_2$, $a > 0$.

(b) Llamamos *orientación* en V a cada una de las dos únicas clases de equivalencia definidas por $\approx$. Fijada una de estas clases, $[\omega]$, al par $(V, [\omega])$ le llamaremos *espacio vectorial orientado*.

(c) Sea $(V, [\omega])$ un espacio vectorial orientado. Diremos que una base (ordenada) $B = (v_1, \ldots, v_n)$ está *positivamente orientada* (resp. *negativamente orientada*) si su correspondiente base dual $B^* = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ verifica $\det_B := \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^n \in [\omega]$ (resp. $\det_B \notin [\omega]$).

(d) Fijada $[\omega]$, las bases positivamente ordenadas para $(V, [\omega])$ constituyen una de las dos clases de equivalencia definidas según (1.10). Recíprocamente, si se fija una de estas dos clases de equivalencia $[B]$ entonces la clase del elemento de volumen $[\det_{\overline{B}}]$ es independiente del representante $\overline{B} \in [B]$ que se escoja.

1.9. Tensores y aplicaciones lineales

1.9.1. Aplicación inducida sobre espacios tensoriales

Con el objetivo de dar una definición de determinante de un endomorfismo en la próxima sección, explicaremos a continuación cómo podemos usar aplicaciones lineales entre espacios vectoriales para transportar tensores r-covariantes (en particular los antisimétricos) del codominio al dominio. Usando la aplicación traspuesta se puede, como ejercicio, hacer un estudio paralelo para tensores s-covariantes, y combinando ambos estudios, para tensores (r, s) arbitrarios.

En adelante, $V(\mathbb{K})$ y $V'(\mathbb{K})$ serán dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 1.9.1 Sea $f\colon V \to V'$ lineal y $T' \in \mathcal{T}_{r,0}(V')$. Se define el *tensor inducido* o *pull-back* $f^*T'\colon V^r \to \mathbb{K}$ de T' por f como

$$(f^*T')(w_1, \ldots, w_r) = T'(f(w_1), \ldots, f(w_r)), \quad \forall w_1, \ldots w_r \in V.$$

La siguiente proposición es un ejercicio simple que resume las propiedades del pull-back.

Proposición 1.9.1 *Se verifica:*

(1) $f^*T' \in \mathcal{T}_{r,0}(V)$, *la aplicación* $f^*\colon \mathcal{T}_{r,0}(V') \to \mathcal{T}_{r,0}(V)$ *es lineal y, en particular, conserva los tensores antisimétricos:* $f^*(\Lambda^r(V')) \subset \Lambda^r(V)$.

(2) Si $f = 1_V$ *entonces* $f^* = 1_{\mathcal{T}_{r,0}(V)}$.

(3) Si se tiene otra aplicación lineal $g\colon V' \to V''$, *entonces* $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(4) Si f *es biyectiva, entonces* f^* *es biyectiva y* $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$. *En este caso:*

- $f^*(\Lambda^r(V')) = \Lambda^r(V)$.
- *Definimos* $f_* = (f^{-1})^*$. *Suponiendo que* $g\colon V' \to V''$ *también sea biyectiva, se tiene* $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

(5) $f^*(T'_1 \wedge T'_2) = f^*(T'_1) \wedge f^*(T'_2)$.

1.9.2. Determinante de un endomorfismo

En esta sección, $V(\mathbb{K})$ denotará un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, se define el determinante de f como

$$\det f = \det M(f, B),$$

donde B es cualquier base ordenada de V; esta definición no depende de la elección de B, ya que $M(f, B)$, $M(f, B')$ son matrices semejantes si B, B' son bases ordenadas de V. El hecho de que $\Lambda^n(V)$ tenga dimensión 1 permite redefinir el determinante de un endomorfismo f de manera independiente de matrices, lo cual simplifica muchas demostraciones (por ejemplo, en la Proposición 1.9.3). Para ver esto, observemos primero que f induce un endomorfismo de $\Lambda^n(V)$ y este nuevo endomorfismo debe ser un múltiplo de la identidad porque $\dim(\Lambda^n(V))$=1.

Definición 1.9.2 Sea f un endomorfismo de $V(\mathbb{K})$. Consideremos el endomorfismo

$$\begin{aligned} f^* : \Lambda^n(V) &\to \Lambda^n(V) \\ \omega &\mapsto f^*\omega \end{aligned}$$

Llamamos *determinante* de f al único escalar $\det f \in \mathbb{K}$ que verifica

$$f^* = \det f \cdot 1_{\Lambda^n(V)}.$$

Debemos comprobar que esta definición coincide, para cualquier base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V, con la del determinante de la matriz $M(f, B)$:

Proposición 1.9.2 *Si $f \in End(V)$ y $B = (v_1, \ldots, v_n)$ es una base ordenada de V, entonces el valor de* $\det f$ *según la Definición 1.9.2 verifica*

$$\det f = \det(M(f, B)).$$

Demostración. De acuerdo con la Definición 1.9.2, $f^*(\det_B) = \det f \cdot \det_B$ y aplicando ambos miembros sobre $B = (v_1, \ldots, v_n)$ tenemos $\det f = \det_B(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \det M(f, B)$, siendo la última igualdad por la Proposición 1.8.1(B). $\square$

Como una consecuencia sencilla, se prueban la siguientes propiedades de los determinantes, cuya prueba sería engorrosa de otro modo.

Proposición 1.9.3 *(1) Sean $f, g \in End(V)$. Entonces* $\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$.
(2) Sean $A, C \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces $\det(A \cdot C) = \det A \cdot \det C$.

Demostración. (1) De la Definición 1.9.2, para cualesquiera $\omega \in \Lambda^n(V)$, $w_1, \ldots, w_n \in V$:

$$\begin{aligned} \det(f \circ g) \cdot \omega(w_1, \ldots, w_n) &= [(f \circ g)^*\omega](w_1, \ldots, w_n) \\ &= \omega(f(g(w_1)), \ldots, f(g(w_n))) \\ &= (f^*\omega)(g(w_1), \ldots, g(w_n)) = [g^*[(f^*\omega)](w_1, \ldots, w_n) \\ &= \det g \cdot [(f^*\omega)](w_1, \ldots, w_n) \\ &= \det g \cdot \det f \cdot \omega(w_1, \ldots, w_n) \end{aligned} \tag{1.11}$$

por lo que escogiendo ω y los w_i con $\omega(w_1, \ldots, w_n) \neq 0$ deducimos la igualdad deseada.

(2) Tomemos como $V = \mathbb{K}^n(\mathbb{K})$ con su base usual B_u, y sean $f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ los endomorfismos definidos por $A = M(f, B_u)$, $C = M(g, B_u)$. Así, $A \cdot C = M(f \circ g, B_u)$ y

$$\det(A \cdot C) = \det(f \circ g) = \det f \cdot \det g = \det A \cdot \det C,$$

donde en la primera y última igualdades se usa la Proposición 1.9.2 y en la segunda el apartado (1) anterior. $\square$

Nota 1.9.1 (1) Es de remarcar que en la segunda línea de (1.11) se está implícitamente probando que la aplicación $(f \circ g)^* \colon \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$ verifica $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ (lo cual ya se había establecido con más generalidad en la Proposición 1.9.1(3)).

(2) En la demostración del resultado para matrices, se podría escoger cualquier espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ y cualquier base suya B en lugar de $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$ y B_u.

1.10. Ejercicios.

1. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, B una base ordenada de V, B^* su base ordenada dual y $F\colon V \to V^*$ el único isomorfismo de espacios vectoriales tal que $F(B) = B^*$. Sea B^{**} la base dual de B^* y $G\colon V^* \to V^{**}$ el único isomorfismo de espacios vectoriales tal que $G(B^*) = B^{**}$. Probar que $\Phi = G \circ F$, donde Φ viene dado por (1.1).

2. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que toda base ordenada de V^* es base dual de una única base ordenada de V.

3. Probar la Proposición 1.3.1.

4. Razonar cuáles de las siguientes aplicaciones son tensores:

   a) $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad T(a_0 + a_1 t, b_0 + b_1 t) = a_0 a_1 + b_0 b_1$ ($\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual que 1, con coeficientes reales)

   b) $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad T((x, y, z), (x', y'.z')) = 5xy' - 16yz' + zz'$.

   c) $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad T(A, B) = \mathrm{Traza}(A).\mathrm{Traza}(B)$ ($\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ es el espacio de matrices simétricas de orden 2).

   d) $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad T(A, B) = \mathrm{Traza}(A.B)$.

5. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión $n \geq 2$ y $B^* = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ una base ordenada de V^*. Probar que no existen $\phi, \psi \in V^*$ tales que $\phi \otimes \psi = \varphi^1 \otimes \varphi^2 + \varphi^2 \otimes \varphi^1$.

6. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión 2, y $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ el tensor que en una cierta base ordenada de V viene representado por la matriz

   $$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   ¿Se puede expresar T como el producto tensorial de dos formas lineales sobre V? En caso afirmativo, calcular dichas formas lineales.

7. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión 2, y $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ un tensor que se puede escribir como $T = \varphi \otimes \psi$ donde φ, ψ son dos formas lineales sobre V. Dada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base cualquiera de V, calcular el determinante de la matriz que representa a T en dicha base.

8. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión 2, $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ y A la matriz que representa a T en una cierta base, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, de V. Si A no es regular, prueba que existen formas lineales, φ, ψ, sobre V tales que $T = \varphi \otimes \psi$. Como consecuencia de esta ejercicio y el anterior deducimos que

Un tensor covariante de orden dos sobre un espacio vectorial de dimesión 2 es el producto tensorial de dos formas lineales si y sólo si el determinante de la matriz que lo representa en cualquier base es cero.

9. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión 3, y $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V)$ un tensor que se puede escribir como $T = \varphi \otimes \psi$ donde φ, ψ son dos formas lineales sobre V. ¿Qué se puede decir de la matriz que representa a T en cualquier base de V?

10. Usando los ejercicios anteriores caracteriza, en términos de las matrices que los representan, a los tensores $T \in \mathcal{T}_{2,0}(V^n)$ que se pueden escribir como $T = \varphi \otimes \psi$ donde φ, ψ son dos formas lineales sobre V.

11. Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual que 2, con coeficientes reales, y sea $T \in \mathcal{T}_{2,0}(\mathcal{P}_2)$ el tensor covariante de orden dos que en la base $\{1-t^2, t, 1+t^2\}$ está definido por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Se puede escribir $T = \varphi \otimes \psi$ para ciertas formas lineales, φ y ψ sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?

12. En $\mathcal{T}_{2,0}(\mathbb{R}^2)$ se consideran los tensores que en la base usual vienen representados por las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcula sus coordenadadas en la base de $\mathcal{T}_{2,0}(\mathbb{R}^2)$ asociada a la base usual.

13. En $\mathcal{T}_{2,0}(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}))$ calcula la base asociada con la siguiente base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B} = \{1, t\},$$

y en esa base calcula las coordenadas de los siguientes tensores

$$T_1(P(t), Q(t)) = P(-1).Q(1), \qquad T_2(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P(t).Q(t)\, dt.$$

¿Se pueden expresar T_1, T_2 como producto tensorial de dos formas lineales?

14. En $\mathcal{T}_{2,0}(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}))$ calcula la base asociada con la siguiente base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B} = \{1 - t, 1 + t\},$$

y en dicha base calcula las coordenadas de tensores T_1, T_2 del ejercicio anterior.

15. En $\mathbb{R}^2$ se considera el tensor covariante de orden dos, T, que en la base usual viene representado por la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$
Calcula las partes simétrica T^S y antisimétrica T^A de T (ver Proposición 1.6.1), y las coordenadas de T^S, T^A en las bases asociadas de los correspondientes espacios de tensores $\mathcal{S}_2(V)$ y $\mathcal{A}_2(V)$ según el Teorema 1.6.1.

16. Calcula el producto tensorial, el producto tensorial simétrico y el producto exterior de las siguientes formas lineales sobre $\mathbb{R}^3$
$$\varphi(x,y,z) = 2x - 3z, \quad \psi(x,y,z) = x - y + z.$$
Calcula también las coordenadas de los tensores obtenidos en las bases asociadas con la base usual de $\mathbb{R}^3$.

17. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales se considera la base ordenada usual $B_u = (1, t, t^2)$ y las formas lineales siguientes
$$\varphi(P(t)) = \int_0^1 P(t)\,dt, \qquad \psi(P(t)) = \int_{-1}^1 P(t)\,dt.$$
Calcula los siguientes tensores: $\varphi \otimes \psi$, $\varphi \otimes_s \psi$ y $\varphi \wedge \psi$ así como sus coordenadas en las bases asociadas a B_u.

18. Se consideran las siguientes matrices cuadradas de orden dos
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$
¿pueden representar al mismo tensor covariante de orden dos en dos bases de $\mathbb{R}^2$?

19. En el espacio vectorial $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ de matrices reales y simétricas de orden dos, se considera la siguiente base
$$\mathcal{B} = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
Calcula la base asociada en $\mathcal{T}_{2,0}(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$. En dicha base calcula la expresión del siguiente tensor covariante de orden dos sobre $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$:
$$T(A,B) = \mathrm{Traza}(A.B).$$
Calcula también sus partes simétrica y antisimétrica.

20. Calcular la matriz de coordenadas del tensor métrico (producto escalar usual) de $\mathbb{R}^2$ en la base $\{-1,4);(4,1)\}$.

21. Demostrar el Teorema 1.4.5.

22. Se considera el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de todos los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales. Sea $B=(1,x,x^2)$ su base ordenada usual y $\overline{B}=(1+x,1-x,x^2)$.

    (A) Se define la aplicación:

    $$T:\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R})^*\to\mathbb{R} \qquad (p_1,p_2,\varphi)\mapsto p_1(1)\varphi(p_2)$$

    a) Demostrar que T es un tensor y calcular sus coordenadas en las bases de tensores $B_{2,1}$ y $\overline{B}_{2,1}$ asociadas a $B,\overline{B}$.
    b) ¿Se puede escribir T como producto tensorial de dos tensores?
    c) Calcular $C_1^1(T),C_2^1(T)$ y sus coordenadas en las bases de tensores generadas por B y $\overline{B}$.

    (B) Se considera la forma lineal $\Phi\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})^*$ dada por $\Phi(p)=\int_0^1 p(x)dx$ para todo $p\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, y la aplicación

    $$\begin{aligned}\bar{t}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R})^* &\to\mathbb{R}\\ (p,\phi)&\mapsto\phi(p')\end{aligned}$$

    donde p' denota la derivada de p.

    a) Demostrar que $\bar{t}$ es un tensor y calcular las coordenadas de $\bar{t}\otimes\Phi$ en las bases de tensores generadas a partir de las bases B y $\overline{B}$.
    b) Calcular $C_1^1(\bar{t}\otimes\Phi)$, $C_2^1(\bar{t}\otimes\Phi)$ y $C_1^1(\Phi\otimes\bar{t})$, así como sus coordenadas en las bases de tensores generada por B.

23. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\phi^1,\ldots,\phi^r\in V^*$. Demostrar que $\{\phi^1,\ldots,\phi^r\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\phi^1\wedge\ldots\wedge\phi^r\neq 0$.

24. Usando el tensor métrico (producto escalar) en $\mathbb{R}^3$, prueba que $\mathbb{R}^3$ y su dual son isomorfos de manera natural (sin usar bases para definir el isomorfismo).

25. Sea $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial real de dimensión $n\in\mathbb{N}$. Se dice que f $\in$Aut V *preserva la orientación* (resp. invierte la orientación) si para cualquier base ordenada $B=(v_1,\ldots,v_n)$ se verifica que $(f(v_1),\ldots,f(v_n))$ es una base ordenada en la misma (resp. distinta) orientación que B. Demostrar que equivalen:

    (a) f preserva (resp. invierte) la orientación.

(b) $\det f > 0$ (resp. $\det f < 0$).

(c) Existe una base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V tal que $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ está en la misma (resp. distinta) orientación que B.

(d) Existe un elemento de volumen ω de V tal que $f^*\omega$ determina la misma (resp. distinta) orientación que ω.

(e) Para todo elemento de volumen ω de V, $f^*\omega$ determina la misma (resp. distinta) orientación que ω.

26. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el tensor métrico (producto escalar usual) en $\mathbb{R}^3$. Para cada vector (fijo), $u \in \mathbb{R}^3$, se define $T_u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mediante

$$T_u(x, y) =< x \times y, u >,$$

es bilineal y por tanto un tensor covariante de orden dos sobre $\mathbb{R}^3$.

(A) Comprueba que $T_u \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y calcula las coordendas en la base de este espacio de tensores asociada a la base usual de $\mathbb{R}^3$.

(B) Sea $T \in \mathcal{T}_{2,0}(\mathbb{R}^3)$ cualquier tensor covariante de orden dos sobre $\mathbb{R}^3$. Encuentra un vector, $u \in \mathbb{R}^3$, de manera que $T = T_u$.

(C) Deduce de lo anterior que se puede establecer un isomorfismo natural (independiente de bases) entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{T}_{2,0}(\mathbb{R}^3)$, que sólo depende de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

27. Construye un isomorfismo independiente de bases entre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y su dual, usando el tensor $g \in \mathcal{T}_{2,0}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ definido por

$$g(A, B) = \mathrm{Traza}(A.B^t).$$

Calcula también las imágenes por dicho isomorfismo de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

28. Construye un isomorfismo independiente de bases entre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y su dual, usando el tensor $g \in \mathcal{T}_{2,0}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ definido por

$$g(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P(t).Q(t)\, dt.$$

Calcula también las imágenes por dicho isomorfismo de los polinomios

$$P(t) = 1 + t + t^2 \qquad Q(t) = 2 - t + 3t^2.$$

29. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se considera la base $\mathcal{B}_o = \{1, t, t^2\}$. Calcula las coordenadas en la correspondiente base asociada del tensor $T \in \mathbb{T}^3(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ definido por

$$T = \mathbf{g} \otimes \phi,$$

donde $\mathbf{g} \in \mathcal{T}_{2,0}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ está definido en la base $\mathcal{B}_o$ por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y ϕ es la forma lineal definida por

$$\phi(P(t)) = P(-1).$$

Capítulo 2

Espacio vectorial euclídeo

Los conceptos de "módulo de un vector" o "ángulo entre vectores" de la geometría elemental no han sido estudiados aún con profundidad. La formalización se obtiene de manera simple mediante el concepto de espacio vectorial euclídeo, que desarrollaremos en este tema. Este concepto se circunscribe a espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, aunque haremos algunas consideraciones sobre su extensión para el caso de $\mathbb{C}$.

2.1. Nociones de tensor métrico y producto escalar

Definición 2.1.1 Dado un espacio vectorial real $V(\mathbb{R})$, llamaremos *tensor métrico* (o *métrica*) a cualquier tensor 2-covariante simétrico $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Al par (V, g) se le llama *espacio vectorial métrico* (EVM). Asociados a cada métrica tenemos varios conceptos:

(A) Dos vectores $x, y \in V$ se dicen *ortogonales* si $g(x, y) = 0$. Esto se representa $x \perp y$. Un conjunto $C \subset V$ se dice *ortogonal* si sus elementos son ortogonales dos a dos.

(B) g se dice *no degenerada* si el único $v \in V$ ortogonal a todos los vectores de V es $v = 0$. Es decir, si $v \perp w = 0$ para todo $w \in V$ entonces $v = 0$. Cuando g sea no degenerada, diremos que (V, g) es un *espacio vectorial métrico no degenerado.*

(C) g se dice *definida positiva,* o *euclídea* (*producto escalar euclídeo* o, simplemente *producto escalar)* si cumple

$$g(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V, \qquad \text{y} \quad g(v, v) = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0.$$

En este caso, se dice que (V, g) es un *espacio vectorial euclídeo* (*espacio vectorial métrico euclídeo*, EVME).

Nota 2.1.1 1. Todo espacio vectorial euclídeo es no degenerado: si $v \in V$ verifica $g(v,w) = 0$ para todo $w \in V$, en particular verificará $g(v,v) = 0$ por lo que la condición de ser euclídeo implica $v = 0$.

2. En un EVME, el único vector ortogonal a sí mismo es 0. Esto no tiene porqué se cierto en otros EVM. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}^2, g)$ siendo g la métrica tal que $M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene que $(1,1) \perp_g (1,1)$.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $g_0(x,y) = x^t \cdot y$ (producto escalar usual). g_0 es una métrica euclídea.

2. Dada una matriz $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (simétrica), consideremos el EVM $(\mathbb{R}^n, g_A)$, donde $g_A(x,y) = x^t \cdot A \cdot y$. Este ejemplo generaliza al anterior, que tiene $A = I_n$. En el caso de que tomemos
$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right),$$
obtenemos la *métrica de Lorentz-Minkowski* en $\mathbb{R}^n$, que aparece en la teoría de la Relatividad especial.

3. Sobre el espacio vectorial $V = C([a,b], \mathbb{R})$ de las funciones continuas en un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, se define el *producto* L^2 como
$$g(f,h) = \int_a^b f(t)h(t)\,dt, \quad f,h \in C([a,b],\mathbb{R}). \tag{2.1}$$
g es una métrica euclídea sobre el espacio de dimensión infinita $C([a,b],\mathbb{R})$.

4. Sobre el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se define
$$g(A,B) = \text{Traza}(A^t \cdot B), \tag{2.2}$$
que resulta ser una métrica euclídea. ¿Qué tiene que ver esta métrica con el producto escalar usual en $\mathbb{R}^{n^2}$?

5. Si (V,g) es un EVM y $U \subset V$ es un subespacio vectorial, entonces $(U, g|_{U\times U})$ vuelve a ser un EVM (*métrica inducida* en un subespacio). Además, si (V,g) es EVME, entonces $g|_{U\times U}$ es euclídea sobre U, pero el recíproco no es cierto. ¿Podrías dar un contraejemplo?

6. Si (V_i, g_i), $i = 1,2$ son dos EVM, en $V_1 \times V_2$ se define la *métrica producto* como $g((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = g_1(x_1,y_1) + g_2(x_2,y_2))$. Si además g es euclídea si y sólo si g_1 y g_2 son euclídeas.

Si $\dim_{\mathbb{R}} V = n \in \mathbb{N}$ y B es una base ordenada de V, entonces un tensor 2-covariante es una métrica si y sólo si la matriz $M_B(g)$ es simétrica. Recordemos que el cambio de base en $\mathcal{T}_{2,0}(V)$ sigue la fórmula (ver el Teorema 1.4.2)

$$M_{\overline{B}}(g) = P^t M_B(g) P,$$

donde $P = M(1_V, \overline{B}, B)$. Esta fórmula permite definir el rango de g como el de la matriz $M_B(g)$, independientemente de la base ordenada B.

Proposición 2.1.1 *Sea (V, g) un EVM y B una base ordenada de V. Entonces, g es no degenerada si y sólo si $M_B(g)$ es regular.*

Demostración. Usando la fórmula (1.3) tenemos que dado $v \in V$,

$$g(v, w) = 0 \ \forall w \in V \ \Leftrightarrow \ (v_B)^t \cdot M_B(g) \cdot w_B = 0 \ \forall w_B \in \mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow \ (v_B)^t \cdot M_B(g) = 0.$$

Luego g es degenerada si y sólo si el sistema de ecuaciones lineales $(v_B)^t \cdot M_B(g) = 0$ tiene solución no trivial, lo cual equivale a que $\det M_B(g) = 0$. □

2.2. Métricas y formas cuadráticas

Definición 2.2.1 Dado un EVM (V, g), se define la *forma cuadrática* asociada a g como

$$F_g \colon V \to \mathbb{R}, \quad F_g(x, x) = g(x, x).$$

Las formas cuadráticas tienen las siguientes propiedades:

Lema 2.2.1 *Con la notación anterior, sean $x, y \in V$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces,*

1. $F_g(ax) = a^2 F_g(x)$,
2. $g(x, y) = \frac{1}{2}\left[F_g(x + y) - F_g(x) - F_g(y)\right]$.

Demostración. Ejercicio. □

El apartado 2 del Lema 2.2.1 permite recuperar la métrica sabiendo sólo la forma cuadrática. Esto da pie a definir forma cuadrática sin partir de una métrica:

Definición 2.2.2 Dado un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$, una *forma cuadrática* sobre V es una aplicación $F \colon V \to \mathbb{R}$ tal que:

(i) El apartado 1 del Lema 2.2.1 se cumple.

(ii) El apartado 2 del Lema 2.2.1 define una métrica sobre V (*métrica asociada* a F).

Métricas y formas cuadráticas son dos lenguajes para expresar conceptos equivalentes en cierto sentido que precisamos en el siguiente enunciado.

Proposición 2.2.1 *Dado un espacio vectorial real $V(\mathbb{R})$ con dimensión n, recordemos la notación $\mathcal{S}_2(V) = \{$métricas en $V\}$ que introducíamos en la Definición 1.6.1. Sea $F(V) = \{$formas cuadráticas en $V\}$. Entonces, $F(V)$ es un espacio vectorial real de dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$ y la aplicación $\Phi \colon \mathcal{S}_2(V) \to F(V)$ dada por $\Phi(g) = F_g$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Que $F(V)$ es un espacio vectorial es consecuencia directa de la Definición 2.2.2 (dadas $F_1, F_2 \in F(V)$, $F_1 + F_2$ saca los escalares al cuadrado y $F_1 + F_2$ tiene por métrica asociada a $g_{F_1+F_2} = g_{F_1} + g_{F_2}$ sin más que usar la fórmula del apartado 2 del Lema 2.2.1).

Que Φ es un isomorfismo de espacios vectoriales (con inversa $\Phi^{-1}(F) = g_F$) es un cálculo directo. En particular, la dimensión de $F(V)$ es igual a la de $\mathcal{S}_2(V)$, que vale $\frac{n(n+1)}{2}$ por el Teorema 1.6.1. □

2.3. Tipos de métricas

Además de las métricas euclídeas y las no degeneradas, existen otros tipos, englobados en la siguiente definición.

Definición 2.3.1 Sea g una métrica sobre un espacio vectorial real V.

- g se dice degenerada si existe $x \in V - \{0\}$ tal que $x \perp y$, $\forall y \in V$.
- g se dice *semidefinida positiva* si $g(x, x) \geq 0$, $\forall x \in V$.
- g se dice *semidefinida negativa* si $g(x, x) \leq 0$, $\forall x \in V$.
- g se dice *definida negativa* si $-g$ es euclídea.
- Finalmente, g se dice *indefinida* si $\exists v, w \in V$ tales que $g(v, v) > 0$ y $g(w, w) < 0$. Este caso a su vez se divide en dos, según que g sea degenerada o no. Un ejemplo de métrica indefinida no degenerada es la métrica de Lorentz-Minkowski sobre $\mathbb{R}^n$.

Tipos de Métricas	no degeneradas	euclídea (def. +)
		def. −
		indefinida
	degeneradas	semidef. +
		semidef. −
		indefinida

Las definiciones anteriores se pueden extender a cualquier matriz simétrica $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sin más que usar la métrica g_A definida sobre $\mathbb{R}^n$ a partir de A, ver el ejemplo 2 después de la Nota 2.1.1.

2.4. Bases ortogonales y ortonormales

Definición 2.4.1 Dado un EVM (V, g) de dimensión finita n, una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V se dice *ortogonal* cuando $g(v_i, v_j) = 0$ para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$, es decir, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$g(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

La base B se dice *ortonormal* cuando $\lambda_i \in \{-1, 1\}$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Nota 2.4.1

1. g es no degenerada si y sólo si $\lambda_i \neq 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$. En este caso, si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortogonal y (2.3) se da, entonces podemos cambiar cada vector v_i por $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} v_i$, obteniendo base ortonormal.

2. Si (V, g) admite una base ortonormal con todos los $\lambda_i = 1$, entonces g es euclídea. Veremos más adelante que el recíproco es cierto.

3. Dada una base B de V, siempre existe una métrica g sobre V que have a B ortogonal, e incluso ortonormal: basta elegir $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y definir

$$g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \varphi^i \otimes \varphi^i,$$

donde $B^* = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ es la base dual de B. Si tomamos $\lambda_i = 1$ para todo i, B es una base ortonormal para g, y g es euclídea..

2.5. Orientación en un espacio vectorial real.

Esta sección no tiene que ver con métricas y EVMs, pero la inluimos aquí para darle sentido al apartado 2 de la Proposición 2.5.1, que nos habla de la matriz de cambio de base entre bases ortonormales.

En el conjunto $\mathcal{B}$ de las bases ordenadas en un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$, se define la relación de equivalencia

$$B \sim B' \Leftrightarrow \det M(1_V, B, B') > 0.$$

El conjunto cociente $\mathcal{B}/\sim$ tiene dos clases de equivalencia:

$$C(B) = \{B_1 \in \mathcal{B} \mid \det M(1_V, B, B_1) > 0\}, \quad C(B') = \{B_1 \in \mathcal{B} \mid \det M(1_V, B, B_1) < 0\},$$

donde $B' = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si $B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definición 2.5.1 A cada una de las dos clases $C(B), c(B')$ se le llama una *orientación* sobre V, y al par $(V, c(B))$ se le llama *espacio vectorial orientado.* Cada espacio vectorial real produce dos espacios vectoriales orientados.

Definición 2.5.2 Un isomorfismo entre EV orientados $f\colon (V_1, c(B_1)) \to (V_2, c(B_2))$ se dice que *conserva la orientaciones* $c(B_1)$ *y* $c(B_2)$ si dada $B \in C(B_1)$, la base $f(B)$ está en $c(B_2)$ (esto no depende del representante $B \in C(B_1)$). Si f no conserva las orientaciones $c(B_1)$ y $c(B_2)$, decimos que las *invierte.*

Si cambiamos la orientación en uno de V_1 ó V_2 (pero no en los dos), el mismo isomorfismo f pasa de conservar a invertir las orientaciones, y viceversa. En el caso de un automorfismo $f : V \to V$, podemos hablar de si f conserva o invierte la orientación sin especificar cuál de las dos, porque entendemos que consideramos la misma orientación sobre V en el dominio y en el codominio de f.

Del Teorema 1.4.2 se deduce lo siguiente.

Proposición 2.5.1 *Si B, B' son bases ortonormales de un EVME (V, g) con $\dim V = n$, entonces*

1. *$M(1, B, B') \in O(n)$, donde $O(n) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1}\} \subset Gl(n, \mathbb{R})$ (grupo ortogonal). En particular, el determinante de toda matriz ortogonal es ± 1.*
2. *B, B' determinan la misma orientación sobre V si y sólo si $\det M(1_V, B, B') = 1$, lo cual ocurre si y sólo si $M(1, B, B') \in SO(n) := O(n) \cap \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$.*

2.6. Distancia y norma

Definición 2.6.1 Sea X un conjunto no vacío. Una *distancia* en X es una aplicación $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ que verifica, para todo $x, y, z \in X$:

(i) Positividad: $d(x, y) \geq 0$, y la igualdad se verifica si y sólo si $x = y$.

(ii) Simetría: $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) Desigualdad triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Al par (X, d) se le llamará *espacio métrico.*

Ejemplo 2.6.1 Las siguientes aplicaciones definen distancias sobre $\mathbb{R}^2$:

(a) Distancia usual: $d_0((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

(b) Distancia según las direcciones de los ejes: $d_e((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|$.

(c) Distancia de la Renfe: $d_R((x, y), (x', y')) = d_0((x, y), (x', y'))$ si hay una recta que pase por el origen $(0, 0)$ y por ambos puntos (x, y), (x', y'); y $d_R((x, y), (x', y')) = d_0((x, y), (0, 0)) + d_0((0, 0), (x', y'))$ en caso contrario.

Definición 2.6.2 Sea $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial real. Una *norma* en V es una aplicación

$$\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}, \qquad v \mapsto \|v\|$$

que verifica, para todo $v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:
(i) Positividad: $\|v\| \geq 0$, y la igualdad se verifica si y sólo si $v = 0$.
(ii) Homogeneidad: $\|\lambda v\| = |\lambda|.\|v\|$
(iii) Desigualdad triangular: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.
Al par $(V, \|\cdot\|)$ se le llama *espacio (vectorial) normado.*

Ejemplo 2.6.2 Las siguientes aplicaciones son normas:

(a) En $V = \mathbb{R}^n$ y dado $p \in [1, \infty)$, $\quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$

(la desigualdad triangular no es trivial y se conoce como la desigualdad de Minkowski para l_p)

(b) En $V = \mathbb{R}^n$, $\quad \|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$.

(c) Sea $p \in [1, \infty)$. En $V = l_p := \left\{\{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\right\}$, $\quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$.

(d) En $V = l_\infty := \{\{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \mid \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$, $\quad \|x\|_\infty = \sup\{|x_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$

Proposición 2.6.1 *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. La aplicación:*

$$d_{\|\cdot\|}\colon V \times V \to \mathbb{R}, \qquad (v, w) \mapsto \|v - w\|$$

define una distancia en V, a la que se llamará distancia asociada a la norma*. Además, $d_{\|\cdot\|}$ es invariante por traslaciones: $d_{\|\cdot\|}(u + v, u + w) = d_{\|\cdot\|}(v, w), \quad \forall u, v, w \in V$.*

Demostración. Inmediata comparando las propiedades (i), (ii) e (iii) en las definiciones de distancia y norma. □

La norma más importante para esta asignatura es la asociada a una métrica euclídea:

Definición 2.6.3 Sea (V, g) un EVME. La *norma* asociada a g es la aplicación

$$\|\cdot\|_g\colon V \to \mathbb{R}, \qquad v \mapsto \|v\|_g := \sqrt{g(v,v)} \ \left(= \sqrt{F_g(v)}\right). \tag{2.4}$$

Proposición 2.6.2 *La aplicación $\|\cdot\| = \|\cdot\|_g$ verifica, para todo $v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:*

1. *Positividad:* $\|v\| \geq 0$*, con igualdad si y sólo si* $v = 0$*.*

2. *Homogeneidad:* $\|\lambda v\| = |\lambda|.\|v\|$*.*

3. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:* $|g(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$*, dándose la igualdad si y sólo si* $\{v, w\}$ *es linealmente dependiente.*

4. *Desigualdad de Minkowski o triangular:* $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$*, dándose la igualdad si sólo si* $\{v, w\}$ *es linealmente dependiente y* $g(v, w) \geq 0$*.*

Demostración. Las propiedades (1) y (2) son inmediatas.

Veamos la desigualdad de Schwarz: Tomemos $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq g(\lambda v + w, \lambda v + w) = \lambda^2 g(v, v) + 2\lambda g(v, w) + g(w, w).$$

Viendo lo anterior como polinomio en λ (parábola), su discriminante Δ ha de ser ≤ 0. Pero

$$\Delta = 4g^2(v, w) - 4g(v, v)g(w, w),$$

luego la desigualdad de Schwarz se cumple. Si la igualdad se da en la desigualdad de Schwarz, entonces $\Delta = 0$ luego la parábola anterior en λ toca al eje de abscisas: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 = \lambda^2 g(v, v) + 2\lambda g(v, w) + g(w, w) = g(\lambda v + w, \lambda v + w)$, de donde $\lambda v + w = 0$.

Finalmente, la desigualdad triangular:
$\|v + w\|^2 = g(v + w, v + w) = g(v, v) + 2g(v, w) + g(w, w) \leq g(v, v) + 2|g(v, w)| + g(w, w)$
$\leq g(v, v) + 2\|v\|\|w\| + g(w, w) = (\|v\| + \|w\|)^2$. □

Nota 2.6.1 Los conceptos de métrica y distancia pueden llevar a confusión:

En muchos textos, a cualquier distancia d (según la Definición 2.6.1) a menudo se le llama también *métrica*, y de ahí que a (X, d) se le llame *espacio métrico*.

Puesto que un producto escalar (euclídeo) induce una norma y, por tanto, una distancia, a (V, g) se le llama también frecuentemente *espacio vectorial métrico (euclídeo)*.

Es conveniente estudiar cualquier tipo de tensor métrico (según la Definición 2.1.1; no lo llamaremos ahora métrica por no confundir con distancia). Sin embargo, en muchas ocasiones se llama *métrica* a cualquier tensor métrico, sea o no euclídeo (y, por tanto, tenga o no asociada una distancia) y *espacio vectorial métrico (EVM)* a cualquier espacio vectorial con un tensor métrico, aunque no sea un espacio métrico en el sentido de tener una distancia.

Nosotros evitaremos la posibilidad de confusión reservando el nombre de *métrica* para tensores métricos (sin aplicarlo a distancias), y diremos *métrica euclídea* cuando queramos especificar que el tensor métrico es un producto escalar.

2.7. Ángulo entre dos vectores en un EVME.

Dado un producto escalar euclídeo (V, g) la desigualdad de Cauchy-Schwarz permite definir el ángulo que forman dos vectores distintos de 0. Se supone para ello un conocimiento previo de la función coseno $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Nota 2.7.1 Aunque la función coseno $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se supone conocida, se la puede definir formalmente como sigue:

(a) Consideremos la función $c\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ cuya gráfica $G(c) := \{(x, c(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]\}$ es una semicircunferencia cerrada de radio 1 centrada en el origen.

(b) Podemos definir la función arco-coseno $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$, como la función que a cada $x \in [-1,1]$ le hace corresponder la longitud de la curva $c|_{[x,1]}$ (esta longitud se puede calcular como un límite aproximando la curva por poligonales).

(c) La función $\arccos$ así definida es biyectiva, por lo que se puede considerar su función inversa $(\arccos)^{-1}\colon [0,\pi] \to [-1,1]$. Esta inversa se puede extender de manera par a una función $[-\pi,\pi] \to [-1,1]$. A su vez, esta extensión se puede extender a una función periódica (de período 2π) definida sobre todo $\mathbb{R}$ y con codominio $[-1,1]$. Esta extensión es, por definición, la función coseno, $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$.

Definición 2.7.1 Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $v, w \in V \setminus \{0\}$. El *ángulo formado por v y w* (también llamado *ángulo no orientado*) se define como:

$$\sphericalangle(v,w) = \arccos \frac{g(v,w)}{\|v\|\,\|w\|} \quad \in [0,\pi].$$

Proposición 2.7.1 *Sea (V, g) un EVME. Dados $v, w \in V \setminus \{0\}$, se tienen:*

1. *Simetría:* $\sphericalangle(v,w) = \sphericalangle(w,v)$.
2. $g(v,w) = \|v\|\|w\| \cos \sphericalangle(v,w)$.
3. *Homogeneidad positiva: dados* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\sphericalangle(\lambda_1 v, \lambda_2 w) = \begin{cases} \sphericalangle(v,w) & \text{si } \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0, \\ \pi - \sphericalangle(v,w) & \text{si } \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0. \end{cases}$$

   En particular, $\sphericalangle(v,w) = \sphericalangle(\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|})$.

4. $\sphericalangle(v,w) = 0, \pi$ *si y sólo si* v, w *son linealmente dependientes.*

5. *Ortogonalidad:* $\sphericalangle(v,w) = \frac{\pi}{2}$ *si y sólo si* $v \perp w$.

6. *Teorema del coseno:* $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\,\|w\|\cos(\sphericalangle(v,w))$.
   Denotando $a := \|v\|$, $b := \|w\|$, $c := \|v-w\|$ *y* $\phi = \sphericalangle(v,w)$ *esta igualdad se reescribe*
   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi$$
   que tiene una interpretación en geometría elemental para triángulos con lados a, b, c *y ángulo* ϕ *entre los dos primeros. En particular, cuando* $\phi = \pi/2$ *(triángulo rectángulo de catetos* a *y* b*, e hipotenusa* c*) se reobtiene el Teorema de Pitágoras,* $c^2 = a^2 + b^2$.

Demostración. Ejercicio. □

Es claro que el valor del ángulo no orientado entre dos vectores v, w no cero en un EVME sólo depende de la restricción de g al subespacio generado por v, w, que tiene dimensión a lo más dos. Es decir, el ángulo no orientado es un concepto esencialmente bidimensional. En esta dimensión se puede afinar la definición para distinguir el sentido de giro en el ángulo, si tenemos en cuenta la orientación. Desarrollaremos esto a continuación.

Lema 2.7.1 *Sea* (V^2, g) *un EVME con* $\dim V = 2$*, y sea* B *una base ortonormal de* (V, g)*. Entonces,*
$$(\det_B(v,w))^2 + g(v,w)^2 = \|v\|^2\|w\|^2, \quad \forall v, w \in V,$$
donde $\det_B$ *es el tensor determinante en la base* B*, es decir,*
$$\det_B(v,w) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$
si $v_B = (a_1, a_2), w_B = (b_1, b_2)$ *son las coordenadas de* v, w *respecto a* B.

Demostración.
$$\|v\|^2\|w\|^2 - g(v,w)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (\det_B(v,w))^2 .$$
□

Si además suponemos $v, w \in V \setminus \{0\}$, el Lema 2.7.1 se traduce en
$$\left(\frac{\det_B(v,w)}{\|v\|\|w\|}\right)^2 + \left(\frac{g(v,w)}{\|v\|\|w\|}\right)^2 = 1.$$

Definición 2.7.2 Sea $[B]$ una orientación en un plano euclídeo (V, g), representada por una base ortonormal B. Dados $v, w \in V \setminus \{0\}$, el *ángulo orientado* entre v y w es el único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\det_B(v,w)}{\|v\|\|w\|}, \qquad \cos\theta = \frac{g(v,w)}{\|v\|\|w\|}.$$

Nota 2.7.2

- La definición de ángulo orientado no depende de la base ortonormal positiva B. Esto se deduce de que para dos bases cualesquiera B, B' de V, no necesariamente ortonormales, se tiene $\det_B = \det M(1_V, B', B)\ \det_{B'}$ (por el apartado (D) de la Proposición 1.8.1) y de que $\det M(1_V, B', B) = 1$ (por el apartado 2 de la Proposición 2.5.1)

- El ángulo orientado no es simétrico, porque $\det_B$ es antisimétrico: si el ángulo orientado entre v y $w \in V \setminus \{0\}$ respecto a $[B]$ es θ, entonces el ángulo orientado entre w y v respecto a $[B]$ es $2\pi - \theta$.

- Si $B = (v_1, v_2)$ entonces $B' = (-v_1, v_2)$ representa la orientación opuesta $[B']$ a $[B]$, y de la definición de $\det_B$ se tiene que $\det_{B'} = -\det_B$. Por tanto, Un argumento como el del punto anterior nos dice que el ángulo orientado pasa de ser θ a $2\pi - \theta$ si cambiamos la orientación en (V, g) sin cambiar el orden de v, w.

2.8. Suplemento ortogonal y proyección ortogonal

Sea (V, g) un EVM. Dado un subconjunto $C \subset V$ se define su *ortogonal* como

$$C^\perp = \{v \in V \mid g(u, v) = 0, \forall u \in C\}.$$

Es muy fácil comprobar que $C^\perp$ es un subespacio vectorial de V y $\{0\}^\perp = V$. Si además g es no degenerada, entonces $V^\perp = \{0\}$.

Notemos que, incluso siendo g no degenerada, es posible que exista $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $v \in \{v\}^\perp$: tomemos $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ dotado de la métrica de Lorentz-Minkowski.

En el caso particular no degenerado, queremos saber la relación entre un subespacio vectorial $U \subset V$ y su ortogonal $U^\perp$. Analizaremos el caso degenerado más adelante.

Teorema 2.8.1 *Sea (V, g) un EVM no degenerado de dimensión finita, y $U \subset V$ un subespacio vectorial. Entonces,*

1. $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

2. $(U^\perp)^\perp = U$.

3. *El tensor métrico $g_U = g|_{U \times U}$ es no degenerado si y sólo si $V = U \oplus U^\perp$, en cuyo caso a $U^\perp$ se le llama* suplemento ortogonal *de U. En particular, si g es una métrica euclídea se tiene $V = U \oplus U^\perp$.*

Demostración. (1) Dada una base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots v_n)$ de V cuyos m primeros elementos generen U, un vector $v = \sum_{i=1}^n a^i v_i$ pertenecerá a $U^\perp$ si y sólo si

$$0 = g(v, v_j) = \sum_{i=1}^n a^i g(v_i, v_j), \qquad \forall j = 1, \ldots m.$$

Estas igualdades se pueden ver como un sistema homogéneo $Ax = 0$ de m ecuaciones con n incógnitas $a^1, \ldots, a^n$, cuya matriz de coeficientes A está formada por las primeras m filas de $M_B(g)$. Puesto que $M_B(g)$ es regular, las m filas de A son linealmente indendientes y las soluciones de $Ax = 0$ constituyen un subespacio vectorial de dimensión $n - m$.

Para el apartado 2, La inclusión $U \subset (U^\perp)^\perp$ es inmediata. Como $\dim(U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = n - (n - m) = m = \dim U$, deducimos este apartado.

Para el apartado 3, g_U es degenerado si y sólo si $\dim(U \cap U^\perp) > 0$. A partir de aquí la propiedad es trivial. □

De la demostración del apartado 3 anterior se deduce que (V, g) es un EVM no degenerado de dimensión finita y U es un subespacio de (V, g), entonces g_U es no degenerada si y sólo si $g_{U^\perp}$ es no degenerada.

Definición 2.8.1 Sea (V, g) EVM no degenerado de dimensión finita, y $U \subset V$ un subespacio vectorial no degenerado (es decir, g_U es no degenerada). Se definen las *proyecciones ortogonales* $p_U, p_{U^\perp} : V \to V$ mediante

$$p_U(v) = u, \qquad p_{U^\perp}(v) = w \qquad \text{donde } v = u + w, \text{ con } u \in U, w \in U^\perp.$$

(u, w están determinados de manera única por el apartado (3) del teorema anterior).

Proposición 2.8.1 *En la situación anterior,* $p_U, p_{U^\perp} \in \mathrm{End}(V)$ *y verifican:*

1. $p_U \circ p_U = p_U$, $p_{U^\perp} \circ p_{U^\perp} = p_{U^\perp}$ *(*p_U, $p_{U^\perp}$ *son proyecciones).*

2. $p_U + p_{U^\perp} = 1_V$.

3. $U = \mathrm{Im}(p_U)$, $U^\perp = \ker(p_U)$.

4. p_U *y* $p_{U^\perp}$ *son diagonalizables, sus valores propios son* $0, 1$, *con subespacios propios son*
$$V_0^{p_U} = U^\perp = V_1^{p_{U^\perp}}, \quad V_0^{p_{U^\perp}} = U = V_1^{p_U}.$$

5. $g(p_U(v), w) = g(v, p_U(w)), (p_{U^\perp}(v), w) = g(x, p_{U^\perp}(w))$, $\forall v, w \in V$.

Demostración. Ejercicio. □

Definición 2.8.2 Sea (V, g) un EVM. Se define el *índice* de (V, g) como

$$\mathrm{Ind}(V, g) = \sup\{\dim U \mid U \leq V \text{ tal que } (U, g_U = g|_{U \times U}) \text{ es definido negativo}\}.$$

Retomemos a continuación las bases ortonormales introducidas en la Definición 2.4.1.

Definición 2.8.3 *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico no degenerado, y una base ortonormal $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Podemos reordenar esta base para que se cumpla (comparar con (2.3)) para todo $i, j = 1, \ldots, n$:*

$$(2.5) \qquad g(v_i, v_j) = \epsilon_i \delta_{ij}, \qquad \text{donde} \quad \epsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 1, \ldots, s, \\ 1 & \text{si } i = s+1, \ldots, n. \end{cases}$$

La elección de que los valores negativos para ϵ_i en (2.5) sean los primeros se hace por conveniencia en la notación.

Teorema 2.8.2 *Sea (V, g) un espacio vectorial métrico no degenerado de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Entonces,*

1. *(V, g) admite una base ortonormal.*
2. *Dada cualquier base ortonormal de (V, g), el número s determinado por (2.5) cumple $s = \mathrm{Ind}(V, g)$. En particular, s no depende de la base ortonormal escogida.*
3. *Si $U < V$ es un subespacio vectorial no degenerado de V, toda base ortonormal B_U de U se extiende a una base ortonormal de (V, g).*

Demostración. Probaremos el apartado 1 por inducción sobre la dimensión n. Para $n = 1$, el resultado se deduce del apartado 1 de la Nota 2.4.1.

Supongamos que este apartado se cumple para dimensión $n - 1$. Tomemos un EVM no degenerado (V, g) con $\dim V = n$. Como g es no nula, existe un vector $v \in V$ tal que $g(v, v) \neq 0$ (en caso contrario, dados $v, w \in V$ tendríamos $0 = g(v + w, v + w) = g(v, v) + g(w, w) + 2g(v, w) = 2g(v, w)$ luego $g \equiv 0$, contradicción). Como $U = L(\{v\})$ es un subespacio no degenerado, el apartado 3 del Teorema 2.8.1 implica $V = U \oplus U^\perp$. Además $U^\perp$ es no degenerado (porque U no es degenerado, recordemos que U es no degenerado si y sólo si $U \cap U^\perp = \{0\}$) y tiene dimensión $n - 1$, luego por hipótesis de inducción existe una base ortonormal $B_{U^\perp}$ de $(U^\perp, g_{U^\perp})$. Añadiendo $\frac{1}{\sqrt{|g(v,v)|}} v$ a $B_{U^\perp}$ obtenemos una base ortonormal de (V, g).

Para el apartado 2, supongamos que $B = (v_1, \ldots, v_n)$ es una base ortonormal de (V, g). Claramente, definiendo $U = L(\{v_1, \ldots, v_s\})$ se tiene que (U, g_U) es definida negativa, luego por definición de índice, $s \leq \mathrm{Ind}(V, g)$. Supongamos, por reducción al absurdo, que esta última desigualdad fuera estricta. Eso quiere decir que existen $s' \in \mathbb{N}$ con $s < s' \leq n$, y s' vectores linealmente independientes $v'_1, \ldots, v'_{s'} \in V$ tales que definiendo $U' = L(\{v'_1, \ldots, v'_{s'}\})$, se tiene que $(U', g_{U'})$ es definido negativo. Llamemos $U_1 = L(\{v_{s+1}, \ldots, v_n\})$. Es claro que (U_1, g_{U_1}) es euclídea. Entonces,

$$\begin{aligned} \dim(U_1 \cap U') &= \dim U_1 + \dim U' - \dim(U_1 + U') = (n - s) + s' - \dim(U_1 + U') \\ &\geq (n - s) + s' - n = s' - s > 0, \end{aligned}$$

luego $\exists x \in U_1 \cap U'$, $x \neq 0$. Como $x \in U_1$, $g(x,x) > 0$. Como $x \in U'$, $g(x,x) < 0$, contradicción. Por tanto, $s = \mathrm{Ind}(V, g)$ y el apartado 2 está probado.

Para el apartado 3, extenderemos B_U añadiendo los vectores de una base ortonormal de $(U^\perp, g_{U^\perp})$. □

Definición 2.8.4 Si g es un tensor no degenerado, será un producto escalar (euclídeo) si y sólo si su índice s es 0. En el caso de que el índice sea 1 se le llamará *tensor métrico lorentziano* o, simplemente, métrica o producto escalar *lorentziano* (remarcamos en este último caso la palabra "lorentziano" porque por defecto se entiende que los productos escalares, si no se hace más especificación, son euclídeos). Estos productos escalares lorentzianos desempeñan un papel decisivo en la teoría de la Relatividad.

2.9. El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Todo lo visto en la sección anterior se puede aplicar a métricas euclídeas, con la ventaja de un EVME todos los subsespacios vectoriales no triviales son no degenerados (de hecho, son euclídeos). En esta sección nos centraremos en el caso euclídeo, que está más próximo a la intuición. No obstante, el lector podrá ir comprobando la posibilidad de extender nuestro estudio al caso no degenerado.

Proposición 2.9.1 *Sea (V, g) un EVME y $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base ordenada ortonormal. Entonces,*

1. *Las coordenadas de cada $v \in V$ respecto a B son $v_B = (g(v, v_1), \ldots, g(v, v_n))_B \in \mathbb{R}^n$.*
2. *Dados $v, w \in V$, $g(v, w) = (v_B)^T \cdot w_B$.*
3. *Dado $v \in V$, $\|v\| = \left(\sum_{i=1}^{n} g(v, v_i)^2\right)^{1/2}$.*

Demostración. Ejercicio. □

A partir de la proposición anterior, es inmediato comprobar lo siguiente:

Lema 2.9.1 *Sea (V, g) un EVME, $U \subset V$ un subespacio y $B_U = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base ortonormal de (U, g_U). Entonces, las proyecciones ortogonales p_U y $p_{U^\perp}$ vienen dadas por*

$$p_U(v) = \sum_{i=1}^{m} g(v, v_i) v_i, \qquad p_{U^\perp}(v) = v - \sum_{i=1}^{m} g(v, v_i) v_i, \qquad \forall v \in V.$$

El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.
Aunque la existencia de bases ortonormales ya quedó asegurada para cualquier EVM (V, g) no degenerado de dimensión finita (Teorema 2.8.1), en el caso euclídeo hay un proceso simple y sistemático de construir a partir de cualquier base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, una base ortonormal de (V, g). El proceso tiene dos pasos:

1. Definiendo $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2 - a_{12}w_1$ con $a_{12} = \frac{g(v_2,w_1)}{g(w_1,w_1)}, \ldots, w_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}w_i$ con $a_{in} = \frac{g(v_n,w_i)}{g(w_i,w_i)}$, se tiene que $w_i \in L(\{v_1\}) \oplus \ldots \oplus L(\{v_i\})$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base ortogonal de (V, g).

2. Definiendo $e_i = \frac{1}{\|w_i\|} w_i$ $\forall i$ tenemos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal de (V, g).

2.9.1. Clasificación de las métricas: Teorema de Sylvester

Definición 2.9.1 Sea (V, g) un EVM. El *radical de g* es el conjunto:

$$\mathrm{Rad}(g) = \{v \in V \mid g(v, w) = 0 \ \forall w \in V\} = V^{\perp}.$$

Es trivial probar que $\mathrm{Rad}(g)$ es un subespacio vectorial de V.

A continuación veremos que es posible cambiar (V, g) por otro EVM no degenerado construido a partir de éste. Esta construcción nos permitirá dos cosas:

1. Podremos aplicar que el doble ortogonal de un subespacio coincide con el subespacio de partida (apartado 2 de Teorema 2.8.1).

2. Podremos calcular el índice de g como el índice de $g_U = g|_{U \times U}$, siendo U cualquier suplementario de $\mathrm{Rad}(g)$, es decir $V = \mathrm{Rad}(g) \oplus U$. Además, g_U será no degenerada.

Consideremos la siguiente relación de equivalencia en V: $u, v \in V$ se relacionan si y sólo si $u - v \in \mathrm{Rad}(g)$. Denotamos por $v + \mathrm{Rad}(g)$ a la clase de equivalencia de cada $v \in V$ y por $V/\mathrm{Rad}(g) = \{v + \mathrm{Rad}(g) \mid v \in V\}$ al conjunto cociente. $V/\mathrm{Rad}(g)$ tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones

$$(v + \mathrm{Rad}(g)) + (w + \mathrm{Rad}(g)) = (v + w) + \mathrm{Rad}(g), \quad \lambda(v + \mathrm{Rad}(g)) = (\lambda v) + \mathrm{Rad}(g),$$

$\forall v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, que están bien definidas (no dependen del representante en cada clase). Definimos $\widetilde{g}\colon (V/\mathrm{Rad}(g)) \times (V/\mathrm{Rad}(g)) \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{g}\,(v + \mathrm{Rad}(g), w + \mathrm{Rad}(g)) = g(v, w),$$

que está bien definida (no depende de los representantes) por definición de radical de g. Consideramos la aplicación lineal sobreyectiva $\pi\colon V \to V/\mathrm{Rad}(g)$ dada por $\pi(v) = v + \mathrm{Rad}(g)$, cuyo núcleo es $\mathrm{Rad}(g)$.

Lema 2.9.2 *En la situación anterior,*

1. *$\widetilde{g}$ define una métrica no degenerada sobre $V/\mathrm{Rad}(g)$.*
2. *Si $\dim V$ es finita, entonces $\mathrm{Indice}(V,g) = \mathrm{Indice}(V/\mathrm{Rad}(g), \widetilde{g})$.*

Demostración. Que $\widetilde{g}$ define una métrica sobre $V/\mathrm{Rad}(g)$ (ya sabemos que no depende de los representantes, falta comprobar que es bilineal y simétrica) es trivial, y lo dejamos como ejercicio. Para ver que $(V/\mathrm{Rad}(g), \widetilde{g})$ es no degenerado, tomemos un vector $v + \mathrm{Rad}(g)$ que sea $\widetilde{g}$-ortogonal a todos los $w + \mathrm{Rad}(g) \in V/\mathrm{Rad}(g)$. Entonces $g(v,w) = 0\ \forall w \in V$ luego $v \in \mathrm{Rad}(g)$ y por tanto $v + \mathrm{Rad}(g) = 0 + \mathrm{Rad}(g)$, que es el neutro de la suma en $V/\mathrm{Rad}(g)$. Esto prueba el apartado 1.

En cuanto al apartado 2, notemos que si $U \leq V$ cumple que g_U es definida negativa, entonces $U \cap \mathrm{Rad}(g) = \{0\}$, luego $\pi(U)$ es un subespacio vectorial de $V/\mathrm{Rad}(g)$ isomorfo (vía $\pi|_U$) a U. Como $\widetilde{g}$ restringida a $\pi(U)$ es definida negativa, concluimos que

$$\mathrm{Indice}(V/\mathrm{Rad}(g), \widetilde{g}) \geq \dim \pi(U) = \dim U.$$

Variando el subespacio U obtenemos que $\mathrm{Indice}(V/\mathrm{Rad}(g), \widetilde{g}) \geq \mathrm{Indice}(V,g)$.

Recíprocamente, si $\widetilde{U} \leq V/\mathrm{Rad}(g)$ es un subespacio que cumple que $\widetilde{g}_{\widetilde{U}}$ es definida negativa, entonces $\pi^{-1}(\widetilde{U})$ es un subespacio de V donde la restricción de g es semidefinida negativa, pero no necesariamente definida negativa porque $\mathrm{Rad}(g) \subset \pi^{-1}(\widetilde{U})$. Tomemos un subespacio vectorial W de $\pi^{-1}(\widetilde{U})$ tal que $\pi^{-1}(\widetilde{U}) = W \oplus \mathrm{Rad}(g)$. Como $\pi(W) \subset \pi\left(\pi^{-1}(\widetilde{U})\right) \subset \widetilde{U}$, podemos considerar la restricción

$$\pi|_W \colon W \to \widetilde{U}.$$

Veamos que $\pi|_W$ es un isomorfismo de espacios vectoriales de W en $\widetilde{U}$. Dado $w \in \ker(\pi|_W)$, $w + \mathrm{Rad}(g) = \pi(w) = 0 + \mathrm{Rad}(g)$ luego $w \in \mathrm{Rad}(g)$ y por tanto, $w \in W \cap \mathrm{Rad}(g) = \{0\}$, luego $w = 0$. Esto nos dice que $\pi|_W$ es inyectiva. En cuanto a la sobreyectividad, tomemos $u + \mathrm{Rad}(g) \in \widetilde{U}$ y veamos que existe $w \in W$ tal que $\pi(w) = u + \mathrm{Rad}(g)$. Como $u \in \pi^{-1}(\widetilde{U}) = W \oplus \mathrm{Rad}(g)$, existen $w \in W$, $z \in \mathrm{Rad}(g)$ tales que $u = w + z$. Por tanto, $u + \mathrm{Rad}(g) = \pi(u) = \pi(w) + \pi(z) = \pi(w)$ luego $\pi|_W$ es sobreyectiva. De aquí deducimos que $\pi|_W \colon W \to \widetilde{U}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Finalmente, Como W es isomorfo a $\widetilde{U}$ (vía $\pi|_W$), si viéramos que g_W es definida negativa tendríamos que

$$\mathrm{Indice}(V,g) \geq \dim W = \dim \widetilde{U},$$

y variando el subespacio $\widetilde{U}$ obtenemos que $\mathrm{Indice}(V,g) \geq \mathrm{Indice}(V/\mathrm{Rad}(g), \widetilde{g})$, lo que probaría el apartado 2. Queda entonces ver que g_W es definida negativa. g_W es semidefinida negativa, ya que la restricción de g a $\pi^{-1}(\widetilde{U})$ lo es. Y si $w \in W$ cumple $g(w,w) = 0$, entonces $\widetilde{g}(w+\text{Rad}(g), w+\text{Rad}(g)) = g(w,w) = 0$. Como $w+\text{Rad}(g) \in \pi(W) \subset \widetilde{U}$ y $\widetilde{g}_{\widetilde{U}}$ es definida negativa, deducimos que $w+\text{Rad}(g) = 0+\text{Rad}(g)$, es decir, $w \in \text{Rad}(g)$. Por tanto, $w \in W \cap \text{Rad}(g) = \{0\}$, luego $w = 0$ y concluimos que g_W es definida negativa. $\square$

Seguimos usando la notación anterior, y supondremos que $\dim V$ es finita.

Teorema 2.9.1 *En la situación anterior, se tienen:*

1. *La dimensión de* $\text{Rad}(g)$ *es* $\dim V - \text{rango}(M_B(g))$*, siendo B cualquier base ordenada de V.*
2. *Dado $U \subset V$ subespacio, $(U^{\perp})^{\perp} = U + \text{Rad}(g)$.*
3. *Sea $U \subset V$ un subespacio suplementario de* $\text{Rad}(g)$*, es decir $V = U \oplus \text{Rad}(g)$. Entonces:*
   - $\pi|_U \colon U \to V/\text{Rad}(g)$ *es un isomorfismo de espacios vectoriales y $g(u,v) = \widetilde{g}(\pi(u),\pi(v))$, $\forall u, v \in U$.*
   - *g_U es no degenerada.*
   - $\text{Indice}(V,g) = \text{Indice}(V/\text{Rad}(g), \widetilde{g}) = \text{Indice}(U, g_U)$ *(en particular,* $\text{Indice}(U, g_U)$ *no depende de U).*

Demostración. Para el apartado 1 usaremos parte de la idea de la demostración de la Proposición 2.1.1: Usando la fórmula (1.3) tenemos que dado $v \in V$,

$$g(v,w) = 0 \ \forall w \in V \ \Leftrightarrow \ (v_B)^t \cdot M_B(g) \cdot w_B = 0 \ \forall w_B \in \mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow \ (v_B)^t \cdot M_B(g) = 0.$$

Luego $v \in \text{Rad}(g)$ si y sólo si $M_B(g)v_B = 0$, es decir, las coordenadas de v en B son solución del sistema homogéneo $M_B(g)v_B = 0$. Como el conjunto de soluciones de dicho sistema de ecuaciones es un espacio vectorial de dimensión $\dim V - \text{rango}(M_B(g))$, se tiene lo que se buscaba.

En cuanto a apartado 2, primero notemos que $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$ sin más que aplicar la definición de ortogonal. También es claro que $\text{Rad}(g) \subset (U^{\perp})^{\perp}$ (de hecho, $\text{Rad}(g)$ está contenido en la intersección de los ortogonales de todos los subconjuntos de V). Por tanto, $U + \text{Rad}(g) \subset (U^{\perp})^{\perp}$. Para el recíproco usaremos el Lema 2.9.2 y la aplicación lineal sobreyectiva $\pi \colon V \to V/\text{Rad}(g)$ dada por $\pi(v) = v + \text{Rad}(g)$. Como π es lineal y U es un subespacio de V, $\pi(U)$ será un subespacio vectorial de $V/\text{Rad}(g)$. Como $(V/\text{Rad}(g), \widetilde{g})$ es no degenerado, el apartado 2 de Teorema 2.8.1 nos dice que $(\pi(U)^{\perp})^{\perp} = \pi(U)$.

Finalmente, veamos que $(U^{\perp})^{\perp} \subset U + \text{Rad}(g)$ y habremos terminado de probar el apartado 2: sea $x \in (U^{\perp})^{\perp}$. Comprobemos primero que $x + \text{Rad}(g) \in (\pi(U)^{\perp})^{\perp}$; para esto, tomemos $u + \text{Rad}(g) \in \pi(U)^{\perp}$ y comprobemos que $\widetilde{g}(x+\text{Rad}(g), u+\text{Rad}(g)) = 0$. Como $u+\text{Rad}(g) \in \pi(U)^{\perp}$, se tiene que para cada $w \in U$, $g(u,w) = \widetilde{g}(u+\text{Rad}(g), w+\text{Rad}(g)) =$

$\widetilde{g}(u+\text{Rad}(g), \pi(w)) = 0$. Por tanto, $u \in U^{\perp}$. Como $x \in (U^{\perp})^{\perp}$, deducimos que $g(x, u) = 0$ y por tanto $\widetilde{g}(x+\text{Rad}(g), u+\text{Rad}(g)) = 0$. Esto prueba que $x+\text{Rad}(g) \in (\pi(U)^{\perp})^{\perp} = \pi(U)$, luego existe $y \in U$ tal que $x + \text{Rad}(g) = y + \text{Rad}(g)$. Por tanto, $x - y \in \text{Rad}(g)$ luego $x \in U + \text{Rad}(g)$ y hemos probado el apartado 2.

Finalmente probaremos el apartado 3. Sea $U \leq V$ tal que $V = U \oplus \text{Rad}(g)$. Que $\pi|_U$ es un isomorfismo se deduce de que $\ker(\pi|_U) = U \cap \ker(\pi) = U \cap \text{Rad}(g) = \{0\}$, y $V/\text{Rad}(g) = \pi(V) = \pi(U + \text{Rad}(g)) = \pi(U)$. Para ver que g_U es no degenerada, supongamos que $u \in U$ es ortogonal a todos los vectores de U y veamos que $u = 0$. Notemos primero que $u \in \text{Rad}(g)$: dado $x \in V = \text{Rad}(g) + U$, existen $v \in \text{Rad}(g)$, $w \in U$ tales que $x = v + w$. Así, $g(u, x) = g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w)$. Pero $g(u, v) = 0$ porque $v \in \text{Rad}(g)$, y $g(u, w) = 0$ porque u es ortogonal a todos los vectores de U. Como x es arbitrario en V, deducimos que $u \in \text{Rad}(g)$ y por tanto $u \in \text{Rad}(g) \cap U = \{0\}$, luego $u = 0$ y g_U es no degenerada.

El último punto del apartado 3 del teorema es consecuencia directa del apartado 2 del Lema 2.9.2 y del hecho de que el isomorfismo $\pi|_U : U \to V/\text{Rad}(g)$ conserva índices (ya que conseva las métricas g_U en U y $\widetilde{g}$ en $V/\text{Rad}(g)$). □

Como consecuencia del último teorema y del apartado 1 del Teorema 2.8.2 tenemos:

Teorema 2.9.2 *(Sylvester) Sea (V, g) un EVM con* $\dim V = n \in \mathbb{N}$. *Entonces, existen $s, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que sólo dependen de g y existe una base ordenada B de V tal que (por cajas)*

$$M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c|c} -I_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{2.6}$$

A s se le llama el índice *de (V, g); a $s + k$ se le llama el* rango *de (V, g); y a $n - (s + k)$ la* nulidad *de (V, g) (por tanto, la nulidad de (V, g) coincide con* $\dim \text{Rad}(g)$*). La* signatura *de (V, g) es el número de ceros, 1 y -1 de la matriz $M_B(g)$ (esto no depende de B, sino sólo de g).*

Con el teorema de Sylvester a mano, podemos clasificar fácilmente las métricas en dimensión finita.

Corolario 2.9.1 *Sea (V, g) un EVM con* $\dim V = n \in \mathbb{N}$, *índice s y rango r. Entonces:*

1. *(V, g) es euclídeo si y sólo si $s = 0$ y $r = n$.*
2. *(V, g) es definido negativo si y sólo si $s = n$.*
3. *(V, g) es semidefinido positivo si y sólo si $s = 0$ y $r < n$.*

4. (V, g) *es semidefinido negativo si y sólo si* $r = s$ *y* $s < n$.

5. (V, g) *es no degenerado indefinido si y sólo si* $0 < s < r = n$.

6. (V, g) *es degenerado indefinido si y sólo si* $0 < s < r < n$.

Corolario 2.9.2

1. *Dada* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, *existen* $s, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *que sólo dependen de* A *(con* $s + k = \mathrm{rango}(A)$*) y existe* $P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ *tales que*

$$P^t \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c|c} -I_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

2. *Si* $V(\mathbb{R})$ *es un espacio vectorial real y* F *es una forma cuadrática sobre* V, *entonces existen* $s, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *que sólo dependen de* F *y existe una base* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *de* V *tales que*

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{s} a_i^2 + \sum_{i=s+1}^{s+k} a_i^2 \quad \textit{para todo } v \in V,$$

donde $x_B = (a_1, \ldots, a_n)$ *son las coordenadas de* x *respecto a* B.

Demostración. Ejercicio. □

Finalmente, conviene comentar un criterio útil para caracteriza cuándo una matriz simétrica (o una métrica) es definida positiva o definida negativa: véase el Ejercicio 20.

2.10. Isomorfismos métricos entre V y V^*: $\#$ y $\flat$

Dado un EVM no degenerado (V, g) de dimensión finita, se puede establecer un isomorfismo entre V y su dual V^*, que no depende de bases sino sólo de g. esto permite identificar de forma natural vectores de V con formas lineales sobre V.

Teorema 2.10.1 *Sea* (V, g) *un espacio vectorial dotado de una métrica no degenerada.*

1. *Para cada* $v \in V$ *la aplicación* $v^\flat \equiv g(v, \cdot) \colon V \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$v^\flat(w) = g(v, w) \qquad \forall w \in V$$

es lineal, esto es, $v^\flat \in V^*$.

2. *La aplicación "bemol" ("bajar índices")*

$$\flat\colon V \to V^*, \qquad v \mapsto v^\flat$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales, cuya inversa es la aplicación "sostenido" ("subir indices"), $\sharp\colon V^* \to V$.

3. *La aplicación $g^*\colon V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ mediante $g^*(\varphi, \psi) = g(\varphi^\sharp, \psi^\sharp)$ es una métrica no degenerada sobre V^*.*

4. *Sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base ordenada de V, y $B^* = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ su base ordenada dual. Entonces,*

$$M_B(g) = M(\flat, B, B^*), \tag{2.7}$$

$M_{B^*}(g^*) = M_B(g)^{-1}$ y $M_{B^*}(g^*) = M(\sharp, B^*, B)$.

5. *Si cambiamos la hipótesis 'g es no degenerada' por 'g es euclídea', entonces g^* pasa a ser euclídea.*

6. *Si g es euclídea y B es una base ordenada ortonormal de (V, g), entonces B^* es base ordenada ortonormal para (V^*, g^*).*

Demostración. Los apartados 1,2 son triviales. El apartado 3 es consecuencia del Ejercicio 40.

En cuanto al apartado 4, escribimos $v_j^\flat = \sum_i a_{ij}\varphi^i$, se tiene $M(\flat, B, B^*)_{kj} = a_{kj} = v_j^\flat(v_k) = g(v_j, v_k) = g(v_k, v_j) = (M_B(g))_{kj}$ para todo $k, j \in \{1, \ldots, n\}$, lo que prueba (2.7).

Ahora escribimos $(\varphi_j)^\sharp = \sum_i b_{ij} v_i$. Tomando $\flat$ en esta ecuación obtenemos $\varphi_j = \sum_i b_{ij} v_i^\flat$, luego

$$\delta_{kj} = \varphi^j(v_k) = \sum_i b_{ij} v_i^\flat(v_k) = \sum_i b_{ij} g(v_i, v_k) = \sum_i g(v_k, v_i) b_{ij} = [M_B(g) \cdot M(\sharp, B^*, B)]_{kj},$$

de donde se deduce que

$$M(\sharp, B^*, B) = M_B(g)^{-1}. \tag{2.8}$$

En particular, $M(\sharp, B^*, B)$ es una matriz simétrica.

Ya podemos comprobar que $M_{B^*}(g^*) = M(\sharp, B^*, B)$ (lo cual prueba el apartado 4):

$$[M_{B^*}(g^*)]_{ij} = g^*(\varphi^i, \varphi^j) = g((\varphi^i)^\sharp, (\varphi^j)^\sharp) = g\left(\sum_k b_{ki} v_k, \sum_h b_{hj} v_h\right) = \sum_{k,h} b_{ki} b_{hj} g(v_k, v_h)$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{k,h} b_{jh} g(v_h, v_k) b_{ki} = [M(\sharp, B^*, B) \cdot (M_B(g) \cdot M(\sharp, B^*, B))]_{ji} = M(\sharp, B^*, B)_{ji},$$

donde en $(*)$ se ha usado la simetría de la matriz $M(\sharp, B^*, B)$ y la última igualdad usa (2.8). Por tanto, $M_{B^*}(g^*) = M(\sharp, B^*, B)$.

Finalmente, los apartados 5,6 son evidentes. $\square$

Una caracterización alternativa del sostenido es la siguiente.

Proposición 2.10.1 *Sea (V^n, g) EVM no degenerado y $\phi \in V^*$. Entonces $\phi^\sharp$ es el único vector que verifica*

$$g(\phi^\sharp, v) = \phi(v), \qquad \forall v \in V.$$

Demostración. Aplicando las definiciones, $g(\phi^\sharp, v) = (\phi^\sharp)^\flat(v) = \phi(v)$. Además, si otro vector $u_\phi \in V$ verificara esa relación se tendría:

$$g(\phi^\sharp - u_\phi, v) = \phi(v) - \phi(v) = 0, \qquad \forall v \in V,$$

y, al ser g no degenerada, $\phi^\sharp - u_\phi = 0$. $\square$

Nota 2.10.1 Los nombres "subir y bajar" índices provienen de la Relatividad General. En Mecánica Cuántica, Dirac introdujo una nomenclatura distinta. Considerando un espacio vectorial euclídeo (y, con más generalidad, un espacio de Hilbert) con producto escalar $\langle\cdot|\cdot\rangle$: los vectores v, w se denotan cada uno como un "ket" $v = |v>$, $w = |w>$ y sus bemoles como un "bra" $v^\flat =< v|, w^\flat =< w|$ de modo que $v^\flat(w)$ es el "braket" $< v|w >$.

2.11. Endomorfismos adjuntos y autoadjuntos

2.11.1. Endomorfismo adjunto de un endomorfismo

Proposición 2.11.1 *Sea (V^n, g) un EVM no degenerado, y $f \in \mathrm{End}(V)$. Entonces,*

1. *Existe un único endomorfismo $\widehat{f} \in \mathrm{End}(V)$ que verifica:*

   (2.9) $$g(\widehat{f}(v), w) = g(v, f(w)), \ \forall v, w \in V,$$

   al cual llamaremos endomorfismo adjunto de f respecto a g.

2. *Para cualquier base ordenada B de V, se tiene*

   (2.10) $$M(\widehat{f}, B) = M_B(g)^{-1} \cdot M(f, B)^t \cdot M_B(g).$$

   En particular, si g es euclídea y B_{ort} una base ortonormal de (V, g), entonces $M(\widehat{f}, B_{\mathrm{ort}}) = M(f, B_{\mathrm{ort}})^t$.

Demostración. Para la existencia del apartado 1, consideramos los isomorfismos musicales $\sharp, \flat$ definidos en la sección anterior. Definimos $\widehat{f} = \sharp \circ f^t \circ \flat \in \mathrm{End}(V)$. Entonces,

$$g(\widehat{f}(v), w) = g((f^t(v^\flat))^\sharp, w) = [f^t(v^\flat)](w) = (v^\flat \circ f)(w) = v^\flat(f(w)) = g(v, f(w)).$$

La unicidad se sigue de la no degeneración de g, ya que si $\widetilde{f}$ verificara la misma relación (2.9) que $\widehat{f}$, entonces $g(\widetilde{f}(v) - \widehat{f}(v), w) = g(v, f(w)) - g(v, f(w)) = 0$, $\forall v, w \in V$, de donde $\widetilde{f}(v) - \widehat{f}(v) = 0$ para todo $v \in V$.

En cuanto al apartado 2, de (2.9) se tiene que si escribimos coordenadas respecto de B por columnas, entonces

$$(v_B)^t \cdot M(\widehat{f}, B)^t \cdot M_B(g) \cdot w_B = (M(\widehat{f}, B) \cdot v_B)^t \cdot M_B(g) \cdot w_B = (\widehat{f}(v))_B^t \cdot M_B(g) \cdot w_B = g(\widehat{f}(v), w)$$

$$= g(v, f(w)) = (v_B)^t \cdot M_B(g) \cdot (f(w))_B = (v_B)^t \cdot M_B(g) \cdot M(f, B) \cdot w_B,$$

luego $M(\widehat{f}, B)^t \cdot M_B(g) = M_B(g) \cdot M(f, B)$. Trasponiendo y multiplicando después por $M_B(g)^{-1}$ por la izquierda deducimos (2.10). □

2.11.2. Endomorfismos autoadjuntos

Definición 2.11.1 Sea (V^n, g) un EVM no degenerado. Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ es *autoadjunto* respecto de g si coincide con su adjunto, esto es, $f = \widehat{f}$.

De la Proposición 2.11.1 se tiene directamente el siguiente resultado:

Corolario 2.11.1 *Sea (V^n, g) un EVME. Un endomorfimo $f \in \mathrm{End}(V)$ es autoadjunto respecto a g si y sólo si $M(f, B_{\mathrm{ort}})$ es simétrica para una (equivalentemente, para toda) base ordenada ortonormal B_{ort} de (V, g).*

Cuestión: Si g es un producto escalar lorentziano, ¿qué propiedad debe verificar $M(f, B_{\mathrm{ort}})$ para que f sea autoadjunto?

Proposición 2.11.2
Sea (V^n, g) un EVM no degenerado y $f \in \mathrm{End}(V)$ autoadjunto respecto a g. Entonces:

1. *Si $U \leq V$ cumple $f(U) \subseteq U$, entonces $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$.*

2. *Si $a \neq b \in \mathbb{R}$ son valores propios distintos de f, entonces $V_a \perp V_b$.*

3. *Si f es diagonalizable, entonces cada subespacio propio de f es no degenerado y existe una base ortonormal de (V, g) formada por vectores propios de f.*

Demostración. Si $v \in U^{\perp}$ e $w \in U$, entonces $g(f(v), w) = g(v, f(w)) = 0$ por ser $f(w) \in U$; esto prueba 1. Para el apartado, tomemos $v \in V_a$ y $w \in V_b$. Entonces, $a\, g(v, w) = g(av, w) = g(f(v), w) = g(v, f(w)) = g(v, bw) = b\, g(v, w)$. Como $a \neq b$, deducimos que $g(v, w) = 0$.

Finalmente el apartado 3: Por ser f diagonalizable, $V = V_{a_1} \oplus \ldots \oplus V_{a_m}$ siendo los V_{a_i} los subespacios propios de f. Estos subespacios son ortogonales dos a dos por el apartado anterior. Por tanto, si $v \in V_{a_i}$ perteneciera al radical de la métrica restringida $g|_{V_{a_i}}$, v sería también ortogonal a todos los otros subespacios propios de f, y por tanto, a todo V. Esto es, $v \in \mathrm{Rad}(g) = \{0\}$. Esto prueba que $(V_{a_i}, g|_{V_{a_i}})$ es no degenerado. Tomando una base ortonormal B_i de cada subespacio propio $(V_{a_i}, g|_{V_{a_i}})$, la unión $\cup_{i=1}^{m} B_i$ proporciona la base ortonormal de (V, g) requerida. □

2.11.3. Diagonalización en el caso euclídeo

Lema 2.11.1 *Toda matriz $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tiene (al menos) un valor propio real.*

Demostración. Sea $p_A(t) = \det(A - tI_n) \in \mathbb{R}[t]$ el polinomio característico de A. El Teorema Fundamental del Algebra asegura que $\exists a \in \mathbb{C}$ tal que $p_A(a) = 0$. Se trata de comprobar que $a \in \mathbb{R}$ (en particular, A tendrá un vector propio REAL asociado a a).

Como a es autovalor complejo de A, $\exists z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tal que $Az = az$, y

$$\overline{z}^T A z = \overline{z}^T a z = a \overline{z}^T z = a \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2. \tag{2.11}$$

Además,

$$\overline{z}^T A z = \sum_{i=1}^{n} (\overline{z}^t)_i (Az)_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{z}_i a_{ij} z_j \in \mathbb{C}. \tag{2.12}$$

Por tanto,

$$\overline{\overline{z}^T A z} = \sum_{i,j=1}^{n} z_i a_{ij} \overline{z_j}. \tag{2.13}$$

Como A es simétrica, (2.12) y (2.13) coinciden luego $\overline{z}^T A z \in \mathbb{R}$. Como $\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \in \mathbb{R} - \{0\}$, de (2.11) se deduce que $a \in \mathbb{R}$. □

Nota 2.11.1 El lema es cierto en el caso más general de que A sea una matriz *hermítica* esto es, una matriz cuadrada compleja tal que $A = \overline{A}^t$ (con la misma demostración, salvo cambiar a_{ij} por $\overline{a_{ij}}$ en (2.13)).

Nuestro objetivo a continuación será demostrar que todo endomorfismo f que sea autoadjunto para un *producto escalar euclídeo* es diagonalizable (por lo que la Proposición 2.11.2(3) asegura que f admite una base ortonormal de vectores propios).

Del Lema 3.8.2 se deduce:

Lema 2.11.2 *Sea (V^n, g) un EVME. Todo endomorfismo $f \in \text{End}(V)$ que sea autoadjunto respecto de g admite un valor propio (real).*

Demostración. Los valores propios f coinciden con los de $M(f, B)$ para cualquier base B de V. Escogiendo B como una base ortonormal de (V, g), la matriz $M(f, B)$ es simétrica, luego el Lema 3.8.2 asegura que $M(f, B)$ tiene al menos un valor propio. $\square$

Teorema 2.11.1 *Sea (E, g) EVME y $f \in \text{End}(V)$ autoadjunto respecto de g. Entonces, existe B base ortonormal de (V, g) tal que $M(f, B)$ es diagonal.*

Demostración. (Por inducción sobre $n = \dim V$). Si $n = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que el teorema es cierto para $n - 1$. Sea $V(\mathbb{R})$ con $\dim V = n$ y $f \in \text{End}(V)$ autoadjunto respecto de g. Por el Lema 2.11.2 existen $a \in \mathbb{R}$ y $x_1 \in V - \{0\}$ tales que $f(x_1) = ax_1$. Normalizando, pordemos suponer que $g(x_1, x_1) = 1$. Sea $U = L(\{x_1\})$. Como $f(U) \subseteq U$, el apartado 1 de la Proposición 2.11.2 implica que $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$, luego $f|_{U^\perp}$ es un endomorfismo autoadjunto del EVME $(U^\perp, g|_{U^\perp \times U^\perp})$. Como $\dim U^\perp = n - 1$, por hipótesis de inducción existe una base ortonormal $B_1 = (x_2, \ldots, x_n)$ de $(U^\perp, g|_{U^\perp \times U^\perp})$ tal que $M(f|_{U^\perp}, B_1)$ es diagonal. Tomando $B = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ obtenemos una base ortonormal de (V, g) y $M(f, B)$ es diagonal. $\square$

Definición 2.11.2 Dos matrices $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dicen *congruentes* (resp. *ortogonalmente congruentes*) si $\exists P \in Gl(n, \mathbb{R})$ (resp. $P \in O(n)$) tal que $P^t \cdot A \cdot P = C$.

"Ser congruente a" es una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que no coincide con "ser semejante a". Sin embargo, si $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son ortogonalmente congruentes, entonces también son semejantes. El recíproco no tiene porqué ser cierto.

Corolario 2.11.2

1. *Toda matriz simétrica real es ortogonalmente diagonalizable: si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, entonces $\exists P \in O(n)$ tal que $P^t \cdot A \cdot P$ es diagonal*[1].

2. *Si (V, g) es un EVME de dinensión finita y $g' \in S_2(V)$, entonces $\exists B$ base ortonormal de (V, g) tal que $M_B(g')$ es diagonal.*

[1] Como $P \in O(n)$, esta diagonalización de A es por semejanza y por congruencia simultáneamente.

3. *Si* (V, g) *es un EVME de dimensión finita y* F *es una forma cuadrática sobre* V*, entonces* $\exists B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *base ortonormal de* (V, g) *y* $\exists r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i^2 \quad \textit{para todo } v \in V,$$

donde $x_B = (a_1, \ldots, a_n)$ *son las coordenadas de* x *respecto a* B*.*

4. *Si* V *es un espacio vectorial real de dimensión finita y* $g' \in S_2(V)$*, entonces* $\exists B$ *base de* (V, g) *tal que* $M_B(g')$ *es diagonal.*

5. *Si* F *es una forma cuadrática sobre un espacio vectorial real de dimensión finita* V*, entonces* $\exists B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *base de* V *y* $\exists r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i^2 \quad \textit{para todo } v \in V,$$

donde $x_B = (a_1, \ldots, a_n)$ *son las coordenadas de* x *respecto a* B*.*

6. *Toda matriz simétrica real es congruente a una matriz diagonal* D *cuya diagonal principal está formada por los dígitos* $1, -1, 0$.

Demostración. Para el apartado 1, sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Sea (V, g) un EVME con $\dim V = n$ y B una base ortonormal de (V, g). Consideremos el endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ definido por $M(f, B) = A$. Como A es simétrica y B es g-ortonormal, f es g-autoadjunto. Por el Teorema 2.11.1, existe una base ortonormal B' de (V, g) tal que $M(f, B')$ es diagonal. Esto nos dice que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ es diagonal, donde $P = M(1_V, B', B)$. Como B, B' son bases g-ortonormales, deducimos que $P \in O(n)$ luego $P^{-1} = P^t$ y hemos terminado de probar el apartado 1.

Para el apartado 2, tomemos una base ordenada ortonormal B_1 de (V, g). Como g' es una métrica en V, $A := M_{B_1}(g')$ es una matriz simétrica de orden n. Por el apartado 1, $\exists P \in O(n)$ tal que $P^t \cdot A \cdot P$ es diagonal. Aplicando el Teorema 1.4.2 deducimos que $M_B(g')$ es diagonal, donde B es la base ordenada de V determinada por la ecuación $P = M(1_V, B, B_1)$.

El apartado 3 es consecuencia directa del 2 y se deja como ejercicio. 4 y 5 se obtienen aplicando 2 y 3 tras haber elegido una métrica euclídea auxiliar sobre V.

El apartado es consecuencia del Teorema de Sylvester y de la relación entre matrices simétricas y matrices de métricas. □

2.12. Isometrías

Definición 2.12.1 Una aplicación $f\colon (V,g) \to (V',g')$ entre EVM se llama *isometría* si es lineal, biyectiva y

$$g'(f(x),f(y)) = g(x,y) \quad \forall x,y \in V. \tag{2.14}$$

Es decir, una isometría es un isomorfismo entre EVM que conserva las métricas.

Ejemplo 2.12.1

1. La aplicación $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ tal que

$$f((a_{ij})_{i,j}) = (a_{11},\dots,a_{1n},a_{21},\dots,a_{nn})$$

es una isometría de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),g)$ siendo g la métrica definida en (2.2), y $(\mathbb{R}^{n^2},g_0)$, siendo g_0 el producto escalar usual.

2. Si (V^n,g) es un EVM no degenerado y g^* es la métrica en V^* dada por el apartado 3 del Teorema 2.10.1, entonces $\flat\colon (V,g) \to (V^*,g^*)$, $\sharp\colon (V^*,g^*) \to (V,g)$ son isometrías.

Como los dos miembros de (2.14) son bilineales (supuesto que f es lineal), que se dé (2.14) equivale a que se cumpla sólo para los vectores de una base de V.

Definición 2.12.2 Dos EVM (V,g), (V',g') se dicen *isométricos* si $\exists f\colon (V,g) \to (V',g')$ isometría. La composición de dos isometrías entre EVM es una isometría (ejercicio 45) y 'ser isométrico a' es una relación de equivalencia en el conjunto de los EVM.

Corolario 2.12.1 *Sean (V,g), (V',g') dos EVM. Entonces, son equivalentes:*

1. (V,g), (V',g') *son isométricos.*
2. $\dim V = \dim V'$, $\text{Indice}(V,g) = \text{Indice}(V'g')$ *y* $\text{Rango}(V,g) = \text{Rango}(V',g')$.
3. $\dim V = \dim V'$, $\text{Indice}(V,g) = \text{Indice}(V'g')$ *y* $\text{Nulidad}(V,g) = \text{Nulidad}(V',g')$.
4. (V,g), (V',g') *tienen la misma signatura.*

Demostración. La relación entre la dimensión, la nulidad y el rango y la signatura nos dice que basta probar que 1 y 2 son equivalentes.

Si 1 se da, existe $f\colon (V,g) \to (V',g')$ isometría. Aplicando el Teorema de Sylvester a (V,g), existen $s,r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que sólo dependen de g y existe una base ordenada B de V tal que $M_B(g)$ se escribe como en (2.6). Como f es isomorfismo de espacios vectoriales, $f(B)$ será una base de V'. Por ser f isometría, tenemos $M_{f(B)}(g') = M_B(g)$, luego (V',g') tiene la misma dimensión, índice y rango que (V,g), y 2 está probado.

Recíprocamente, supongamos que 2 se da. Aplicando a (V,g), (V',g') el Teorema de Sylvester, existirán $s,r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ (los mismos para g,g') y bases ordenadas B de V y B' de V' tales que $M_B(g)$ y $M_{B'}(g')$ se escriben simultáneamente como en (2.6). Consideremos la única aplicación lineal $f\colon V \to V'$ que lleva cada vector de B en el correspondiente vector de B', sin alterar el orden de los vectores en las bases. Entonces, $M_B(g) = M_{B'}(g') = M_{f(B)}(g')$ luego f es una isometría de (V,g) en (V',g') y se tiene 1. □

Definición 2.12.3

1. Sea (V,g) un EVM. El conjunto
$$\mathrm{Iso}(V,g) = \{f\colon (V,g) \to (V,g) \mid f \text{ isometría de } (V,g) \text{ en sí mismo}\}$$
es un grupo con la composición, llamado el *grupo de isometrías de* (V,g).

2. Dados $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ con $s \leq n$, definimos
$$O(n,s) = \left\{ A \in Gl(n,\mathbb{R}) \mid A^t \left(\begin{array}{c|c} -I_s & 0 \\ \hline 0 & I_{n-s} \end{array}\right) A = \left(\begin{array}{c|c} -I_s & 0 \\ \hline 0 & I_{n-s} \end{array}\right) \right\}.$$
Es fácil ver que $O(n,s)$ es un grupo para el producto de matrices, que generaliza al grupo ortogonal clásico $O(n) = O(n,0)$.

Proposición 2.12.1 *Sea (V^n,g) un EVM no degenerado con signatura $(s,n-s)$ (s es el índice y $n-s$ el número de 1 en la forma canónica del Teorema de Sylvester para (V,g)), y sea B una base ordenada ortonormal de V. Entonces:*

1. *Dada $A \in Gl(n,\mathbb{R})$, sea $f\colon V \to V$ el único automorfismo de V tal que $M(f,B) = A$. Entonces, f es una isometría de (V,g) en sí mismo si y sólo si $A \in O(n,s)$.*

2. *La aplicación $F_B\colon \mathrm{Iso}(V,g) \to O(n,s)$ dada por $F_B(f) = M(f,B)$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Si f es una isometría, se tiene $M_B(g) = M_{f(B)}(g) = P^T \cdot M_B(g) \cdot P$ donde $P = M(1_V, f(B), B)$. Notemos que $M(1_V, f(B), B) = M(f,B) = A$, luego $P = A$. Finalmente, $M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c} -I_s & 0 \\ \hline 0 & I_{n-s} \end{array}\right)$ porque B es ortonormal, luego $A \in O(n,s)$. El recíproco de 1 y el apartado 2 se dejan como ejercicio. □

Proposición 2.12.2 *Sea (V^n,g) un EVM y $f \in \mathrm{Iso}(V,g)$. Entonces:*

1. *Si (V,g) es no degenerado, el endomorfismo adjunto $\widetilde{f}$ de f respecto a g es $\widehat{f} = f^{-1}$.*

2. *Si* (V, g) *es no degenerado,* $\det f = \pm 1$*. Una isometría* $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$ *se dice rotación*[2] *si* $\det f = 1$*, y reflexión si* $\det f = -1$*.*

3. *Si* $U \leq V$ *cumple* $f(U) \subseteq U$*, entonces* $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$*.*

4. *Si* g *es euclídea y* $a \in \mathbb{R}$ *es un valor propio de* f*, entonces* $a = \pm 1$*. Y Si* 1 *y* -1 *son valores propios, los subespacios propios* V_1 *y* V_{-1} *son ortogonales.*

Demostración. (1) Teniendo en cuenta que $f^{-1} \in \mathrm{Iso}(V, g)$, dados $u, v \in V$ tenemos $g(u, f(v)) = g(f^{-1}(u), f^{-1}(f(v))) = g(f^{-1}(u), v)$ luego $\widehat{f} = f^{-1}$ y tenemos probado el apartado 1.

Para el apartado 2, tomemos una base ordenada ortonormal B de (V, g). Por la Proposición 2.12.1, $A := M(f, B) \in O(n, s)$. Tomando determinantes en la ecuación que cumplen las matrices de $O(n, s)$ se tiene que $(\det A)^2 = 1$, luego $\det f = \det A = \pm 1$.

Para el apartado 3, sean $u \in U^\perp$, $v \in U$. $g(f(u), v) = g(u, f^{-1}(v))$, luego para que esto sea cero basta probar que $f^{-1}(U) \subseteq U$. Pero $f(U) \subseteq U$ implica $f(U) = U$, luego $U = f^{-1}(U)$ por ser f biyectiva. Por tanto, U también es invariante por f^{-1}.

Finalmente, si $u \in V \setminus \{0\}$ verifica $f(u) = au$ entonces $g(u, u) = g(f(u), f(u)) = g(au, au) = a^2 g(u, u)$, luego $g(u, u) = 0$ o bien $a^2 = 1$. Si g es euclídea, tenemos $g(u, u) > 0$ luego $a = \pm 1$. Finalmente, si $f(v) = v, f(w) = -w$, entonces $g(v, w) = g(f(v), f(w)) = g(v, -w) = -g(v, w)$ luego $v \perp w$. $\square$

2.13. Clasificación de las isometrías de un EVME.

En esta sección, (V, g) es un EVME con $\dim V = n$.

Definición 2.13.1 Llamaremos $SO(n) \equiv O^+(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$, que es un subgrupo normal de $O(n)$ cuyas matrices se llaman de *rotaciones.*

Lema 2.13.1 *Sea* $A \in O(2)$*. Entonces, existe un único* $\theta \in [0, 2\pi)$ *tal que:*

1. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *si* $\det A = 1$*.*

2. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ *si* $\det A = -1$*.*

[2] Esto de rotaciones viene de las dimensiones 2 y 3: veremos en el Lema 2.13.1 y en la Nota 2.13.1 que toda matriz $A \in O(2)$ con $\det A = 1$ es la matriz de un giro de cierto ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$, y en el Teorema 2.13.2 que toda $A \in O(3)$ con $\det A = 1$ es la matriz de un giro de cierto ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ alrededor de una recta que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$. Esta noción de rotación se extiende de forma abstracta a cualquier isometría $f \in \mathrm{Iso}(V^n, g)$ con $\det f = 1$.

Demostración. Llamemos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Como $\det A = \pm 1$, tenemos $ad - bc = \pm 1$. De la ecuación matricial $A \cdot A^T = I_2$ obtenemos otras tres ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = 1, \quad c^2 + d^2 = 1, \quad ac + bd = 0.$$

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ los vectores dados por $u = (a, b)$, $v = (c, d)$, $w = (d, -c)$. Respecto del producto escalar usual g_0, las ecuaciones anteriores implican que

$$g_0(u, w) = \pm 1, \quad \|u\| = \|v\| = \|w\| = 1, \quad g_0(u, v) = 0.$$

Por la desigualdad de Schwarz, $1 = |g_0(u, w)| \leq \|u\|\|w\| = 1$, luego $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda w$. Tomando normas, $\lambda = \pm 1$ luego $u = \pm w$. Discutimos casos:

- Si $u = w$, tenemos $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + c^2 = 1$, luego existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos\theta = a$, $\operatorname{sen}\theta = c$. En este caso, $\det A = 1$.
- Si $u = -w$, tenemos $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + c^2 = 1$, luego existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos\theta = a$, $\operatorname{sen}\theta = c$, es decir, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. En este caso, $\det A = -1$. □

Nota 2.13.1 El caso 1 del Lema 2.13.1 es la matriz de una rotación de ángulo θ en el sentido antihorario (positivo para la orientación dada por la base usual de $\mathbb{R}^2$. El caso 2 del Lema 2.13.1 representa la simetría de $\mathbb{R}^2$ respecto de la recta generada por $(\cos\frac{\theta}{2}, \operatorname{sen}\frac{\theta}{2})$.. Para probar esto útimo basta diagonalizar la matriz A del segundo apartado del Lema 2.13.1.

Teorema 2.13.1 (Clasificación de las isometrías de un EVME con dim 2) *Sea (V, g) un EVME con $\dim V = 2$, y $f \in \operatorname{Iso}(V, g)$. Entonces, $\exists B$ base ortonormal de (V, g) tal que*

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \textit{para algún } \theta \in [0, 2\pi), \textit{ ó } M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Tomemos una base ortonormal B_1 de (V, g). Por la Proposición 2.12.1, $M(f, B_1) \in O(2)$. Por el Lema 2.13.1, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ (único una vez fijada B_1) tal que

$$M(f, B_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ si } \det f = 1, \text{ o bien} \tag{2.15}$$

$$M(f,B_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ si } \det f = -1. \tag{2.16}$$

Si se da (2.15) entonces tenemos la primera conclusión del teorema con $B = B_1$.

Supongamos ahora que se da (2.16) y veamos que podemos cambiar B_1 por otra base ortonormal de (V,g) para que $M(f,B)$ diagonalice con valores propios $1,-1$. Como $M(f,B_1)$ es simétrica, es ortogonalmente diagonalizable por el Corolario 2.11.2. El polinomio característico de f es $p_f(t) = (t-1)(t+1)$, con raíces $1,-1$. Tomemos dos vectores propios $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_{-1}$ con $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$. Por el apartado 4 de la Proposición 2.12.2, tenemos $x_1 \perp x_2$ (esto también se podría haber deducido del apartado 2 de la Proposición 2.11.2 ya que f es g-autoadjunto porque $M(f,B_1)$ es simétrica y B_1 es g-ortonormal). Así, $B = (x_1,x_2)$ es una base ortonormal de (V,g) y $M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. □

Nota 2.13.2 1. Si fijamos una orientación en V, la demostración anterior prueba que podemos elegir la base ortonormal B positivamente orientada.

2. En el caso $\det f = 1$ del Teorema 2.13.1, se puede probar que el ángulo de giro θ es único (es decir, no depende de la base B_1 de la demostración del teorema) una vez fijada una orientación de V. Esto se deduce de que θ está determinado por la siguiente propiedad: Para cada $x \in V$, el ángulo orientado entre x y $f(x)$ según la orientación $[B]$ es θ. Con el lenguaje general introducido en el apartado de la Proposición 2.12.2, f es una rotación.

3. En el caso $\det f = -1$ del Teorema 2.13.1, f es una simetría respecto de la recta vectorial dada por el subespacio propio asociado al valor propio 1. Con el lenguaje general introducido en el apartado 1 del Proposición 2.12.2, f es una reflexión.

Teorema 2.13.2 (Clasificación de las isometrías de un EVME con dim 3) *Sea (V,g) un EVME con $\dim V = 3$, y $f \in \operatorname{Iso}(V,g)$. Entonces, $\exists B$ base ortonormal de (V,g) y $\exists \theta \in [0,2\pi)$ tales que*

$$M(f,B) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \quad \textit{ó} \quad M(f,B) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right).$$

Demostración. El polinomio característico de f tiene grado 3, luego tiene al menos una raíz $a \in \mathbb{R}$. Por el apartado 4 de la Proposición 2.12.2, $a = \pm 1$. Tomemos $x \in V - \{0\}$ tal que $f(x) = ax$ y sea $U = L(\{x\})$. Así, $f(U) \subseteq U$ luego $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ por el apartado 3 de la Proposición 2.12.2. Por tanto, $f|_{U^\perp}$ cae en las hipótesis del Teorema 2.13.1 luego $\exists B' = (x_2, x_3)$ base ortonormal de $(U^\perp, g|_{U^\perp})$ tal que

$$M(f|_{U^\perp}, B') = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ó } M(f|_{U^\perp}, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sea $x_1 = \frac{1}{\|x\|}x$, y $B_1 = (x_1, x_2, x_3)$, base ortonormal de (V, g). Entonces,

$$M(f, B_1) = \left(\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \quad \text{ó} \quad M(f, B_1) = \left(\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Si $a = 1$, la matriz de la izquierda es una de las opciones del enunciado del teorema (luego tomamos $B = B_1$), y la matriz de la derecha también lo es si intercambiamos el primer y el tercer vector de B_1 (luego tomamos $B = (x_3, x_1, x_2)$ y $\theta = 0$). Si $a = -1$, la matriz de la izquierda es una de las opciones del enunciado del teorema (luego tomamos $B = B_1$), y la matriz de la derecha también lo es si tomamos $B = (x_2, x_3, x_1)$ y $\theta = \pi$. $\square$

Nota 2.13.3 1. En cualquiera de los dos casos del teorema, se puede calcular θ fácilmente mediante la fórmula $\text{traza}(f) = \det(f) + 2\cos\theta$.

2. Si fijamos una orientación en V, la demostración anterior prueba que podemos elegir la base ortonormal B positivamente orientada.

3. La interpretación geométrica de f cuando su matriz en una base ortonormal $B = (x_1, x_2, x_3)$ es la de la izquierda en el enunciado del Teorema 2.13.2, es la de un giro de ángulo θ respecto al eje dado por $L(\{x_1\})$, en el sentido contrario a las agujas del reloj en el plano $L(\{x_2, x_3\})$ (y es una rotación en el sentido definido en el apartado 2 de la Proposición 2.12.2). En el caso de que $M(f, B)$ venga dada por la de la derecha en el enunciado del Teorema 2.13.2, f es una reflexión (según el apartado 2 de la Proposición 2.12.2), pero no es una reflexión geométrica respecto a un plano: es la composición de la simetría respecto del plano $L(\{x_2, x_3\})$ con el giro de ángulo θ respecto al eje $L(\{x_1\})$.

Teorema 2.13.3 (Clasificación de las isometrías de un EVME con dim n) *Sea (V, g) un EVME con $\dim V = n$ y $f \in \text{Iso}(V, g)$. Entonces, $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\theta_1, \ldots, \theta_r \in [0, 2\pi)$ y una base ortonormal B de (V, g) tales que $k_1 + k_2 + 2r = n$ y*

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_{k_1} & & & & \\ \hline & -I_{k_2} & & & \\ \hline & & \text{Rot}_{\theta_1} & & \\ \hline & & & \ddots & \\ \hline & & & & \text{Rot}_{\theta_r} \end{array}\right),$$

donde $\mathrm{Rot}_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ *y fuera de las cajas en la diagonal sólo hay ceros.*

Demostración. Llamemos $U = \{x \in V \mid f(x) = x\}$, $W = \{x \in V \mid f(x) = -x\}$. Es posible que U ó W sean $\{0\}$ (pero caso de que f tenga valores propios, éstos son ± 1). Como $U \cap W = \{0\}$, tenemos $U + W = U \oplus W$. Además, $f(U + W) \subseteq U + W$ luego $f[(U + W)^{\perp}] \subseteq (U + W)^{\perp}$ por el apartado 3 de la Proposición 2.12.2. Tenemos dos posibilidades:

- $\underline{(U + W)^{\perp} = \{0\}}$. En este caso, $U + W = V$ luego $V = U \oplus W$. Tomando una base ortonormal de la métrica inducida en cada subespacio, tenemos $M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} I_{k_1} & \\ \hline & -I_{k_2} \end{array}\right)$ con $k_1 = \dim U$, $k_2 = \dim W$, que es una de las opciones del enunciado una vez probemos que al unir las bases elegidas en $(U, g|_U)$ y $(W, g|_W)$ se obtiene una base ortonormal de (V, g). Esto se deduce de que si $x \in U$ e $y \in W$, entonces $g(x, y) = g(f(x), f(y)) = g(x, -y) = -g(x, y)$ luego $g(x, y) = 0$.

- $\underline{(U + W)^{\perp} \neq \{0\}}$. En este caso, $f|_{(U+W)^{\perp}} \in \mathrm{Iso}((U + W)^{\perp}, g|_{(U+W)^{\perp}})$, y esta última isometría no tiene valores propios. Así que en este caso el argumento se reduce a clasificar las isometrías sin vectores propios de un EVME (en particular, éste ha de tener dimensión par). Esto es lo que haremos a continuación.

Simplificamos la notación llamando f a una isometría sin valores propios de un EVME (V, g). Veamos que $f + f^{-1}$ es un endomorfismo autoadjunto respecto a g: Dados $x, y \in V$,

$$g((f+f^{-1})(x), y) = g(f(x), y) + g(f^{-1}(x), y) = g(x, f^{-1}(y)) + g(x, f(y)) = g(x, (f+f^{-1})(y)).$$

Como $f + f^{-1}$ es autoadjunto, admite al menos un valor propio $a_1 \in \mathbb{R}$ y por tanto existe $x_1 \in V - \{0\}$ tal que $(f + f^{-1})(x_1) = a_1 x_1$. Aplicando f, queda $f(f(x_1)) = -x_1 + a_1 f(x_1)$. Por tanto, $U_1 := L(\{x_1, f(x_1)\})$ cumple $f(U_1) \subset U_1$, luego $f|_{U_1} \in \mathrm{Iso}(U_1, g|_{U_1})$. Por el Teorema 2.13.1, $\exists \theta_1 \in [0, 2\pi)$ y una base ortonormal B_1 de $(U_1, g|_{U_1})$ tales que

$$M(f|_{U_1}, B_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} = \mathrm{Rot}_{\theta_1}.$$

(la otra posibilidad del Teorema 2.13.1 no puede darse porque $f|_{U_1}$ no tiene valores propios). Como $f(U_1) \subseteq U_1$, tenemos $f(U_1^{\perp}) \subseteq U_1^{\perp}$ por el apartado 3 de la Proposición 2.12.2. Ahora consideramos la restricción $f|_{U_1^{\perp}} \in \mathrm{Iso}(U_1^{\perp}, g|_{U_1^{\perp} \times U_1^{\perp}})$, que está en la misma situación anterior (no tiene valores propios). Repitiendo el proceso en $U_1^{\perp}$ encontraremos un segundo plano vectorial $U_2 \subset U_1^{\perp}$ y una segunda rotación. De esta forma vamos descomponiendo V en planos vectoriales ortogonales U_1, $U_2 \subseteq U_1^{\perp}$, $U_3 \subseteq U_2^{\perp} \ldots$ hasta terminar con la dimensión de V (que es par). $\square$

Nota 2.13.4 Dada $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$ en la situación del Teorema 2.13.3, f es una rotación (en el sentido definido en el apartado 2 de la Proposición 2.12.2) si y sólo si k_2 es par, y una reflexión cuando k_2 es impar.

2.14. Elemento de volumen métrico orientado

Sea $V^n(\mathbb{R})$ un espacio vectorial real de dimensión n. Recordemos de la Proposición 1.8.1 dada una base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V y su dual $B^* = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ en V^*, el tensor determinante en la base B

$$\det_B := \varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^n$$

es un elemento de volumen ($\det_B \in \Lambda^n(V) \setminus \{0\}$)), que $\det_B$ aplicado sobre n vectores es el determinante de la matriz de coordenadas de esos vectores en la base B, y si $\overline{B}$ es otra base ordenada, entonces

$$\det_B = \det(M(1_V, \overline{B}, B) \cdot \det_{\overline{B}}. \tag{2.17}$$

De esta última igualdad se deduce que, si se seleccionan bases ordenadas tales que $\det(M(1_V, \overline{B}, B)) = 1$, entonces el tensor determinante es el mismo para para todas esas bases. Por otro lado, la matriz de cambio de base P entre dos bases ortonormales para un EVM no degenerado debe verificar $(\det P)^2 = 1$ (el argumento es el mismo que el que probaba el apartado 2 de la Proposición 2.12.2). En consecuencia, la siguiente definición tiene sentido.

Definición 2.14.1 *Sea (V, g) un espacio vectorial con un tensor métrico no degenerado, y sea $[\tilde{B}]$ una orientación en V. El* elemento de volumen métrico orientado *es el único elemento de volumen $\omega_g \in \Lambda^n(V) \setminus \{0\}$ que verifica:*

$$\omega_g = \det_B$$

para cualquier base ortonormal B positivamente orientada ($B \in [\tilde{B}]$).

Ejemplo 2.14.1 En $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) el valor absoluto del determinante de la matriz formada por dos (resp. tres) vectores coincide con el área (resp. volumen) del paralelogramo (resp. paralelepípedo) generado por esos vectores en Geometría Elemental. El elemento de volumen métrico orientado en $(\mathbb{R}^2, g_0)$ (resp. $(\mathbb{R}^3, g_0)$) es, por tanto, el que a cada base de $\mathbb{R}^2$ (resp $\mathbb{R}^3$) le hace corresponder el área (resp. volumen) del paralelogramo (resp. paralelepípedo) generado por esos vectores.

2.15. Producto vectorial en un EVME tridimensional.

En esta sección, (V, g) es un EVME con $\dim V = 3$. Sabemos que por ser g no degenerada, la aplicación

$$\flat\colon V \to V^*, \quad \flat(x) = x^\flat\colon V \to \mathbb{R}$$

donde $x^\flat(y) = g(x, y)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Sea B una base ortonormal de (V, g), y $\det_B$ el tensor determinante en esa base, es decir

$$\det_B(y_1, y_2, y_2) = \det((y_1)_B, (y_2)_B, (y_3)_B), \quad \forall y_1, y_2, y_3 \in V,$$

donde $(y_i)_B \in \mathbb{R}^3$ son las coordenadas de $y_i \in V$ respecto a B.

Dados $x, y \in V$, consideremos la forma lineal $\det_B(x, y, \cdot) \in V^*$. Así, existe un único vector $x \times y \in V$ tal que $(x \times y)^\flat = \det_B(x, y, \cdot)$. Es decir,

$$g(x \times y, z) = \det_B(x, y, z) \quad \forall z \in V. \tag{2.18}$$

Definición 2.15.1 A $x \times y$ se le llama el *producto vectorial* de x e y respecto a la orientación $[B]$.

- $x \times y$ no depende de la base ortonormal elegida en $[B]$: en efecto, si $B' \in [B]$ es otra base ortonormal, entonces $\det_B = \det_{B'}$ (recordemos que para dos bases cualesquiera $B.B'$ de V no necesariamente ortonormales, $\det_B = \det M(1_V, B', B) \cdot \det_{B'}$). Por tanto, (2.18) nos dice que $x \times y$ es independiente de si usamos B o B'.
- Si cambiamos la orientación en (V, g), entonces $x \times y$ cambia de signo, porque si B, B' son dos bases ortonormales en distintas orientaciones, entonces $\det_B = -\det_{B'}$.

Proposición 2.15.1 (Propiedades del producto vectorial) *En la situación anterior, dados $x, y, z, x', y' \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$,*

1. *Si $x_B = (a_1, a_2, a_3)$, $y_B = (b_1, b_2, b_3)$, entonces*
$$(x \times y)_B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\imath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$
2. $(ax + bx') \times y = a(x \times y) + b(x' \times y)$.
3. $x \times (ay + by') = a(x \times y) + b(x \times y')$.
4. $x \times y = -y \times x$.
5. $g(x \times x', y \times y') = g(x, y)\, g(x', y') - g(x, y')\, g(x', y)$.
6. $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - g(x, y)^2$.

7. $\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \operatorname{sen} \sphericalangle(x,y)$ *si* $x, y \neq 0$ *(aquí* $\sphericalangle(x,y) \in [0,\pi]$ *es el ángulo no orientado en el plano generado por* x, y*).*

8. $x \times (y \times z) = g(x,z)y - g(x,y)z$.

Demostración. 1 se deduce de (2.18) tomando z como cada vector de B. 2 y 3 son triviales. 4 se deduce de que $\det_B$ es antisimétrico en sus dos primeras variables. 6 se deduce de 5 tomando $y = x, y' = x'$.

Veamos 5: Ambos miembros de la igualdad son tensores[3] de tipo $(4,0)$ luego basta ver que coinciden sobre los vectores de una base ordenada ortonormal positiva $B = (x_1, x_2, x_3)$ de (V, g). Hay $3^4 = 81$ listas de cuatro vectores con los elementos de B, pero no tenemos que comprobarlos todos debido a las propiedades de simetría en los dos miembros. Por ejemplo, es fácil comprobar que

- Si $x = x'$ o $y = y'$, los dos miembros se anulan.
- Si cambiamos x por x' o bien y por y', los dos miembros cambian de signo.
- Si cambiamos la primera pareja por la segunda pareja de variables, los dos miembros permanecen igual.

Usando las propiedades anteriores, al evaluar en una lista (x_i, x_j, x_k, x_j) de vectores de B, tenemos:

- Si sólo interviene un dígito distinto en la lista, los dos miembros valen cero.
- Si intervienen dos dígitos distintos $a, b \in \{1,2,3,4\}$ en la lista, sólo tenemos que comprobar la igualdad para listas del tipo (x_a, x_b, x_a, x_b) con $a < b$. Esto produce 3 posibles listas (abreviado): $(1,2,1,2)$, $(1,3,1,3)$, $(2,3,2,3)$.
- Si intervienen 3 dígitos distintos $a, b, c \in \{1,2,3,4\}$ en la lista, sólo tenemos que comprobar la igualdad para listas del tipo (x_a, x_b, x_a, x_c). Esto produce otras 3 posibles listas (abreviado): $(1,2,1,3)$, $(2,1,2,3)$, $(3,1,3,2)$.

La igualdad en cada una de las 6 listas anteriores se comprueba por cálculo directo.

Probamos 7: $\|x \times y\|^2 \stackrel{(6)}{=} \|x\|^2 \|y\|^2 (1 - \cos^2 \sphericalangle(x,y)) = \|x\|^2 \|y\|^2 \operatorname{sen}^2 \sphericalangle(x,y)$, y sólo queda extraer raíces cuadradas ($\operatorname{sen} \sphericalangle(x,y) \geq 0$ porque $\sphericalangle(x,y) \in [0,\pi]$).

Terminamos probando 8: Por definición, $x \times (y \times z)$ es el único vector de V tal que

$$g(x \times (y \times z), w) = \det_B(x, y \times z, w), \quad \forall w \in V.$$

Pero $g(g(x,z)y - g(x,y)z, w) = g(x,z)g(y,w) - g(x,y)g(z,w) = g(x,z)g(w,y) - g(x,y)g(z,w) \stackrel{(5)}{=} g(x \times w, z \times y) = \det_B(x, w, z \times y) = \det_B(x, y \times z, w)$. □

[3] Es decir, son lineales en cada una de sus cuatro variables por separado.

2.16. Ejercicios.

1. Probar el Lema 2.2.1.

2. Comprueba si los tensores de $\mathbb{S}_2(\mathbb{R}^2)$ definidos en la base canónica por las siguientes matrices son o no definidos positivos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Se considera la métrica g en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

   Para esta métrica g, ¿es la aplicación $\flat \colon \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^*$ dada por el Teorema 2.10.1 isomorfismo de espacios vectoriales? Calcular $x^\flat$ para $x = (2, -5)$

4. ¿Cuáles de las distancias definidas en el Ejemplo 2.6.1 provienen de una norma en el sentido de la Proposición 2.6.1?

5. Sea (V, g) un EVME y $x, y \in V$. Demostrar la *ley del paralelogramo,*

$$\|v - w\|^2 + \|v + w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right).$$

   y el Teorema de Pitágoras,

$$x, y \text{ son ortogonales } \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

6. Desigualdad de Bessel. Sea $\{x_1, \ldots, x_k\}$ un subconjunto ortogonal de vectores no nulos en un EVME (V, g). Probar que dado $x \in V$, se tiene

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{g(x, x_i)^2}{\|x_i\|^2},$$

   y que la igualdad es cierta si y sólo si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{g(x, x_i)}{\|x_i\|^2} x_i$.

7. Escribe las desigualdades de Schwarz y triangular en los casos particulares de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ y en $C([a, b])$ con el producto L^2.

8. Prueba que dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, se tiene
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$
y que la igualdad se da si y sólo si $a_1 = \ldots = a_n$.

9. Demuestra que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es cualquier función continua, entonces
$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\, dx,$$
y que la igualdad se da si y sólo si f es constante.

10. Demuestra que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces $|\text{Traza}(A)| \leq \sqrt{n}\ \|A\|$, y la igualdad se da si y sólo si A es un múltiplo de la identidad.

11. Probar la Proposición 2.7.1.

12. Calcular el ángulo (no orientado) entre las matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ según el producto escalar euclídeo en la fórmula (2.2). Discutir las posibilidades para definir su ángulo orientado.

13. En el espacio $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ de todos los polinomios de grado menor o igual que $n \in \mathbb{N}$ con coeficientes reales se define un producto escalar mediante $g(p_1, p_2) = \int_0^1 p_1(x).p_2(x)dx$, para todo $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Para $n \geq 2$, calcular el ángulo entre los polinomios $\{1, x\}$ según ese producto escalar.

14. Probar la Proposición 2.8.1.

15. Se considera en $\mathbb{R}^2$ la forma cuadrática
$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad\qquad (x,y) \mapsto y^2 + 2xy.$$
Demostrar que su tensor métrico asociado es no degenerado. Calcular su índice y hallar una base ortonormal suya.

16. Probar la Proposición 2.9.1.

17. En $\mathbb{R}^3$ dotado de su producto escalar usual, hallar una base ortonormal del subespacio $U = L\{(1,1,1), (1,-1,1), (1,0,1)\}$.

18. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales se considera el tensor métrico

$$g(p,q) = \int_0^1 p(x).q(x)dx$$

y el subespacio $U = L\{1-x, x-x^2\}$.

(a) Probar que g es una métrica euclídea en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(b) Hallar una base ortonormal de (U, g_U) y ampliarla a una base ortonormal de $(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), g)$.

(c) Hallar la proyección ortogonal del polinomio $1+x+x^2+x^3$ sobre U y sobre $U^\perp$.

19. Probar el Corolario 2.9.2.

20. Criterio de los menores para saber si una métrica es euclídea. Sea (V,g) un EVM y B una base ordenada de V. Dado $k \in \{1,\ldots,n\}$, sea A_k el menor de $M_B(g)$ formado por las k primeras filas y columnas de A.

a) Demuestra que g es euclídea si y sólo si $\forall k$, $\det(A_k) > 0$. Indicación para la condición suficiente: Razona por inducción sobre $\dim V$ y encuentra una base ortonormal $B_U = (y_1,\ldots,y_{n-1})$ de $g|_U$, donde $U \subset V$ está generado por los primeros $n-1$ vectores de B. Amplía B_U a $B_1 = (y_1,\ldots,y_{n-1},y_n)$ y expresa

$$M_{B_1}(g) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & a^t \\ \hline a & a_n \end{array}\right)$$

para cierto $a = (a_1,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Define $B_2 = (y_1,\ldots,y_{n-1}, y_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i y_i)$ y prueba que

$$M_{B_2}(g) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & a_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \end{array}\right).$$

Finalmente, prueba que $a_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 > 0$, por lo que g será euclídea.

b) Demuestra que g es definida negativa si y sólo si $\forall k$, $(-1)^k \det(A_k) > 0$.

21. Sea A una matriz simétrica 2×2. Demostrar:

(a) A es no degenerada si y sólo si det$A \neq 0$. En este caso:

- A indefinida si y sólo si det$A < 0$.
- A definida positiva o negativa si y sólo si det$A > 0$. En este caso es definida positiva (resp. negativa) si y sólo si uno de sus elementos diagonales es positivo (resp. negativo).

(b) A es degenerada si y sólo si det$A = 0$. En este caso A es semidefinida positiva o negativa, y es semidefinida positiva (resp. negativa) si alguno de sus elementos diagonales es mayor que 0 (resp. menor que 0).

22. Demostrar que una matriz simétrica A es:

    (a) definida positiva si y sólo si existe una matriz regular P tal que $A = P^t \cdot P$.

    (b) semidefinida positiva si y sólo si existe una cuadrada P tal que $A = P^t \cdot P$.

23. Sea $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial real de dimensión n, $g \in S_2(V)$ y B_1 una base ordenada de V. Probar que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es congruente a $M_{B_1}(g)$, entonces existe una base ordenada B_2 de V tal que $B = M_{B_2}(g)$.

24. Prueba el Lema 2.2.1.

25. Demuestra que todo espacio vectorial real admite una métrica euclídea.

26. En $\mathbb{R}^2$ se considera la base usual $B_u = \{e_1, e_2\}$ y las métricas g_k, $k = -2, -1, 0, 1, 2$ dadas por
$$M_{B_u}(g_k) = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}.$$
Estudiar en función de k de qué tipo es la métrica g_k.

27. Construye una métrica sobre $\mathbb{R}^2$ tal que el vector $(1, -2)$ sea ortogonal a todos los vectores.

28. Sea (V, g) un EVME. Probar que todo conjunto $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset V$ de vectores no nulos y ortogonales dos a dos es linealmente independiente.

29. Prueba que durante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, no se cambian los subespacios generados por cada conjunto ordenado de la base original. Es decir, si $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es la base original de V y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es la base ortonormal obtenida por ortonormalización de Gram-Schmidt a partir de ella, entonces
$$L(\{y_1\}) \oplus \ldots \oplus L(\{y_i\}) = L(\{x_1\}) \oplus \ldots \oplus L(\{x_i\}),\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

30. Es posible que la restricción de una métrica no degenerada a un subespacio sea degenerada (esto no ocurre para métricas euclídeas): prueba que la métrica g sobre $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base usual es $M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es no degenerada, pero que la restricción de g a $U = L(\{(1, 0)\})$ es degenerada.

31. Sean g, g' dos métricas sobre el mismo espacio vectorial $V(\mathbb{R})$, tales que dados $x, y \in V$, $g(x, y) = 0$ si y sólo si $g'(x, y) = 0$. ¿Tienen que coincidir g y g'?

32. En $(\mathbb{R}^3, g_0)$ (producto escalar usual) se consideran los planos vectoriales cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base usual son $U_1 = \{a_1 + a_2 - a_3 = 0\}$, $U_2 = \{a_1 + a_2 + 2a_3 = 0\}$. Probar que $U_1^\perp \subset U_2$ y que $U_2^\perp \subset U_1$ pero estas inclusiones no son igualdades.

33. Sea (V, g) un EVME y $p \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ tal que $p \circ p = p$ (es decir, p es una proyección). Demostrar que $V = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ y que si p es autoadjunto respecto a g, entonces p es la proyección ortogonal de V sobre el subespacio $U = \mathrm{Im}(p)$.

34. Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grado}(p(x)) \leq 2\}$. Consideremos la aplicación

$$g : V \times V \to \mathbb{R} \mid g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt.$$

   i) Prueba que g es una métrica euclídea sobre V.

   ii) Demuestra que la base $\{1, x, x^2\}$ no es ortonormal respecto de g y obtén a partir de ésta, una base ortonormal por el procedimiento de Gram-Schmidt.

35. Sea V un espacio vectorial real, y U, W subespacios vectoriales de V tales que $V = U \oplus W$. Demuestra que existe una métrica euclídea g sobre V tal que W es el suplemento ortogonal de U respecto a g.

36. Sea f un endomorfismo autoadjunto de un EVME (V, g) de dimensión finita. Prueba que V es suma directa ortogonal de $\ker(f)$ y de Im(f).

37. En el espacio vectorial $C([-1, 1], \mathbb{R})$ con el producto L^2, probar que el suplemento ortogonal del subespacio formado por las funciones pares coincide con el subespacio de las funciones impares.

38. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con la métrica $g(A, B) = \mathrm{Tr}(A^T \cdot B)$, calcular el suplemento ortogonal del subespacio vectorial formado por las matrices diagonales.

39. Sea (V, g) un EVM con dimensión n y B una base de V. Probar que un automorfismo f de V es una isometría de (V, g) en sí mismo si y sólo si $M(f, B)^T \cdot M_B(g) \cdot M(f, B) = M_B(g)$.

40. Sea (V, g) un EVM y $f \colon V \to V'$ un isomorfismo de V en otro espacio vectorial real. Prueba que existe una única métrica g' sobre V' que hace a f una isometría de (V, g) en (V', g').

41. Sea (V', g') un EVM y $f \colon V \to V'$ un monomorfismo de otro espacio vectorial real V en V'. Prueba que existe una única métrica g sobre V que hace a f una isometría de (V, g) en $(f(V), g'|_{f(V) \times f(V)})$.

42. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas g_1, g_2, g_3 definidas por sus respectivas matrices de coordenadas respecto de la base ordenada usual B:
$$M_B(g_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_B(g_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_B(g_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
Discutir razonadamente las posibles isometrías que existan entre $(\mathbb{R}^2, g_1), (\mathbb{R}^2, g_2)$ y $(\mathbb{R}^2, g_3)$.

43. Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, B una base de $V(\mathbb{R})$ y g la única métrica sobre V tal que $M_B(g) = A$. Demuestra que g es euclídea si y sólo si existe $Q \in Gl(n, \mathbb{R})$ tal que $A = Q^t \cdot Q$.

44. Probar que un isomorfismo f entre dos EVM $V, g), (V', g')$ es isometría si y sólo si conserva las formas cuadráticas asociadas a g, g'.

45. Probar que la composición de dos isometrías entre EVM es una isometría.

46. Probar el recíproco del apartado 1 y el apartado 2 en la demostración de la Proposición 2.12.1.

47. En $\mathbb{R}^4$ se considera el producto escalar usual y los subespacios vectoriales
$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0, \ z + t = 0\}, \quad W = L(\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}).$$
Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una isometría que verifica las condiciones

    (A) $f(U) = W$,
    (B) $f(1, -1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$,
    (C) $\det f = 1$.

    ¿Existe alguna isometría f como la anterior que sea diagonalizable? Si existe, calcula una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ con que esté formada por vectores propios de f.

48. **(A)** Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ definido por $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$. Demostrar que f es autoadjunto respecto al producto escalar usual g_0 y calcular una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_0)$ formada por autovectores de f.
    (B) Idem para $f(x, y, z) = (y, x + 2z, 2y)$.

49. Sea (V^4, g) un espacio vectorial métrico euclídeo de dimensión 4, B una base ordenada ortonormal de (V, g) y $f, h_a \colon V \to V$ (a es un parámetro real) los endomorfismos g-autoadjuntos dados por las matrices
$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(h_a, B) = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 & 0 \\ -2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontrar bases ortonormales de (V,g) formadas por vectores propios de f y de h_a.

50. Encuentra una matriz $P \in O(3)$ tal que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $P^t \cdot A \cdot P$ es diagonal.

51. Sea f un endomorfismo autoadjunto de un EVME (V,g), tal que $g(f(x),x) \geq 0\ \forall x \in V$. Prueba que $\exists h$ endomorfismo autoadjunto de (V,g) tal que $h \circ h = f$. ¿Es h único?

52. Sea (V^n,g) un espacio vectorial métrico euclídeo y $f,h\colon V \to V$ dos endomorfismos g-autoadjuntos. Razonar cuáles de los siguientes endomorfismos son necesariamente autoadjuntos:

$$f+h, \quad f\circ h, \quad f\circ f, \quad f\circ h + h\circ f, \quad f\circ h\circ f + 3f - 21_V.$$

53. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las formas cuadráticas

$$F_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy-xz+yz, \quad F_2(x,y,z) = x^2+3y^2-z^2-8xz.$$

Encontrar bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual que diagonalicen a F_1 y a F_2.

54. En $\mathbb{R}^2$ se considera la métrica g cuya matriz en la base usual B es $M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (A) Probar que g es euclídea y encontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2,g)$.

   (B) Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ dado por $M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que f es autoadjunto respecto a g y entontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2,g)$ formada por autovectores de f.

55. Diagonalización simultánea de dos endomorfismos autoadjuntos.
Sean f,h endomorfismos autoadjuntos de un EVME (V,g) con dimensión n, tales que $f\circ h = h\circ f$.

   (A) Probar que los subespacios propios de f (resp. de h) son invariantes por h (resp. por f).

   (B) Demostrar que existe una base ordenada ortonormal de B de (V,g) tal que $M(f,B)$ y $M(h,B)$ son matrices diagonales.

56. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 5, B una base de V y g la métrica sobre V dada por
$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calcular el rango y la signatura de g, y encontrar una base B' de V tal que $M_{B'}(g)$ sea diagonal.

57. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 5, B una base de V y g la métrica sobre V dada por
$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calcular el rango y la signatura de g.

58. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 4, B una base de V y g_a la métrica sobre V dependiendo de un parámetro $a \in \mathbb{R}$, dada por
$$M_B(g_a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (A) Calcular el rango y la signatura de g_a para todo $a \in \mathbb{R}$.

   (B) Para los valores $a = 0, 1, -1, 2$, encontrar una matriz diagonal D y una matriz regular P tales que $D = P^T M_B(g_a) P$.

59. Probar que todas las matrices simétricas reales A de orden $n \in \mathbb{N}$ verificando $A^2 = A$ y $\mathrm{Traza}(A) = 1$ son semejantes entre sí mediante una matriz ortogonal.

60. Sean A, C dos matrices simétricas reales de orden $n \in \mathbb{N}$.

   (A) Probar que A, C son congruentes si y sólo si tienen la misma signatura, es decir, la misma cantidad de valores propios positivos, negativos y cero.

   (B) Probar que A, C son congruentes mediante una matriz ortogonal si y sólo si tienen los mismos valores propios.

61. Para cada una de las siguientes matrices simétricas reales, calcular su signatura.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

   (A) Demostrar que A y C son matrices congruentes.

   (B) Encontrar una matriz $P \in Gl(3, \mathbb{R})$ tal que $C = P^t AP$.

   (C) ¿Existe una matriz ortonomal $P \in Gl(3, \mathbb{R})$ tal que $C = P^t AP$?

62. Se considera en $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ el tensor métrico no degenerado g con

$$M_{B_0}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Calcular la base $\flat(B_0)$ de $(\mathbb{R}^2)^*$ y la base $\sharp(B_0^*)$ de $\mathbb{R}^2$. ¿Es g euclídea?

63. Sea (V, g) EVM de dimensión finita. Probar que si $v, w \in V$ y $\phi, \psi \in V^*$, entonces $v^\flat(w) = w^\flat(v)$ y $\psi(\phi^\sharp) = \phi(\psi^\sharp)$.

64. Propiedades tipo gradiente de la aplicación sostenido.
   Sea (V^n, g) un EVME y $\phi \in V^* \setminus \{0\}$.

   (a) Demostrar que $\phi^\sharp$ es el único vector de $V \setminus \{0\}$ que verifica $\phi^\sharp \perp \ker(\phi)$, y $\|\phi^\sharp\|^2 = \phi(\phi^\sharp)$.

   (b) Probar que $\phi^\sharp$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de ϕ; esto es, si $v \in V \setminus \{0\}$ verifica $\|v\| = \|\phi^\sharp\|$, entonces $\phi(\phi^\sharp) \geq \phi(v)$ y la igualdad se da si y sólo si $v = \phi^\sharp$.

65. Isomorfismos métricos inducidos entre espacios de tensores con igual suma $r + s$.
   Dado (V^n, g) EVM no degenerado, para cada tensor 2-covariante T se define

$$\widetilde{T}\colon V^* \times V^* \to \mathbb{R}, \qquad (\phi, \psi) \mapsto \widetilde{T}(\phi, \psi) := T(\phi^\sharp, \psi^\sharp).$$

   (a) Demostrar que $\widetilde{T}$ es un tensor 2-contravariante. Además, si $T = \phi \otimes \psi$ entonces $\widetilde{T} = \phi^\sharp \otimes \psi^\sharp$.

   (b) Probar que la aplicación $T \mapsto \widetilde{T}$ es un isomorfismo entre los espacios de tensores.

   (c) Dada una base ordenada B de V con base ordenada dual B^* de V^*, calcular la relación entre $M_B(T)$ y $M_{B^*}(\widetilde{T})$. En particular, demostrar que si g es euclídea y B ortonormal. entonces[4] $M_B(T) = M_B(\widetilde{T})$.

[4] Este tipo de resultados hace que, en muchas situaciones prácticas, se usen tensores sin hacer mención a su covarianza o contravarianza.

(d) Generalizar a otros espacios de tensores.

66. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ dado por $f(a,b) = (2a+b, a-b)$. Se consideran sobre $\mathbb{R}^2$ el producto escalar usual g_0 y el tensor métrico g definido por la forma cuadrática $F_g(a,b) = 2a^2+2ab+b^2$. Calcular los endomorfismos adjuntos de f respecto de g_0 y g.

67. Sea (V^n, g) un EVM no degenerado. Demostrar que si $f \in \mathrm{End}(V)$ admite una base ortonormal de vectores propios, entonces f es autoadjunto respecto de g.

68. Sea $V(\mathbb{R})$ con dimensión finita, y $f \in \mathrm{End}(V)$ diagonalizable. Probar que existe una métrica euclidea g sobre V para la que f es autoadjunto.

69. Se considera la métrica g y los endomorfismos f_1, f_2 de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$M_{B_0}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} f_1(a,b,c) = (2a, 2b, -3a-3b-c) \\ f_2(a,b,c) = (2a-3c, 2b-3c, -c) \end{array}$$

(a) Comprobar que g es euclídea.

(b) ¿Son f_1 ó f_2 autoadjuntos para g o para el usual g_0? En caso afirmativo, hallar una base ortonormal de vectores propios. En caso negativo, ¿existe un nuevo producto escalar euclídeo para que sea autoadjunto?

70. Se considera en $\mathbb{R}^2$, además de su producto escalar usual g_0, la métrica euclídea g y el tensor métrico $\bar{g}$ definidos por sus matrices en la base usual B_0

$$M_{B_0}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{B_0}(\bar{g}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar bases ortonormales para g_0 y g tales que la matriz de $\bar{g}$ en ellas sea diagonal. A partir de ellas, calcular bases de Sylvester de $\bar{g}$.

71. Se considera la base $B = (v_1, v_2, v_3)$ donde $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Hallar la expresión matricial $M(f,B)$ de la isometría $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinada por $f(B) = B_u$ (B_u es la base usual). Comprobar que $M(f,B)$ es ortogonal.

72. Calcular la expresión matricial de la simetría de $\mathbb{R}^3$ respecto del plano $P = \{(x,y,z) \mid x-y=0\}$. Lo mismo, pero respecto de la recta $L = (x,y,z) \mid y+2z=0, 2x-y=0$. Hallar la composición de ambas isometrías y clasificarla.

73. Sean $U = \{(x,y,z,t) \mid x-y=0, z-t=0\}$, $W = \{(x,y,z,t) \mid y-z=0, x+y+z+t=0\}$. Hallar una isometría f de $\mathbb{R}^4$ en sí mismo tal que $f(U) = W$.

74. Se considera la base $B = \{(1,1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y el endomorfismo dado por $M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Probar que f es una isometría y clasificarla.

75. Hallar la expresión matricial respecto de la base usual de la simetría respecto de la recta de $\mathbb{R}^3$ dada por $L = \{(x,y,z) \mid x-y-z=0, x-2y-2z=0\}$.

76. Se consideran en $(\mathbb{R}^2, g_0)$ la base usual $B_0 = (e_1, e_2)$ y las bases $\hat{B}_0 = (e_2, e_1)$, $\hat{B}_1 = (u_1 := (e_1+e_2)/\sqrt{2},\ u_2 := (e_1-e_2)/\sqrt{2},)$, $\hat{B}_1 = ((u_2, u_1)$, así como los endomorfismos f y h determinados por:
$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = -e_1, \qquad\qquad h(e_1) = e_2, \quad h(e_2) = e_1.$$
Demostrar que f y h son isometrías, determinar de qué tipo son, y calcular las matrices de ambos endomorfismos en $B_0, B_1, \hat{B}_0, \hat{B}_1$.

77. Hallar la expresión matricial respecto de la base usual del giro de ángulo $\pi/6$ respecto de la recta $L = \{(x,y,z) \mid x-y-z=0, x-2y-2z=0\}$.

78. Se considera la composición de la simetría respecto del plano $P = \{(x,y,z) \mid x-2z=0\}$ seguida del giro de ángulo $\pi/2$. Hallar la expresión matricial de dicha isometría respecto de la base usual.

79. ¿Qué isometría se obtiene al componer dos simetrías respecto de dos rectas de $\mathbb{R}^3$? ¿Y si fueran dos simetrías respecto de dos planos? ¿Y si fuera una simetría respecto de un plano y una simetría respecto de una recta contenida en dicho plano?

80. ¿Qué isometría se obtiene al componer un giro de ángulo θ respecto de una recta L de $\mathbb{R}^3$ y una simetría respecto del plano $L^\perp$? ¿Y si fuera un giro de ángulo θ respecto de una recta L de $\mathbb{R}^3$ con una simetría respecto de L?

81. Grupo de Lorentz.
El grupo de Lorentz bidimensional $O_1(2,\mathbb{R}) = O(2,1)$ es el conjunto de matrices A reales 2×2 que verifican:
$$A^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(a) Demostrar que $O_1(2,\mathbb{R})$ es el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^2$ con la métrica de Lorentz definida en el apartado 2 de la Nota 2.1.1.
(b) Demostrar que $O_1(2,\mathbb{R})$ es la unión de los siguientes cuatro conjuntos de matrices, los dos primeros (determinante 1):
$$O_1^{+\uparrow}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}; \quad O_1^{+\downarrow}(2) = \left\{ -A : A \in O_1^{+\uparrow}(2) \right\}.$$

y los otros dos (determinante -1):

$$O_1^{-\uparrow}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh\theta & \text{sinh }\theta \\ -\text{sinh }\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}; \quad O_1^{-\downarrow}(2) = \left\{ -A : A \in O_1^{-\uparrow}(2) \right\}.$$

(*Nota*. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a^2 - b^2 = 1$ y $a > 0$ se sabe que existe un único $\theta \in \mathbb{R}$: $a = \cosh\theta, b = \sinh\theta$.)

82. Grupo de Galileo.
Llamaremos *espacio-tiempo galileano* (vectorial) a la terna (V^4, T, g_E) formada por un espacio vectorial real V de dimensión 4, una forma lineal no nula, o *tiempo absoluto* $T : V \to \mathbb{R}$ y un producto escalar euclídeo g_E en el subespacio $E = \ker(T)$; a (E, g_E) se le llama *espacio absoluto*.

Llamaremos *base de Galileo* a un conjunto ordenado $B = (e_0, e_1, e_2.e_3)$ tales que $T(e_0) = 1$ y $B_E := (e_1, e_2.e_3)$ es una base ortonormal del espacio absoluto.

(a) Demostrar que toda base de Galileo es una base de V.

(b) Determinar la forma de la matriz de cambio de base entre dos bases de Galileo.

(c) Demostrar que esas matrices de cambio de base forman un grupo, llamado el grupo de Galileo.

Capítulo 3

Espacio afín

3.1. Primeras definiciones

Definición 3.1.1 Un *espacio afín* es una terna $(V(\mathbb{K}), A, \Phi)$ donde $V \equiv \overrightarrow{A}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ (llamado la *variedad de dirección*, a sus elementos se les llama *vectores*), A es un conjunto no vacío (a sus elementos se les llama *puntos*) y $\Phi : A \times V \to A$ es una aplicación que cumple:

(A1) Para cada $P \in A$, $\Phi(P, 0) = P$.

(A2) $\Phi(\Phi(P, v), w) = \Phi(P, v + w)$, $\forall P \in A$, $v, w \in V$.

(A3) $\forall P, Q \in A$, $\exists!\ v \in V$ tal que $\Phi(P, v) = Q$; es decir, dado $P \in A$ la aplicación $\Phi_P \equiv \Phi(P, \cdot)\colon V \to A$ es biyectiva.

La dimensión n de A se define como la dimensión de V.

Nota 3.1.1 1. Simplificaremos la notación escribiendo $P + v := \Phi(P, v) = \Phi_P(v)$, $\forall P \in A, v \in V$ (esto es sólo notación). Así, las condiciones anteriores se reescriben

(A1) Para cada $P \in A$, $P + 0 = P$.

(A2) $(P + v) + w = P + (v + w)$, $\forall P \in A$, $v, w \in V$.

(A3) $\forall P, Q \in A$, $\exists!\ v \in V$ tal que $P + v = Q$.

2. En algunos textos la definición de espacio afín es una terna $(V(\mathbb{K}), A, \varphi)$ donde $V \equiv \overrightarrow{A}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, A es un conjunto no vacío y $\varphi\colon A \times A \to V$, $(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$, es una aplicación que cumple

(A1)' Para cada $P \in A$, la aplicación $\varphi_P : A \to V$, $Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$, es biyectiva.

(A2)' Para cada $P, Q, R \in A$, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Esta formulación es equivalente a la de la Definición 3.1.1, mediante las fórmulas

$$\varphi(P, Q) = \Phi_P^{-1}(Q), \quad \Phi(P, v) = \varphi(P, \varphi_P^{-1}(v)), \qquad \forall P, Q \in A,\ v \in V.$$

La propiedad (A3) nos dice que fijado $P \in A$ (fijado un origen), podemos identificar A con V vía la biyección $\Phi_P \colon V \to A$. Esto justifica que usemos la notación $Q = P + \overrightarrow{PQ}$. En este caso, llamaremos *origen* de $\overrightarrow{PQ} \in V$ a P, y *extremo* a Q. Cuando no haya posibilidad de confusión, abusaremos de la nomenclatura llamando espacio afín a A (en lugar de a la terna (V, A, Φ).

Ejemplo 3.1.1 1. Todo espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ es un espacio afín, con $A = V$ y $\Phi \colon A \times V \to A$ dada por $\Phi(P, v) = P + v$ (ahora no es notación).

2. Dados $v_0 \in \mathbb{R}^n$ con $\|v_0\| = 1$ (norma usual) y $a \in \mathbb{R}$, sea

$$\Pi(v_0, a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_0(x, v_0) = a\}$$

(hiperplano de $\mathbb{R}^n$ ortogonal a v_0, a altura a). Sea $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_0(x, v_0) = 0\}$, subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ (hiperplano paralelo a $\Pi(v_0, a)$ pasando por el origen). Entonces, $A = \Pi(v_0, a)$ tiene estructura de espacio afín con variedad de dirección V, siendo $\Phi \colon \Pi(v_0, a) \times V \to \Pi(v_0, a)$ la aplicación $\Phi(Q, w) = Q + w$ (tampoco es notación). Este ejemplo se puede generalizar al conjunto de soluciones de cualquier ecuación lineal no homogénea de n variables en $\mathbb{K}^n$, o más generalmente, al conjunto de soluciones de cualquier sistema de ecuaciones lineales compatible.

3. Como un ejemplo proviniente de la Física, al espacio físico ordinario E se le asigna la siguiente estructura de espacio afín de dimensión 3 (habitualmente no pensamos en ella porque estamos acostumbrados a obviarla):

(a) Se define la suma de vectores (flechas) con el mismo origen usando construcciones con paralelogramos, esto es, escribimos $(P, Q) + (P, R) = (P, S)$ donde S se calcula construyendo físicamente un paralelogramo con vértices P, Q, R y cuarto vértice S; también se construye un producto por escalares reales de un modo natural (por ejemplo haciéndolo primero para naturales, luego para enteros, después para racionales y extendiéndolo por último a reales).
(b) A continuación, se establece la *relación de equipolencia* entre flechas mediante $(P, Q) \sim (P', Q')$ si y sólo si $(P, Q) + (P, P') = (P, Q')$. El espacio cociente es el espacio vectorial de los vectores libres del espacio ordinario tridimensional. Las operaciones en este espacio cociente se hacen a partir de representantes con el mismo origen, y se demuestra que la operación resultante no depende de representantes.

(c) Finalmente, la aplicación Φ que hace a E un espacio afín es la que lleva cada punto $P' \in E$ y cada clase $[(P,Q)]$ en el extremo final de la flecha que comienza en P y que cae en la clase $[(P,Q)]$.

Proposición 3.1.1 *Sea A un espacio afín. Para cada $P, Q, R \in A$,*

1. $\overrightarrow{PQ} = 0$ *si, y sólo si,* $P = Q$.
2. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
3. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.
4. Identidad afín del paralelogramo: *Si* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$*, entonces* $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$.
5. $\overrightarrow{P+v, Q+w} = \overrightarrow{PQ} + (w - v)$.

Demostración. Para el apartado 1, notemos que $\Phi_P(0) = P$ por (A1), y si $\Phi_P(v) = P$ entonces $v = 0$ por (A3).

Para el apartado 2, basta comprobar que $\Phi_P(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = R$.

$$\Phi_P(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \Phi(P, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) \overset{(A2)}{=} \Phi(\Phi(P, \overrightarrow{PQ}), \overrightarrow{QR}) = \Phi(Q, \overrightarrow{QR}) = R.$$

El apartado 3 es consecuencia directa de 1 y 2. Para el apartado 4,

$$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS},$$

y ahora cancelamos $\overrightarrow{RS}$ con $\overrightarrow{PQ}$.

Finalmente, $\overrightarrow{P+v, Q+w} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{P+v, P} + \overrightarrow{P, Q+w} \overset{(3)}{=} -\overrightarrow{P, P+v} + \overrightarrow{P, Q+w} = -v + \overrightarrow{P, Q+w} \overset{(2)}{=} -v + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Q, Q+w} = -v + \overrightarrow{PQ} + w$. □

3.2. Subespacios afines

Definición 3.2.1 *Sea A un espacio afín. Un* subespacio afín *(o* subvariedad lineal*) S es un subconjunto de A de la forma $S = \Phi(P, U) = P + U$ para algún subespacio vectorial $U \leq V$.*

Proposición 3.2.1 *En la situación anterior, si $S = P + U = Q + W$ con $P, Q \in A$ y $U, W \leq V$, entonces $U = W$ y $\overrightarrow{PQ} \in U$.*

Demostración. $Q+W = (P+\overrightarrow{PQ})+W = P+(\overrightarrow{PQ}+W)$. Como $Q+W = P+U$, tenemos $P+(\overrightarrow{PQ}+W) = P+U$, de donde $\overrightarrow{PQ}+W = U$, luego $\overrightarrow{PQ} \in U$. Esto claramente implica que $U = W$. $\square$

En la situación anterior, a U se le llama la *variedad de dirección de S,* y se le denota por $\overrightarrow{S}$. Llamaremos *dimensión de S* a la dimensión de $\overrightarrow{S}$. Si $\dim S = 1$, llamaremos a S *recta afín.* Si $\dim S = 2$, lo llamaremos a S *plano afín.* Y si $\dim S = \dim V - 1$ (y $\dim V < \infty$), lo llamaremos a S *hiperplano afín* de V.

En particular, $A = P+V\ \forall P \in A$, lo que da sentido a la notación $\overrightarrow{A} = V$ que usábamos en la Definición 3.1.1, y $\dim A = \dim V$. También tenemos $\overrightarrow{\{P\}} = \{0\}$ y $\dim\{P\} = 0$, $\forall P \in A$.

Lema 3.2.1 *Dado $S = P+U$ subespacio afín de A y $P \in S$, se tiene $\overrightarrow{S} = \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in S\}$. Además, $\overrightarrow{S} = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in S\}$.*

Demostración. Para la primera igualdad, $S = \{Q \mid Q \in S\} = \{P + \overrightarrow{PQ} \mid Q \in S\} = P + \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in S\}$.

Para la segunda igualdad, dado $P \in S$, $\overrightarrow{S} = \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in S\}$ luego

$$\overrightarrow{S} = \bigcup_{P\in S}\{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in S\} = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in S\}.$$

$\square$

Lema 3.2.2 *Sean $S = P + \overrightarrow{S}$, $T = Q + \overrightarrow{T}$ dos subespacios afines de A. Entonces,*

$$S \subset T \iff \overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{T} \ \ y \ \ \overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{T}.$$

Demostración. $S \subset T$ si y sólo si $P + \overrightarrow{S} \subset Q + \overrightarrow{T} = P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{T}$. Esto equivale a que $\overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{T}$, luego para terminar basta probar que

$$\overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{T} \iff \overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{T} \ \text{ y } \overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{T}.$$

La implicación suficiente es trivial, y la necesaria es consecuencia de que $0 \in \overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{T}$, luego $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{T}$, por lo que $\overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{T}$. $\square$

Aplicando dos veces el lema anterior, tenemos

Corolario 3.2.1 *Sean $S = P + \overrightarrow{S}$, $T = Q + \overrightarrow{T}$ dos subespacios afines de A. Entonces,*

$$S = T \iff \overrightarrow{S} = \overrightarrow{T} \ \ y \ \ \overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{S}.$$

Corolario 3.2.2 *Sean $S = P + \overrightarrow{S}$, $T = Q + \overrightarrow{T}$ dos subespacios afines de A. Si $S \subset T$y $\dim S = \dim T$, entonces $S = T$.*

Demostración. Por el Corolario 3.2.1, basta ver que $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{T}$ y $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{S}$.

Como $S \subset T$, el Lema 3.2.2 implica que $\overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{T}$ y $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{T}$. De lo primero, como $\dim S = \dim T$, concluimos que $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{T}$. Y de lo segundo tenemos que $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{T} = \overrightarrow{S}$. □

3.3. Ecuaciones cartesianas o implícitas de un subespacio afín

Rrecordemos que si B es una base ordenada de un espacio vectorial V^n y B_U una base ordenada de un subespacio vectorial $U \leq V$ de dimensión k, una forma de calcular las ecuaciones implícitas de U respecto a B es la siguiente: expresamos cada uno de los k vectores de B_U en coordenadas respecto a B, por columnas. Esto produce una matriz A con n filas y k columnas. Las k columnas de A son linealmente independientes, porque los vectores de B_U lo son. Ahora tomamos un vector $x \in V$ arbitrario, con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ respecto a B. Por el teorema del rango, k de las filas de A son linealmente independientes. Tras reordenar los vectores de B, podemos suponer que las primeras k filas de A son linealmente independientes. Añadiendo las coordenadas de x a las columnas de A, formamos una matriz A' de $k+1$ columnas y n filas. Es evidente que $x \in U$ si y sólo si el rango de A' es k. Como la submatriz cuadrada de A' que forman las primeras k filas de A es regular, concluimos que $\text{rango}(A') = k$ si y sólo si se anulan cada uno de los $n-k$ determinantes que se obtienen tomando las k primeras filas de A' y añadiéndole la fila j-ésima de A' $(k+1 \leq k \leq n)$. Estas son las $n-k$ ecuaciones implícitas de U respecto a B.

Ahora consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $Mx = b$, donde $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tiene rango m (matriz de coeficientes) y $b \in \mathbb{K}^m$ (columna de términos independientes). El sistema homogéneo asociado es $Mx = 0$, cuyas soluciones forman un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ con dimensión $n-m$. Dada una solución $x_0 \in \mathbb{K}^n$ de $Mx = b$, el conjunto de soluciones de $Mx = b$ es

$$\text{Sol}(Mx = b) = x_0 + \text{Sol}(Mx = 0),$$

y por tanto $\text{Sol}(Mx = b)$ tiene estructura de subespacio afín de $\mathbb{K}^n$ con dimensión $n-m$ y variedad de direción $\text{Sol}(Mx = 0)$. El recíproco es cierto:

Proposición 3.3.1 *Sea $S \subset \mathbb{K}^n$ un subespacio afín con $\dim S = n-m$. entonces, existen $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ con rango m y $b \in \mathbb{K}^m$ tales que $S = \text{Sol}(Mx = b)$.*

Demostración. Tomemos un punto $x_0 \in S$, una base B de $V = \overrightarrow{A}$, y sea $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la matriz que por filas expresa las ecuaciones implícitas de $\overrightarrow{S}$ respecto a B. Entonces, $\overrightarrow{S} = \mathrm{Sol}(Mx = 0)$, y por tanto $S = x_0 + \mathrm{Sol}(Mx = 0) = \mathrm{Sol}(Mx = b)$, donde $b \in \mathbb{K}^m$ se elige multiplicando la matriz M por la columna de coordenadas de x_0 respecto a B. □

3.4. Subespacio afín generado por una familia de puntos

Definición 3.4.1 Tomemos dos puntos distintos P, Q en un espacio afín A. Se define la *recta afín generada por* P, Q como

$$< P, Q >:= P + L(\{\overrightarrow{PQ}\}) = P + \{\lambda\overrightarrow{PQ} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Claramente, se tienen:

- $< P, Q >$ es un subespacio afín de dimensión 1, y $P, Q \in < P, Q >$.
- $< P, Q >$ es el único subespacio afín de A que contiene a P, Q.
- Si $R \in < P, Q >$ es distinto a P y a R, entonces $< P, R >=< P, Q >$.
- Si $A, B, C \in < P, Q >$, entonces $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes.

Definición 3.4.2 Tomemos una familia finita de puntos $P_0, \ldots, P_k$ en un espacio afín A. Se define el *subespacio afín generado por* $P_0, \ldots, P_k$ como

$$< P_0, \ldots, P_k >:= P_0 + L(\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\}).$$

Con la definición anterior,

- $< P_0, \ldots, P_k >$ es un subespacio afín de A, con dimensión igual al rango del conjunto de vectores $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}$.
- $< P_0, \ldots, P_k >$ es la intersección de todos los subespacios afines de A que contienen a $P_0, P_1, \ldots, P_k$. En consecuencia, podemos intercambiar el papel de P_0 por cualquiera de los otos puntos y el subespacio afín resultante no cambia.

Teorema 3.4.1 *Sea S un subespacio afín de A con* $\dim S = k$. *Entonces,* $\exists P_0, \ldots, P_k \in S$ *tales que* $S =< P_0, \ldots, P_k >$, *y el número de puntos no puede ser menor.*

Demostración. Tomemos $p_0 \in S$, y sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base de $\overrightarrow{S}$. Llamemos $P_i = P_0 + v_i$, $i = 1, \ldots, k$. Entonces, $< P_0, \ldots, P_k >\subset S$. Por dimensiones, se tiene la igualdad. Finalmente, si $S =< Q_0, \ldots, P_k >$ para ciertos puntos $Q_0, \ldots, Q_k \in A$, entonces $\overrightarrow{S} = L(\{\overrightarrow{Q_0Q_1}, \ldots, \overrightarrow{Q_0Q_k}\})$ luego $k = \dim \overrightarrow{S} \leq k$. □

3.5. Independencia afín y sistemas de referencia

Definición 3.5.1 Sean $P_0, \ldots, P_k$ puntos en un espacio afín A. $\{P_0, \ldots, P_k\}$ se dice *afínmente independiente* si los vectores $\{\overrightarrow{P_0P_i} \mid i = 1, \ldots, k\}$ son linealmente independientes en V (equivalentemente, si $\dim < P_0, \ldots, P_k >= k$). En caso contrario, el conjunto se llama *afínmente independiente.*

El último punto tras la Definición 3.4.2 asegura la consistencia de la definición 3.5.1, al ser el subespacio obtenido independiente del punto escogido como P_0. Las propiedades siguientes son evidentes:

- Todo subconjunto de un conjunto de puntos afínmente independiente es afínmente independiente.
- A un conjunto de puntos afínmente independiente se le pueden añadir puntos hasta conseguir $n+1$ puntos afínmente independierntes, siendo $n = \dim A$.
- Si $\dim A = n$, entonces todo conjunto de al menos $n+2$ puntos es afínmente independiente.

En particular, si $\dim A = n$ y se tienen $n+1$ puntos afínmente independientes, entonces fijado uno de ellos se genera una base del espacio de direcciones, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 3.5.2 Sea A un espacio afín con $\dim A = n \in \mathbb{N}$. Llamaremos *sistema de referencia afín* a un conjunto ordenado $\mathcal{R} = (O; P_1, \ldots, P_n)$ de $n+1$ puntos afínmente independientes de A o, equivalentemente, al par que denotaremos $(O; B)$, formado por el primer punto O (llamado *origen de coordenadas*) y la base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de $V = \overrightarrow{A}$, relacionados por $P_i = O + v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Para cada punto $Q \in A$, a la única n-upla de escalares

$$P_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \qquad \text{tal que} \qquad \overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OP_i}$$

se le llama las *coordenadas afines* de Q respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$.

Ahora podemos reformular la Proposición 3.3.1 como sigue.

Proposición 3.5.1 *Sea A un espacio afín con $\dim A = n \in \mathbb{N}$, y $\mathcal{R} = (O; B)$ un sistema de referencia en A. Dado un subespacio afín S de A con $\dim S = n-m$, existen una matriz $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ con rango m y un vector $b \in \mathbb{K}^m$ tales que S es el conjunto de puntos de A cuyas coordenadas afines respecto a $\mathcal{R}$ son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales $Mx = b$. Además, las coordenadas de los vectores de $\overrightarrow{S}$ respecto de la base ordenada B de V son las soluciones del sistema homogéneo $Mx = 0$.*

3.6. Intersección y suma de subespacios afines

A continuación veremos formas de construir subespacios afines a partir de otros dados.

Proposición 3.6.1 *Si S, T son subespacios afines de un espacio afín A y $S \cap T \neq \varnothing$, entonces $S \cap T$ es un subespacio afín de A, con $\overrightarrow{S \cap T} = \overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T}$.*

Demostración. Sea $P \in S \cap T \Rightarrow S \cap T = (P + \overrightarrow{S}) \cap (P + \overrightarrow{T}) = P + (\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T})$. □

Luego la intersección de dos subespacios afines, o es vacía (lo que era imposible para subespacios vectoriales), o es un subespacio afín. ¿Cuándo es $S \cap T \neq \varnothing$?

Lema 3.6.1 *Si S, T son subespacios afines de un espacio afín A, equivalen:*

1. *$S \cap T \neq \varnothing$.*
2. *Para todo $P \in S, Q \in T$ se tiene $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}$.*
3. *Existen $P \in S, Q \in T$ tales que $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}$.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$: Dado $R \in S \cap T$, se sigue $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} \in \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}$. $(2 \Rightarrow 3)$ es trivial. $(3 \Rightarrow 1)$: Escribiendo $\overrightarrow{PQ} = u + v$ con $u \in \overrightarrow{S}$ y $v \in \overrightarrow{T}$, definimos $R = P + u \in S$. Como $R = P + (\overrightarrow{PQ} - v) = Q - v$, entonces $R \in T$. □

La intersección de subespacios afines se puede generalizar a cualquier número de ellos. Esto permite generalizar la definición de subespacio generado por un número finito de puntos:

Definición 3.6.1 Dado cualquier subconjunto no vacío $C \subset A$, se define el*subespacio afín generado por C* (que se denota por $< C >$), como el menor subespacio afín que contiene a C, esto es, la intersección de todos los subespacios afines de A que contienen a C.

En particular, si S y T son dos subespacios afines de A, su *suma* $S + T$ se define como el subespacio afín generado por $S \cup T$. Equivalentemente,

$$S + T = \cap_{\alpha \in I} L_\alpha,$$

donde la intersección se hace en todos los subespacios afines de A que contienen a $S \cup T$[1] $S + T$ es el menor subespacio afín de A que contiene a S y a T.

La siguiente proposición nos dice cómo calcular la variedad de dirección de una suma de subespacios afines.

[1]Notemos que la intersección es no vacía, ya que A es un subespacio afín de A que contiene a $S \cup T$.

Proposición 3.6.2 *Si S, T son subespacios afines de A, entonces $S+T$ es un subespacio afín de A, con espacio vectorial director: $\overrightarrow{S+T} = \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\})$, donde $P \in S$ y $Q \in T$.*

Demostración. Sean $P \in S$ y $Q \in T$. $P + (\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\})$ es un subespacio afín de A, que contiene a S (porque $S = P + \overrightarrow{S}$) y a T (porque $T = Q + \overrightarrow{T} = P + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{PQ}$). Por tanto, $P + (\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\})$ contiene a $S+T$.

Recíprocamente, sea L un subespacio afín de A que contiene a $S \cup T$. Queda ver que $P + (\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\}) \subset L$: Como $P \in S \subset L$, basta comprobar que $\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\}) \subset \overrightarrow{L}$, lo cual es evidente. □

Corolario 3.6.1 *Sean S, T son subespacios afines de A.*

1. *Si $S \cap T = \varnothing \;\Rightarrow\; \dim(S+T) = \dim(\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}) + 1$.*
2. *Si $S \cap T \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \dim(S+T) = \dim(\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T})$.*

Demostración. Para el apartado 1, supongamos que $S \cap T = \varnothing$. Por el Lema 3.6.1, existen $P \in S$ y $Q \in T$ tales que $\overrightarrow{PQ} \notin \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}$. Por tanto,

$$\dim(S+T) = \dim \overrightarrow{S+T} \overset{(*)}{=} \dim[\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T} + L(\{\overrightarrow{PQ}\})] = \dim(\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}) + 1,$$

donde en $(*)$ hemos usado la Proposición 3.6.2. Para el apartado 2, tomar $P = Q$ y razonar análogamente. □

3.7. Paralelismo

Definición 3.7.1 Sea A un espacio afín, y S, T dos subespacios afines de A. Se dice que S es paralelo a T si $\overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{T}$. S y T se dicen paralelos ($S \| T$) si $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{T}$.

Si S no es paralelo a T ni T es paralelo a S, diremos que los subespacios o bien son *secantes*[2] si $S \cap T \neq \varnothing$ y que *se cruzan* en caso contrario.

Por ejemplo, $\forall a, b \in \mathbb{K}^m$, los conjuntos de soluciones respectivas de los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas $Mx = a$, $Mx = b$, siendo $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, son paralelos. Y de la Proposición 3.5.1 deducimos que si S, T son subespacios afines paralelos de un espacio afín A de dimensión n, existen $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $a, b \in \mathbb{K}^m$ tales que S (resp. T) es el conjunto de puntos de A cuyas coordenadas afines son las soluciones de $Mx = a$ (resp. $Mx = b$).

[2]Tambien se dice que S y T *se cortan.*

Lema 3.7.1 *Sea A un espacio afín, y S, T dos subespacios afines de A.*

1. *Si S es paralelo a T, entonces $S \subset T$ o bien $S \cap T = \varnothing$.*
2. *Si $S \| T$, entonces $S = T$ o bien $S \cap T = \varnothing$.*
3. (Quinto postulado de Euclides). *Dado $P \in A \setminus S$, existe un único subespacio afín S' de A que contiene a P tal que $S \| S'$.*

Demostración. Para el apartado 1, tenemos $\overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{T}$ y ahora hay dos posibilidades: si $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{T}$, el Lema 3.2.2 implica que $S \subset T$; y si si $\overrightarrow{PQ} \notin \overrightarrow{T}$, entonces $\overrightarrow{PQ} \notin \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}$, luego la implicación $1 \Rightarrow 2$ del Lema 3.6.1 implica que $S \cap T = \varnothing$.

Para el apartado 2, aplicar el apartado 1 dos veces. El apartado 3 es inmediato, tomando $S' = P + \overrightarrow{S}$. $\square$

3.8. Aplicaciones afines

Lema 3.8.1 *Sean A, A' dos espacios afines, con espacios vectoriales asociados V, V'. Sea $f \colon A \to A'$ una aplicación. Fijado $P \in A$, definimos $\overrightarrow{f_P} \colon V \to V'$ mediante*

$$\overrightarrow{f_P}(v) = \overrightarrow{f(P)f(P+v)}, \quad \forall v \in V. \tag{3.1}$$

Si $\overrightarrow{f_P}$ es lineal, entonces $\overrightarrow{f_P} = \overrightarrow{f_Q}$, $\forall Q \in A$.

Demostración. Primero observemos que de (3.1) se deducen

$$f(P+v) = f(P) + \overrightarrow{f_P}(v), \quad \forall v \in V. \tag{3.2}$$

$$\overrightarrow{f_P}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}, \quad \forall P, Q \in A. \tag{3.3}$$

Ahora podemos probar el lema. Sea $v \in V$.

$$\left(f(P) + \overrightarrow{f(P)f(Q)}\right) + \overrightarrow{f_Q}(v) = f(Q) + \overrightarrow{f_Q}(v) \overset{(3,2)}{=} f(Q+v) = f(P + \overrightarrow{PQ} + v)$$

$$\overset{(3,3)}{=} f(P) + \overrightarrow{f_P}(\overrightarrow{PQ} + v) \overset{(\star)}{=} f(P) + \left(\overrightarrow{f_P}(\overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{f_P}(v)\right) \overset{(3,3)}{=} f(P) + \left(\overrightarrow{f(P)f(Q)} + \overrightarrow{f_P}(v)\right)$$

$$= \left(f(P) + \overrightarrow{f(P)f(Q)}\right) + \overrightarrow{f_P}(v).$$

donde en $(\star)$ hemos usado que $\overrightarrow{f_P}$ es lineal. Simplificando obtenemos $\overrightarrow{f_P}(v) = \overrightarrow{f_Q}(v)$. $\square$

Definición 3.8.1 Sean A, A' dos espacios afines, con espacios vectoriales asociados V, V'. Una aplicación $f\colon A \to A'$ se dice *afín* si existe $P \in A$ tal que $\overrightarrow{f_P}\colon V \to V'$ es lineal. Por el lema anterior, podemos denotar $\overrightarrow{f_P} = \overrightarrow{f}$. A $\overrightarrow{f}$ se le llama la *aplicación lineal* asociada a f, y se cumplen

$$\overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f(P)f(P+v)}, \quad \forall v \in V. \tag{3.4}$$

$$f(P+v) = f(P) + \overrightarrow{f}(v), \quad \forall v \in V. \tag{3.5}$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}, \quad \forall P, Q \in A. \tag{3.6}$$

En el caso de que f sea biyectiva, diremos que f es un *isomorfismo afín* y que A, A' son *afínmente isomorfos.*

Lema 3.8.2 *Dada una aplicación lineal $F\colon V \to V'$ y dos puntos $P \in A$, $P' \in A'$, existe una única aplicación afín $f\colon A \to A'$ tal que $f(P) = P'$ y $\overrightarrow{f} = F$.*

Demostración. $f(Q) = f(P + \overrightarrow{PQ}) = P' + F(\overrightarrow{PQ})$. □

Algunos ejemplos de aplicaciones afines:

1. Si A es un espacio afín que también es espacio vectorial, entonces
   - Toda aplicación lineal es afín.
   - Una aplicación afín de A en A es lineal si y sólo si lleva 0 en 0.
2. Las *constantes* son aplicaciones afines (con $\overrightarrow{f} = 0$).
3. Las *traslaciones*
   $$T_v\colon A \to A, \quad T_v(P) = P + v$$
   son aplicaciones afines ($\overrightarrow{T_v} = 1_V$) biyectivas, con $(T_v)^{-1} = T_{-v}$, forman un grupo con la composición, no tienen puntos fijos (salvo cuando $v = 0$, que es $T_v = 1_A$), y toda traslación está determinada por la imagen de un sólo punto.
4. Las *homotecias*
   $$H_{P,\lambda}\colon A \to A, \quad H_{P,\lambda}(P) = P + \lambda\,\overrightarrow{PQ}$$
   son aplicaciones afines ($\overrightarrow{H_{P,\lambda}} = \lambda 1_V$). A $P \in A$ se le llama el *centro* y a $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ la *razón* de la homotecia. Son biyectivas, con $(H_{P,\lambda})^{-1} = H_{P,1/\lambda}$. Las homotecias con el mismo centro, junto con la identidad, forman un grupo con la composición. El

único punto fijo de una homotecia (que no sea 1_A) es su centro. Toda homotecia está determinada por la imagen de dos puntos (si $P_1, P_2 \in A$ tienen imágenes prescritas $Q_1, Q_2 \in A$ y buscamos una homotecia $H_{P,\lambda}$ que lleve P_i en Q_i, $i = 1, 2$, entonces $\overrightarrow{f}$ viene determinada por $\lambda\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \overrightarrow{f(P_1)f(P_2)} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ (en particular, P_1, P_2 deben generar una recta paralela a la generada por Q_1, Q_2). Ahora, f está determinada por $\overrightarrow{f}$ y por el Lema 3.8.2.

5. Todas las aplicaciones afines $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son de la forma $f(x) = Mx + b$, donde $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Como veremos más abajo, el resultado es fácilmente generalizable a la expresión de cualquier aplicacíón afín entre dos espacios afines de dimensión finita, en las coordenadas obtenidas fijando sistemas de referencia $(O; B)$ y $(O'; B')$ en A y A'.

6. *Proyecciones.* Decimos que A es *suma directa* de dos subespacios afines $S, T \subset A$ (denotado $A = S \oplus T$) si $V = \overrightarrow{A} \oplus \overrightarrow{T}$. Equivalentemente, $A = S + T$ y $S \cap T$ es un punto. Si $A = S \oplus T$, se define la *proyección de A sobre S paralela a $\overrightarrow{T}$* mediante

$$\Pi_S\colon A \to A, \quad \Pi_S(Q) = S \cap (Q + \overrightarrow{T})$$

(esta intersección se reduce aun punto porque $S \oplus (Q + \overrightarrow{T}) = A$). ¿Cuál es la aplicación lineal asociada a Π_S? Fijado $P \in S$, descomponemos $\overrightarrow{PQ} = \Pi_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{PQ}) + \Pi_{\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{PQ})$ (aquí $\Pi_{\overrightarrow{S}}$, $\Pi_{\overrightarrow{T}}$ son las correspondientes proyecciones lineales). Entonces,

$$P + \Pi_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{PQ}) = P + \left(\overrightarrow{PQ} - \Pi_{\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{PQ})\right) = \left(P + \overrightarrow{PQ}\right) - \Pi_{\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{PQ}) = Q - \Pi_{\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{PQ}).$$

Como $P + \Pi_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{PQ}) \in P + \overrightarrow{S} = S$ y $Q - \Pi_{\overrightarrow{T}}(\overrightarrow{PQ}) \in Q + \overrightarrow{T}$, concluímos que $\Pi_S(Q) = P + \Pi_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{PQ})$. O sea, la aplicación lineal asociada a Π_S es $\Pi_{\overrightarrow{S}}$.

Es fácil probar que;

- $\Pi_S \circ \Pi_S = \Pi_S$.
- Dado $Q \in A$ se tiene $\Pi_S(Q) = Q$ si y sólo si $Q \in S$.
- Una aplicación afín $f\colon A \to A$ es una proyección de A sobre algún subespacio afín si y sólo si $f \circ f = f$.

7. *Simetrías respecto a subespacios.* Si $A = S \oplus T$ (descomposición en subespacios afines), se define la *simetría de A respecto de S paralela a $\overrightarrow{T}$* mediante

$$\sigma_S\colon A \to A, \quad \Pi_S(Q) = Q + 2\overrightarrow{Q, \Pi_S(Q)}.$$

Dado $P \in S$,

$$\sigma_S(Q) = Q + 2\overrightarrow{Q, \Pi_S(Q)} = \left(P + \overrightarrow{PQ}\right) + 2\overrightarrow{Q, P + \Pi_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{PQ})}$$

$$= P + \overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{QP} + 2\Pi_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{PQ}) = P - \overrightarrow{PQ} + 2\Pi_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{PQ}) = P + \left(-1_V + 2\Pi_{\overrightarrow{S}}\right)(\overrightarrow{PQ})$$

$$= P + \left(\Pi_{\overrightarrow{S}} - \Pi_{\overrightarrow{T}}\right)(\overrightarrow{PQ}) = P + \sigma_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{PQ}),$$

de donde tenemos que la aplicación lineal asociada a σ_S es la simetría lineal $\sigma_{\overrightarrow{S}}$ de V respecto a $\overrightarrow{S}$ paralela a $\overrightarrow{T}$.

Es fácil probar que;

- $\sigma_S \circ \sigma_S = 1_A$.
- Dado $Q \in A$ se tiene $\sigma_S(Q) = Q$ si y sólo si $Q \in S$.
- Una aplicación afín $f\colon A \to A$ es una simetría respecto de algún subespacio afín si y sólo si $f \circ f = 1_A$.

8. *Simetrías centrales.* Un caso particular del tipo anterior es cuando tomamos $S = \{P\}$ y $T = A$, en cuyo caso $\sigma_S(Q) = P + \sigma_{\overrightarrow{S}}(\overrightarrow{PQ}) = P - \overrightarrow{PQ}$, llamada la *simetría central respecto a P.*

   - σ_P es una apllicación afín, son aplicación lineal asociada -1_V.
   - $\sigma_P \circ \sigma_P = 1_A$.
   - Dado $Q \in A$, se tiene $\sigma_P(Q) = Q$ si y sólo si $Q = P$.

Proposición 3.8.1 (Propiedades de las aplicaciones afines)

1. *La composición de aplicaciones afines es una aplicación afín, y la aplicación lineal asociada a la composición es la composición de las aplicaciones lineales asociadas.*

2. *Si $f, h\colon A \to A'$ son dos aplicaciones afines y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $af + bh\colon A \to A'$ es una aplicación afín, y $\overrightarrow{af + bh} = a\overrightarrow{f} + b\overrightarrow{h}$.*

3. *Si $f\colon A \to A'$ es una aplicación afín y $S \subset A$ es un subespacio afín, entonces $f(S)$ es un subespacio afín de A', con $\overrightarrow{f(S)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{S})$.*

4. *Si $f\colon A \to A'$ es una aplicación afín y $S' \subset A'$ es un subespacio afín, entonces $f^{-1}(S')$ es un subespacio afín de A, con $\overrightarrow{f^{-1}(S')} = (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{S'})$.*

5. *Si $f\colon A \to A'$ es una aplicación afín y $S, T \subset A$ son subespacios afines con S paralelo a T, entonces $f(S)$ es paralelo a $f(T)$.*

6. *Si $f\colon A \to A'$ es una aplicación afín y $P_0, \ldots, P_k \in A$, entonces el subespacio afín generado por $f(P_0), \ldots, f(P_k)$ coincide con la imagen por f del subespacio afín generado por $P_0, \ldots, P_k$.*

7. *Si $f\colon A \to A'$ es una aplicación afín y $P, Q, R \in A$ son tres puntos alineados, entonces $f(P), f(Q), f(R)$ están alineados.*

8. *Una aplicación afín es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva) si y sólo si su aplicación lineal asociada es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva).*

9. *Una aplicación afín es una traslación o una homotecia si y sólo si $\forall S \subset A$ subespacio afín, S y $f(S)$ son paralelos.*

3.8.1. Expresión matricial de una aplicación afín

Sean A y A' dos espacios afines de dimensiones finitas, con sistemas de referencias afines $R = (O; B) = (O; v_1, \ldots, v_n)$, $R' = (O'; B') = (O'; v'_1, \ldots, v'_m)$ respectivamente en A, A'. Dada una aplicación afín $f : A \to A'$, de la relación $f(X) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OX})$ $\forall X \in A$ se deduce, para las coordenadas x de X respecto de $(O; B)$ y x' de $f(X)$ respecto de (O', B') (consideradas por columnas):

$$x' = Mx + b,$$

donde b es la columna de las coordenadas de $f(O)$ en R' y M es la matriz de $\overrightarrow{f}$ en las bases B, B'. En forma más compacta, escribiremos (por cajas):

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con esta notación, la composición de aplicaciones afines se relaciona con el producto de matrices de manera natural, análoga a la de las aplicaciones lineales.

3.8.2. Afinidades y grupo afín

Definición 3.8.2 Sea $f\colon A \to A$ una aplicación afín de A en sí mismo. Un punto $P \in A$ se dice *fijo* por f si $f(P) = P$. Al conjunto de los puntos fijos de f se le denota por P_f (podría ser vacío).

Proposición 3.8.2 *Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ una aplicación afín. Entonces, son equivalentes:*

1. $P_f \neq \emptyset$.

2. $rango(A - I_n) = rango(A - I_n| - b)$.

Y si cualquiera de las condiciones anteriores se da, entonces P_f es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ con variedad de dirección $V_1(\overrightarrow{f}) = \{v \in V \mid \overrightarrow{f}(v) = v\}$ (entendemos que $V_1(\overrightarrow{f}) = \{0\}$ si 1 no es un autovalor de $\overrightarrow{f}$).

Demostración. $x \in P_f$ si y sólo si $Ax + b = x$, es decir, $(A - I_n)x = b$. El resto es consecuencia del teorema de Rouché-Frobenius. □

Definición 3.8.3 Sea $f\colon A \to A$ una aplicación afín de A en sí mismo. Un subespacio afín $S \subset A$ se dice *invariante* por f si $f(S) \subset S$.

Definición 3.8.4 Una *afinidad* es una aplicación afín biyectiva $f\colon A \to A$ (equivale a que $\overrightarrow{f}$ sea un automorfismo de V).

1. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$, es una afinidad si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

2. Las traslaciones y las homotecias son afinidades.

3. Las simetrías respecto a subespacios son afinidades, pero las proyecciones no.

Es inmediato comprobar que dado un espacio afín A sobre $\mathbb{K}$, sus afinidades forman un grupo con la composición. Y si $\dim A = n \in \mathbb{N}$, este grupo es isomorfo al de afinidades del espacio afín $\mathbb{K}^n$, llamado *grupo afín de dimensión n*, que a su vez es isomorfo a

$$Gl(n, \mathbb{K}) \rtimes \mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} M & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : M \in Gl(n, \mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n \right\}$$

con el producto de matrices (producto semidirecto de $Gl(n, \mathbb{K})$ y $\mathbb{K}^n$).

3.9. Espacio afín euclídeo

Definición 3.9.1 Sea A un espacio afín con espacio vectorial asociado V. Supongamos que en V tenemos una métrica euclídea g. Diremos entonces que (A, V, g) es un *espacio afín euclídeo.* A veces diremos simplemente que A es un espacio afín euclídeo, si se sobreentiende la métrica sobre V.

En un espacio afín euclídeo (A, V, g), se definen:

1. La *distancia* en A es la aplicación $d\colon A \times A \to [0, \infty)$ dada por $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$.

2. Dados $P \in A$ y S subespacio afín de A, la *distancia* de P a S es $d(P,S) = \inf\{d(P,Q) \mid Q \in S\}$.

3. Dados $S,T \subset A$ subespacios afines de A, la *distancia* de S a T es $d(P,S) = \inf\{d(P,Q) \mid P \in S, Q \in T\}$.

4. Dos subespacios afines S,T de A se dicen *ortogonales* ($S \perp T$) si lo son sus variedades de dirección, es decir $\overrightarrow{S} \subset (\overrightarrow{T})^{\perp}$. Dado un subespacio afín S de A y un punto $P \in A$, existe un único subespacio afín T tal que $P \in T$, $S \perp T$ y $\dim S + \dim T = \dim A$. A este subespacio afín T se le llama *suplemento ortogonal de S que pasa por P.*

5. Dado un subespacio afín S de A, la *proyección ortogonal* de A sobre S es la proyección Π_S paralela al subespacio $(\overrightarrow{S})^{\perp}$, y la *simetría ortogonal* de A respecto a S como la simetría σ_S paralela al subespacio $(\overrightarrow{S})^{\perp}$.

6. El *ángulo* (no orientado) que forman dos rectas afines $L, R \subset A$ es el ángulo que forman un vector director de L y un vector director de R.

7. El *segmento* de extremos $P,Q \in A$ es $\overline{PQ} = \{P + \lambda\overrightarrow{PQ} \mid \lambda \in [0,1]\}$. El *punto medio* de $\overline{PQ}$ es $M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$.

8. Tres puntos $P_1, P_2, P_3 \in A$ afínmente independientes forman un *triángulo* en A, con lados $\overline{P_iP_{i+1}}$, $i = 1,2,3$. Los elementos notables de un triángulo son:

   - *Mediatrices:* son las rectas perpendiculares a los lados que dividen a éstos en partes iguales. El *circuncentro* es el punto en el que se encuentran las tres mediatrices.
   - *Bisectrices:* son las rectas que dividen a los ángulos en partes iguales. Las bisectrices se encuentran en el *incentro.*
   - *Circunferencia circunscrita:* es la circunferencia que contiene a los tres vértices. Su centro es el *circuncentro* del triángulo.
   - *Circunferencia inscrita:* es la circunferencia tangente a los tres lados. Su centro es el *incentro* del triángulo.
   - *Bases:* son los segmentos que unen los puntos medios de los lados del triángulo.
   - *Medianas:* son los segmentos que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos. Las medianas se encuentran en el *baricentro.*
   - *Alturas:* son los segmentos perpendiculares a los lados (o a la prolongación de éstos) que tienen su otro extremo en el vértice opuesto. Las alturas se cortan en el *ortocentro.*

9. Cuatro puntos $P_1, P_2, P_3, P_4 \in A$ afínmente independientes forman un *cuadrilátero* en A. Un caso particular es el *paralelogramo,* cuando dos a dos los lados son paralelos. En cualquier paralelogramo, las longitudes de lados opuestos coinciden. Un *rectángulo* es un paralelogramo cuyos lados contiguos son perpendiculares. Un *cuadrado* es un rectángulo cuyos lados tienen todos la misma longitud.

Lema 3.9.1 *Si $P \in A$ y $S \subset A$ es un subespacio afín, entonces $d(P,S) = d(P, \Pi_S(P))$.*

Demostración. $\Pi_S(P) = S \cap \left(P + (\overrightarrow{S})^\perp\right)$, luego $d(P,S) \leq d(P, \Pi_S(P))$.

Sea $Q \in S$. Como $\overrightarrow{P, \Pi_S(P)} \in (\overrightarrow{S})^\perp$ y $\overrightarrow{\Pi_S(P), Q} \in \overrightarrow{S}$, tenemos $d(P,Q)^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{P, \Pi_S(P)} + \overrightarrow{\Pi_S(P), Q}\|^2 = \|\overrightarrow{P, \Pi_S(P)}\|^2 + \|\overrightarrow{\Pi_S(P), Q}\|^2 = d(P, \Pi_S(P))^2 + \|\overrightarrow{\Pi_S(P), Q}\|^2 \geq d(P, \Pi_S(P))^2$, de donde $d(P,Q) \geq d(P, \Pi_S(P))^2$. tomando ínfimos en $Q \in S$ se tiene $d(P,S) \geq d(P, \Pi_S(P))$. □

Definición 3.9.2 En un espacio afín euclídeo (A, V, g), un sistema de referencia *cartesiano* (u *ortonormal*) $\mathcal{R} = (O; P_1, \ldots, P_n)$ es un sistema de referencia afín tal que la base $\{\overrightarrow{OP}_1, \ldots, \overrightarrow{OP}_n\}$ es g-ortonormal. Las rectas $\langle O, P_i \rangle$ se denominan *ejes cartesianos*. Las coordenadas afines respecto de un sistema de referencia cartesiano se denominan *coordenadas cartesianas*.

3.10. Movimientos rígidos

Definición 3.10.1 Un *movimiento rígido* (o simplemente movimiento) de un espacio afín euclídeo (A, V, g) es una aplicación afín $f \colon A \to A$ cuya aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$ es una isometría de (V, g) en sí mismo. Esto es equivalente a que f conserve distancias. El movimiento se dice *directo* si $\overrightarrow{f}$ conserva la orientación, es decir, $\det(\overrightarrow{f}) = 1$. En otro caso, f se dice *inverso* ($\det(\overrightarrow{f}) = -1$).

1. Todo movimiento es una afinidad.

2. La composición de dos movimientos es otro movimiento, y la inversa también. Por tanto, los movimientos forman un grupo. Lo mismo ocurre con los movimientos directos, pero no con los inversos.

3. Una aplicación afín $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$, es un movimiento si y sólo si $A \in O(n)$.

4. Las traslaciones son movimientos directos. Las simetrías ortogonales son movimientos, y son directos si y sólo si la codimensión de subespacio de puntos fijos es par.

Como estudio preliminar, consideremos el caso de una recta afín euclídea $A \equiv \mathbb{R}$. Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un movimiento rígudo, entonces necesariamente $\overrightarrow{f} = \pm 1_{\mathbb{R}}$. Si el movimiento es directo, $\overrightarrow{f} = 1_{\mathbb{R}}$ luego f es una traslación a lo largo de un vector $v \in \mathbb{R}$ (que puede ser cero). Si f es un movimiento inverso, $\overrightarrow{f} = -1_{\mathbb{R}}$ y f es una simetría central cuyo centro O es el punto medio de cualquier punto y su imagen por f.

Teorema 3.10.1 (Movimientos del plano afín euclídeo)
Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un movimiento.

(A) *Si $P_f \neq \varnothing$, entonces se da una de las posibilidades:*

- **(A.1)** $f = 1_{\mathbb{R}^2}$ *(directo).*
- **(A.2)** f *es una simetría respecto a una recta (inverso).*
- **(A.3)** f *es un giro de ángulo no nulo alrededor de un punto (directo). Esto incluye el caso de simetría central, cuando el ángulo es π.*

(B) *Si $P_f = \varnothing$, entonces se da una de las posibilidades:*

- **(B.1)** f *es una traslación (directo).*
- **(B.2)** f *es una simetría deslizante (inverso).*

Demostración. Supongamos que f tiene algún punto fijo. Por la Proposición 3.8.2, P_f es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$ con variedad de dirección $V_1(\overrightarrow{f})$. Discutimos casos según su dimensión:

1. Si $\dim V_1(\overrightarrow{f}) = 2$, entonces $V_1(\overrightarrow{f}) = \mathbb{R}^2$, y $\overrightarrow{f} = 1_{\mathbb{R}^2}$. Como $P_f \neq \emptyset$, concluimos que $f = 1_{\mathbb{R}^2}$.

2. Si $\dim V_1(\overrightarrow{f}) = 1$, entonces $\overrightarrow{f}$ es una simetría respecto a una recta vectorial $\overrightarrow{L}$. Como $\exists P \in P_f$, tenemos que f es una simetría respecto a la recta afín $L = P + \overrightarrow{L}$.

3. Si $\dim V_1(\overrightarrow{f}) = 0$, entonces 1 no es valor propio de $\overrightarrow{f}$, luego $\overrightarrow{f}$ es un giro de ángulo no nulo (incluyendo el giro de ángulo π dado por $\overrightarrow{f} = -1_{\mathbb{R}^2}$). Como f tiene un punto fijo P. f es el giro del mismo ángulo respecto a P (en el caso de $\overrightarrow{f} = -1_{\mathbb{R}^2}$, f es la simetría central respecto a P).

Supongamos ahora que f no tiene puntos fijos. Llamando $f(x) = Ax + b$, la Proposición 3.8.2 nos dice que $\text{rango}(A - I_2) < \text{rango}(A - I_2 | -b)$, luego tenemos 2 opciones:

1. $\text{rango}(A - I_2) = 0$ y $\text{rango}(A - I_2 | -b) = 1$. Así, $A = I_2$ y como f no tiene puntos fijos, f es una traslación.

2. $\text{rango}(A-I_2)=1$ y $\text{rango}(A-I_2|-b)=2$. Así, 1 es valor propio de $\overrightarrow{f}$ pero $\overrightarrow{f}\neq 1_{\mathbb{R}^2}$. Por tanto, $\overrightarrow{f}$ es una simetría respecto a una recta vectorial $\overrightarrow{L}$, y existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ tal que $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ (el primer vector de la base está en $\overrightarrow{L}$ y el segundo en $(\overrightarrow{L})^{\perp}$).

   Veamos que existe $P\in\mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{P,f(P)}\in V_1(\overrightarrow{f})$ (lo que sigue es válido en cualquier dimensión, y lo usaremos en la demostración del Teorema 3.10.2): Como $f(x)=Ax+b$, entonces $\overrightarrow{P,f(P)}=AP+b-P$ luego $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{P,f(P)})=A(AP+b-P)=A^2P-AP+Ab$. Así, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{P,f(P)})=\overrightarrow{P,f(P)}$ si y sólo si $A^2P-AP+Ab=AP+b-P$, lo que equivale a $(A-I_n)^2P=-(A-I_n)b$. En resumen:

$$(\star)\quad \exists P\in\mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{P,f(P)}\in V_1(\overrightarrow{f}) \;\Leftrightarrow\; (A-I_n)^2P=-(A-I_n)b.$$

   Volvemos a dimensión 2. Tenemos $A-I_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $(A-I_2)^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $((A-I_2)^2|-(A-I_2)b)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 2b_2\end{pmatrix}$, luego se da la igualdad de rangos entre las dos últimas matrices. Por el Teorema de Rouché-Frobenius, existe $P\in\mathbb{R}^2$ tal que $(A-I_2)^2P=-(A-I_2)b$, luego por $(\star)$, $\overrightarrow{P,f(P)}\in V_1(\overrightarrow{f})$. Esto nos dice que si llamamos L a la recta generada por $\{P,f(P)\}$ (notemos que estos puntos son distintos porque f no tiene puntos fijos, y que la variedad de dirección de L es $V_1(\overrightarrow{f})$), entonces f se restringe a L como una traslación de vector $\overrightarrow{P,f(P)}$, y f es la composición de la traslación de vector $\overrightarrow{P,f(P)}$ con la simetría ortogonal respecto a L. Esto es lo que se llama una *simetría deslizante.* □

Teorema 3.10.2 (Movimientos del espacio afín euclídeo)
Sea $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un movimiento.

(A) *Si $P_f\neq\varnothing$, entonces se da una de las posibilidades:*

- **(A.1)** $f=1_{\mathbb{R}^3}$ *(directo).*
- **(A.2)** *f es una simetría respecto a un plano afín (inverso).*
- **(A.3)** *f es un giro de ángulo no nulo alrededor de una recta afín (directo).*
- **(A.4)** *f es una simetría central respecto a un punto (inverso).*
- **(A.5)** *f es la composición de un giro de ángulo no nulo alrededor de una recta afín con una simetría ortogonal a dicho plano (inverso).*

(B) *Si $P_f=\varnothing$, entonces se da una de las posibilidades:*

(B.1) *f es una traslación (directo).*

(B.2) *f es una simetría deslizante (inverso).*

(B.3) *f es un movimiento helicoidal (directo).*

Demostración. Supongamos que f tiene algún punto fijo. Por la Proposición 3.8.2, P_f es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$ con variedad de dirección $V_1(\overrightarrow{f})$. Discutimos casos según su dimensión:

1. Si $\dim V_1(\overrightarrow{f}) = 3$, entonces $V_1(\overrightarrow{f}) = \mathbb{R}^3$, y $\overrightarrow{f} = 1_{\mathbb{R}^3}$. Como $P_f \neq \emptyset$, concluimos que $f = 1_{\mathbb{R}^3}$.

2. Si $\dim V_1(\overrightarrow{f}) = 2$, entonces $\overrightarrow{f}$ es una simetría respecto a un plano vectorial $\overrightarrow{S}$. Como f tiene un punto fijo P, f será la simetría respecto al plano afín $P + \overrightarrow{S}$.

3. Si $\dim V_1(\overrightarrow{f}) = 1$, entonces $\overrightarrow{f}$ es un giro de ángulo no nulo alrededor de una recta vectorial $\overrightarrow{L}$. Como $\exists P \in P_f$, tenemos que f es un giro del mismo ángulo alrededor de la recta afín $P + \overrightarrow{L}$.

4. Si $\dim V_1(\overrightarrow{f}) = 0$, entonces 1 no es valor propio de $\overrightarrow{f}$, luego -1 es valor propio de $\overrightarrow{f}$. Esto implica que f conserva los subespacios $V_{-1}(\overrightarrow{f})$ y su suplemento ortogonal (porque $\overrightarrow{f}$ es isometría).

   - Si $\dim V_{-1}(\overrightarrow{f}) = 3$, entonces $\overrightarrow{f} = -1_{\mathbb{R}^3}$ y como f tiene un tiene un punto fijo P, entonces f es una simetría central respecto a P.
   - Si $\dim V_{-1}(\overrightarrow{f}) = 2$, entonces $[V_{-1}(\overrightarrow{f})]^{\perp}$ es un subespacio invariante por $\overrightarrow{f}$ y de dimensión 1, luego es un subespacio propio de $\overrightarrow{f}$. El valor propio asociado a $[V_{-1}(\overrightarrow{f})]^{\perp}$ no puede ser otro que 1, contradicción con que $\dim V_1(\overrightarrow{f}) = 0$.
   - Si $\dim V_{-1}(\overrightarrow{f}) = 1$, entonces $\overrightarrow{f}|_{[V_{-1}(\overrightarrow{f})]^{\perp}}$ es una isometría de un plano euclídeo sin valores propios, luego $\overrightarrow{f}|_{[V_{-1}(\overrightarrow{f})]^{\perp}}$ es un giro alrededor del origen con ángulo $\theta \neq 0, \pi$. Por tanto, $\overrightarrow{f}$ es la composición del giro de ángulo θ respecto de la recta vectorial $V_{-1}(\overrightarrow{f})$, con la simetría respecto al plano vectorial $[V_{-1}(\overrightarrow{f})]^{\perp}$. Como f tiene un punto fijo, f será la composición del giro de ángulo θ alrededor de la recta afín $L = P + V_{-1}(\overrightarrow{f})$ con la simetría respecto al plano afín $P + [V_{-1}(\overrightarrow{f})]^{\perp}$. Esto termina el caso de que f tenga algún punto fijo.

Supongamos ahora que f no tiene puntos fijos. Llamando $f(x) = Ax + b$, la Proposición 3.8.2 nos dice que $\text{rango}(A - I_3) < \text{rango}(A - I_3 | -b)$, luego tenemos 3 opciones:

1. rango$(A - I_3) = 0$ y rango$(A - I_3| - b) = 1$. Así, $A = I_3$ y como f no tiene puntos fijos, f es una traslación.

2. rango$(A - I_3) = 1$ y rango$(A - I_3| - b) = 2$. Así, 1 es un valor propio de $\overrightarrow{f}$ con multiplicidad 2, luego $\overrightarrow{f}$ es una simetría respecto al plano vectorial $V_1(\overrightarrow{f})$ (en particular, -1 es valor propio simple de $\overrightarrow{f}$). Tomemos una base ortonormal $\{x_1, x_2\}$ de $V_1(\overrightarrow{f})$ y un vector unitario x_3 de $[V_1(\overrightarrow{f})]^\perp$. Así, $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y la matriz de $\overrightarrow{f}$ respecto a B es $M(\overrightarrow{f}, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Cambiando a un sistema de referencia $(O; B)$ con $O \in \mathbb{R}^3$ arbitrario, podemos suponer $f(x) = Ax + b$ con $A = M(f, B)$, para algún $b \in \mathbb{R}^3$ (esto es un abuso de notación: en realidad x debería denotarse de forma distinta porque representa coordenadas respecto al sistema de referencia $(O; B)$ que no tiene porqué ser el usual, y tanto A como b no han de coincidir con las A, b anteriores, pero siguen verificando rango$(A - I_3) = 1$ y rango$(A - I_3| - b) = 2$, así que no cambiaremos la notación). Veamos que existe $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $\overrightarrow{P, f(P)} \in V_1(\overrightarrow{f})$: según vimos en $(\star)$ de la demostración del último teorema, esto equivale a que $(A - I_3)^2 P = -(A - I_3)b$. En nuestro caso, $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $((A - I_3)^2| - (A - I_3)b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2b_3 \end{pmatrix}$, luego se da la igualdad de rangos entre las dos últimas matrices. Por el Teorema de Rouché-Frobenius, existe $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - I_3)^2 P = -(A - I_3)b$, luego por lo anterior, $\overrightarrow{P, f(P)} \in V_1(\overrightarrow{f})$. Esto implica que f es una simetría respecto a un plano afín con variedad de dirección $V_1(\overrightarrow{f})$ seguida de una traslación de cierto vector no nulo en ese mismo plano vectorial $V_1(\overrightarrow{f})$ (simetría deslizante).

3. rango$(A - I_3) = 2$ y rango$(A - I_3| - b) = 3$. En este caso, 1 es un valor propio simple de $\overrightarrow{f}$, y $[V_1(\overrightarrow{f})]^\perp$ es un plano vectorial. La isometría $\overrightarrow{f}|_{[V_1(\overrightarrow{f})]^\perp}$ no tiene a 1 como valor propio, luego es un giro de ángulo $\theta \neq 0$ (podría ser $\theta = \pi$) respecto al origen. Por tanto, $\overrightarrow{f}$ es el giro de ángulo γ respecto al eje $V_1(\overrightarrow{f})$. Tomemos un vector unitario x_1 de $V_1(\overrightarrow{f})$ y una base ortonormal $\{x_2, x_3\}$ de $[V_1(\overrightarrow{f})]^\perp$. Así, $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y la matriz de $\overrightarrow{f}$ respecto a B es $M(\overrightarrow{f}, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Cambiando a un sistema de referencia $(O; B)$ con $O \in \mathbb{R}^3$ arbitrario, podemos suponer $f(x) = Ax + b$ con $A = M(f, B)$, para algún $b \in \mathbb{R}^3$

(con el mismo abuso de notación que en el caso anterior). Veamos que existe $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A-I_3)^2 P = -(A-I_3)b$ y de $(\star)$ deduciremos de nuevo que $\overrightarrow{P, f(P)} \in V_1(\overrightarrow{f})$.

$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix}$, $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, donde

$$\alpha = 1 - 2\cos\theta + \cos(2\theta), \quad \beta = 2(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta,$$

y $((A - I_3)^2 | - (A - I_3)b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & b_2(1 - \cos\theta) + b_3 \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\beta & \alpha & b_3(1 - \cos\theta) - b_2 \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$.

En particular, se da la igualdad de rangos entre las dos últimas matrices. Por el Teorema de Rouché-Frobenius, existe $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - I_3)^2 P = -(A - I_3)b$, luego $\overrightarrow{P, f(P)} \in V_1(\overrightarrow{f})$. Esto implica que f es un giro de ángulo θ alrededor de la recta afín $V_1(\overrightarrow{f})$ seguida de una traslación de cierto vector no nulo a lo largo de la misma recta afín (movimiento helicoidal). □

3.11. Cónicas y cuádricas

Definición 3.11.1 Sea (A, V, g) un espacio afín euclídeo n-dimensional y $(O; B)$ un sistema de referencia ortonormal (es decir, B es una base ortonormal de V). Una *hipercuádrica* de A es el conjunto $F^{-1}\{0\} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid F(X) = 0\}$, donde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un polinomio de segundo grado respecto de las coordenadas afines en $(O; B)$ de los puntos de A.

- Por ejemplo, en $\mathbb{R}^4$, el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\}$ es una hipercuádrica.
- Si $\dim A = 2$, se habla de *cónicas* y si $\dim A = 3$, se habla de *cuádricas*.
- La definición así dada es tan general que subconjuntos como el vacío ($x_1^2 + 1 = 0$) o el conjunto formado por un único punto cualquiera de A ($(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = 0$ en $\mathbb{R}^2$, para cualquier $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) caen el la definición de hipercuádrica. Estos y otros casos se considerarán como casos triviales o degenerados en las clasificaciones que se verán más adelante.

En general, el polinomio F que determina una hipercuádrica viene dado de la siguiente manera. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ son coordenadas cartesianas respecto a $(O; B)$, los términos en grado 2 del polinomio cuadrático F son del tipo $a_{ij}x_ix_j$ para ciertos coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i \leq j)$. Escribiendo para cada $i \leq j$

$$a_{ij}x_ix_j = \frac{a_{ij}}{2}x_ix_j + \frac{a_{ij}}{2}x_jx_i = m_{ij}x_ix_j + m_{ji}x_ix_j,$$

definimos una matriz simétrica $M = (m_{ij})_{i,j} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (con elementos $m_{ij} = a_{ij}/2$ si $i \leq j$) y la suma de los términos en grado 2 de $F(X)$ es $X^t M X$. Notemos que M no puede ser la matriz nula porque F es de grado dos. Análogamente, podemos escribir la suma de términos de grado 1 de $F(x)$ como $2b^t x$, para cierto $k \in \mathbb{R}^n$, y el término independiente de $F(x)$ como $f \in \mathbb{R}$, con lo que

$$F(X) = X^t M X + 2k^t X + f = (X^t \ 1)\widetilde{M}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } \widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & k \\ \hline k^t & f \end{array}\right). \tag{3.7}$$

A veces es útil un cambio de referencia ortonormal para simplificar la expresión de la hipercuádrica. Si cambiamos de sistema de referencia ortonormal de $(O; B)$ a $(O_1; B_1)$ mediante un movimiento rígido $X = f(Y) = QY + v$ con $Q \in O(n)$ y $v \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$F(X) = F(QY + v) = (QY + v)^t M(QY + v) + 2k^t(QY + v) + f$$

$$= Y^t(Q^t M Q)Y + Y^t Q^t M v + v^t M Q Y + v^t M v + 2k^t Q Y + 2k^t v + f$$

Escribiendo el segundo sumando como $Y^t Q^t M v = (Q^t M v)^t Y = v^t M Q Y$, nos queda

$$F(X) = Y^t(Q^t M Q)Y + 2\left(v^t M + k^t\right) QY + \left(v^t M v + 2k^t v + f\right). \tag{3.8}$$

a ecuación (3.8) nos dice que es aconsejable diagonalizar M por congruencias (siempre es posible), y resolver el sistema $v^t M + k^t = 0$ con incógnita v (no siempre es posible) para simplificar la ecuación de la hipercuádrica.

Definición 3.11.2 En la situación anterior, un punto de A con coordenadas $v \in \mathbb{R}^n$ respecto a $(O; B)$ se dice un *centro* de la hipercuádrica $F^{-1}(0)$ si es solución del sistema de ecuaciones lineales $v^t M + k^t = 0$, o equivalentemente, de $Mv = -k$.

Notemos que bajo el cambio de sistema de referencia anterior, el origen O $(X = 0)$ cambia al origen O' $(Y = 0)$, que tiene coordenadas $X = v$ respecto a $(O; B)$. Al cambiar de origen estamos eliminando los monomios de grado 1 en la ecuación de la hipercuádrica; mientras que al cambiar de la base ortonormal B a una base ortonormal B' de vectores propios de $Q^t M Q$ (es decir, al diagonalizar $Q^t M Q$ por congruencias) estamos eliminando los monomios de grado 2 de la ecuación de la hipercuádrica que no sean el cuadrado de una variable (los productos cruzados).

Definición 3.11.3 En la situación anterior, las direcciones de B' se llaman *ejes* de la hipercuádrica.

3.11.1. Cónicas

Sea $F^{-1}(0)$ una cónica en $\mathbb{R}^2$ dada por (3.7) con $n = 2$. Como M es simétrica, entonces es ortogonalmente diagonalizable: existe $Q \in O(2)$ tal que $Q^t M Q = D$, siendo $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ los valores propios de M (no necesariamente distintos). Recordemos que M no es nula, luego su rango es 1 ó 2.

Caso rango$(M) = 2$**:** El sistema $Mv = -k$ es de Cramer, luego hay un único centro $v \in \mathbb{R}^2$ de la cónica. Por tanto, (3.8) implica

$$F(X) = Y^t DY + (-v^t k + 2k^t v + f) = Y^t DY + (k^t v + f) := F_1(Y),$$

donde F_1 es el polinomio cuadrático que expresa la misma cónica respecto al sistema de referencia ortonormal $(O_1; B_1)$. Notemos que

$$F_1(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + f_1, \tag{3.9}$$

donde $f_1 = k^t v + f \in \mathbb{R}$.

1. Si $\det M > 0$, entonces λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo. Cambiando el signo en (3.9) podemos suponer $\lambda_1, \lambda_1 > 0$ y obtenemos los tres siguientes casos:

   a) Si $f_1 = 0$ la cónica se reduce al punto O_1.

   b) Si $f_1 > 0$, la cónica es el vacío(este caso se llama *elipse imaginaria*).

   c) Si $f_1 < 0$ la cónica es una *elipse* de semiejes $1/\sqrt{\lambda_1}$, $1/\sqrt{\lambda_2}$(incluye al caso de una circunferencia cuando $\lambda_1 = \lambda_2$).

2. Si $\det M < 0$ entonces λ_1 y λ_2 tienen signos distintos y se dan sólo dos casos:

   a) Si $f_1 = 0$, tenemos un *par de rectas secantes*. Podemos detectar este caso en el sistema de referencia original exactamente cuando rango$(\widetilde{M}) = 2$ (esto se deduce de las ecuaciones $Mv = -k$ y $f_1 = k^t v + f$, viendo en ambos casos $-v$ como los coeficientes de una combinación lineal de las dos primeras columnas de $\widetilde{M}$ para producir la tercera columna de $\widetilde{M}$).

   b) Si $c_1 \neq 0$, entonces la cónica es una *hipérbola*. Podemos detectar este caso en el sistema de referencia original exactamente cuando rango$(\widetilde{M}) = 3$.

Caso rango$(M) = 1$**:** Uno de los valores propios de M ha de ser cero, digamos $\lambda_2 = 0$. Teníamos de (3.8)

$$F_1(Y) = Y^t DY + 2\left(v^t M + k^t\right) QY + \left(v^t M v + 2k^t v + f\right) = \lambda_1 y_1^2 + 2(k')^t Y + f_1, \tag{3.10}$$

donde $k' = Q^t(Mv + k)$ y $f_1 = v^t Mv + 2k^t v + f$. En este caso no podemos asegurar que exista un centro de la cónica (existirá si y sólo si el sistema de ecuaciones lineales $Mv = -k$ tiene solución, es decir, cuando $\text{rango}(M) = \text{rango}(M|k)$). Así que del sistema de referencia ortonormal $(O; B)$ sólo tenemos asegurado el cambio de base ortonormal pero no de origen, a $(O; B_1)$. Desarrollando un poco más (3.10) obtenemos el polinomio cuadrático $F_1(Y) = \lambda_1 y_1^2 + 2k_1' y_1 + 2k_2' y_2 + f_1$, para ciertos $k_1', k_2' \in \mathbb{R}$.

1. Si $k_2' \neq 0$, la cónica es una *parábola* (porque y_2 es función cuadrática de y_1).

2. Si $k_2' = 0$, la ecuación degenera en una ecuación de una sóla variable

$$F_1(Y) = \lambda_1 y_1^2 + 2k_1' y_1 + f_1, \tag{3.11}$$

   luego

   (a) Si (3.11) no tiene soluciones, la cónica es el vacío.

   (b) Si (3.11) tiene una solución doble $y_1 = cte$, la cónica es una *recta doble*.

   (c) Si (3.11) tiene dos soluciones distintas $y_1 = cte$, $y_1 = cte'$, la cónica es un *par de rectas paralelas*.

Deducimos entonces la clasificación de las cónicas en $\mathbb{R}^2$:

Teorema 3.11.1 *Toda cónica $F^{-1}(0) \neq \varnothing$ en $\mathbb{R}^2$ es de uno de los siguientes tipos:*

1. *Un punto.*

2. *Una elipse (o una circunferencia, cuando los semiejes coincidan).*

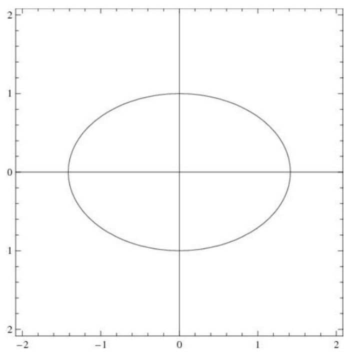
3. *Un par de rectas secantes.*

4. *Una hipérbola.*

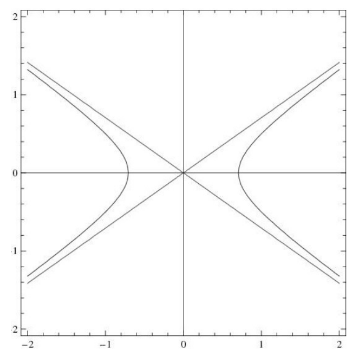
5. *Una parábola.*

6. *Una recta doble.*

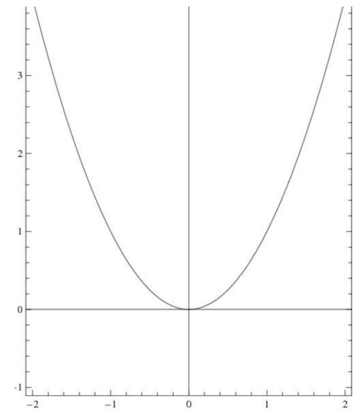
7. *Un par de rectas paralelas.*



Elipse
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Hipérbola
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$



Parábola
$y = ax^2$

Como adelantábamos, si estamos interesados en clasificar una cónica (3.7) pero sin diagonalizar la matriz de coeficientes de los términos de grado 2, es posible hacer una discusión directa. Seguimos usando la notación anterior.

Teorema 3.11.2 *Sea $F(X) = 0$ una cónica en $\mathbb{R}^2$ dada por (3.7). Entonces:*

1. *Si* $\det \widetilde{M} \neq 0$ *y* $\det M = 0 \Rightarrow$ *la cónica es una parábola.*
2. *Si* $\det \widetilde{M} \neq 0$ *y* $\det M < 0 \Rightarrow$ *la cónica es una hipérbola.*
3. *Si* $\det \widetilde{M} \neq 0$ *y* $\det M > 0$ *entonces hay dos opciones:*
   a) $m_{11} \det M < 0 \Rightarrow$ *la cónica es una elipse (o circunferencia).*
   b) $m_{11} \det M > 0 \Rightarrow$ *la cónica es el conjunto vacío (elipse imaginaria).*
4. *Si* $\det \widetilde{M} = 0 \Rightarrow F(X) = 0$ *consiste en dos rectas, un único punto o el conjunto vacío.*

Demostración. Supongamos que $\det \widetilde{M} \neq 0$ y que $\det M = 0$. Por tanto, M tiene rango 1. Como $\det \widetilde{M} \neq 0$, las tres filas de $\widetilde{M}$ son linealmente independientes, en particular sus dos primeras filas, $(M|k)$, lo son. Esto nos dice que el rango de la matriz ampliada $(M| - k)$ del sistema de ecuaciones lineales $Mv = -k$, es dos. Como M y $(M| - k)$ tienen distintos rangos, el sistema $Mv = -k$ no tiene solución (es decir, no hay centro). Esto sólo ocurre en el caso de una parábola, lo que prueba el apartado 1.

Supongamos ahora que $\det M \neq 0$. Por tanto, existe $v \in \mathbb{R}^2$ solución de $Mv = -k$ luego podemos cambiar de origen O a $O' = v$ para transformar la ecuación $F(X) = 0$

en otra $F_1(Y) = 0$ cuya matriz asociada es $\widetilde{M}' = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & F(v) \end{array}\right)$. Notemos que $F(v) = v^t M v + 2k^t v + f = k^t v + f$, y por tanto
(3.12)

$$\det \widetilde{M} = \det \left(\begin{array}{c|c} M & k \\ \hline k^t & f \end{array}\right) \overset{(\star)}{=} \det \left(\begin{array}{c|c} M & k + Mv \\ \hline k^t & f + k^t v \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline k^t & F(v) \end{array}\right) = F(v) \det M,$$

donde en $(\star)$ hemos sumado a la tercera columna una combinación lineal de las dos primeras columnas con coeficientes respectivos las componentes de k. Ahora, (3.12) implica:

- Si $\det \widetilde{M} \neq 0$ y $\det M < 0 \Rightarrow$ los valores propios de M tienen signos distintos y $F(v) \neq 0$. En este caso, la cónica es una hipérbola. Esto prueba el apartado 2.

- Si $\det \widetilde{M} \neq 0$ y $\det M > 0$, nos fijamos en el signo de $m_{11} \det \widetilde{M}$ (notemos que $m_{11} \det \widetilde{M} \neq 0$, porque en caso contrario $m_{11} = 0$ luego $\det M \leq 0$, contradicción) para probar el apartado 3:

  - En el caso de que $m_{11} \det \widetilde{M} < 0$, cambiando $F_1(Y) = 0$ por $-F_1(Y) = 0$ podemos suponer $m_{11} > 0$, y por tanto, $\det \widetilde{M} < 0$. Esto y (3.12) nos dicen que $F(v) < 0$. Por otro lado, los valores propios de M son ambos positivos (tienen el mismo signo porque $\det M > 0$, y el valor propio $\lambda_1 = \frac{1}{2}[(m_{11} + m_{22}) + \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2}]$ es positivo porque $m_{22} > 0$, ya que en caso contrario $\det M = m_{11}m_{22} - m_{12}^2 \leq m_{11}m_{22} \leq 0$, contradicción). En este caso, la cónica es una elipse (o una circunferencia, exactamente cuando los semiejes sean iguales, lo que equivale a que M es un múltiplo de I_2).
  - Si por el contrario $m_{11} \det \widetilde{M} > 0$, de nuevo cambiando $F_1(Y) = 0$ por $-F_1(Y) = 0$ podemos suponer $m_{11} > 0$, y por tanto, $\det \widetilde{M} > 0$. Esto y (3.12) nos dicen que $F(v) > 0$. Como los valores propios de M son ambos positivos por el mismo razonamiento de antes, este caso produce una *elipse imaginaria.*

Finalmente probamos el apartado 4. Si $\det \widetilde{M} = 0$, tenemos tres opciones:

- Si $\det M \neq 0$, entonces existe el centro y podemos aplicar el razonamiento del párrafo segundo de esta demostración. Por tanto, (3.12) nos dice que $F(v) = 0$ luego la cónica se reduce a un punto o a un par de rectas secantes.

- Si $\det M = 0$ pero hay centro ($r(M) = r(M|k) = 1$), también podemos aplicar el razonamiento del párrafo segundo de esta demostración y reducir el estudio de la cónica original a la cónica trasladada $Y^t A Y + F(v) = 0$. En este caso, la cónica es un par de rectas paralelas, una recta doble o una recta doble imaginaria.

- Si no hay centro ($1 = r(M) < r(M|k) = 2$), la cónica es una parábola. Pero esto es imposible, ya que la matriz canónica de una parábola $y = ax^2$ es del tipo $\left(\begin{array}{cc|c} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ \hline 0 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$, que tiene $\det \widetilde{M} \neq 0$, contradicción. $\square$

3.11.2. Cuádricas

Sea $F^{-1}(0)$ una cuádrica en $\mathbb{R}^3$ dada por (3.7) con $n = 3$. Como M es simétrica, entonces es ortogonalmente diagonalizable: existe $Q \in O(3)$ tal que $Q^t M Q = D$, siendo D la matriz diagonal de orden 3 con entradas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ en la diagonal. Como M no es nula, su rango es 1, 2 ó 3.

Caso rango$(M) = 3$**:** Podemos resolver de forma única $Mv = -k$, luego la cuádrica tiene un único centro $v \in \mathbb{R}^3$. Por tanto, al igual que ocurría en el caso de las cónicas, (3.8) implica

$$F(X) = Y^t DY + (-v^t k + 2k^t v + f) = Y^t DY + (k^t v + f) := F_1(Y),$$

donde F_1 es el polinomio cuadrático que expresa la misma cuádrica respecto al sistema de referencia ortonormal $(O_1; B_1)$. Ahora,

$$F_1(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + f_1, \tag{3.13}$$

donde $f_1 = k^t v + f \in \mathbb{R}$.

1. Si los tres valores propios de M tienen el mismo signo (podemos suponer $\lambda_i > 0 \ \forall i$), entonces la cuádrica es el vacío (si $c_1 > 0$), un punto (si $c_1 = 0$) o un *elipsoide* (si $c_1 < 0$) de semiejes $1/\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2, 3$. Los elipsoides que tienen dos semiejes iguales se llaman *esferoides,* y un caso particular de éstos son las *esferas,* cuando los tres semiejes son iguales.

2. Si hay valores propios de M con distinto signo, caben dos casos:

   a) Si $f_1 = 0$, la cuádrica es un *cono.* Este cono es *circular* cuando los dos valores propios de M del mismo signo sean iguales; en otro caso, el corte de cada plano $\{y_3 = cte\}$ con el cono es una elipse no circular; aquí estamos suponiendo $\lambda_1\lambda_2 > 0$).

   b) Si $f_1 \neq 0$, la cuádrica se llama *hiperboloide.* Hay hiperboloides de dos tipos:

      - *Hiperboloide elíptico o de dos hojas,* cuando la cuádrica no corta al plano $\{y_3 = 0\}$ (de nuevo estamos suponiendo que λ_3 es de signo distinto a λ_1, λ_2).

- *Hiperboloide hiperbólico o de una hoja.* Siguiendo la normalización anterior, este caso se da cuando la cuádrica corta al plano afín $\{y_3 = 0\}$. Esta cuádrica es reglada: por cada punto pasan dos rectas contenidas en la cuádrica.

En ambos casos, el corte del hiperboloide con planos del tipo $\{y_3 = cte\}$, si es no vacío, puede ser una circunferencia (cuando $\lambda_1 = \lambda_2$) o una elipse.

Caso rango$(M) = 2$**:** Podemos suponer $\lambda_3 = 0$. Teníamos de (3.8)

$$F_1(Y) = Y^tDY + 2\left(v^tM + k^t\right)QY + \left(v^tMv + 2k^tv + f\right) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2(k')^tY + f_1, \tag{3.14}$$

donde $k' = Q^t(Mv+k)$ y $f_1 = v^tMv+2k^tv+f$. No podemos asegurar que exista un centro de la cuádrica (existirá si la ecuación $Mv = -k$ tiene solución, es decir, si rango$(M) =$ rango$(M|k)$). Así que del sistema de referencia ortonormal $(O; B)$ sólo cambiamos la base ortonormal, a $(O; B_1)$. Desarrollando (3.14) obtenemos

$$F_1(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2k_1'y_1 + 2k_2'y_2 + 2k_3'y_3 + f_1,$$

para ciertos $k_1', k_2', k_3' \in \mathbb{R}$. Cambiando de nuevo el sistema de referencia ortonormal mediante el movimiento rígido $Y = Z + w$ con $w = (w_1, w_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ (o sea, no estamos cambiando la base ortonormal sino sólo trasladando el origen del sistema de referencia), y eligiendo $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ de forma que $\lambda_i w_i + k_i' = 0$ $\forall i = 1, 2$, es fácil llegar a

$$F_1(Y) = F_1(Z + w) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2k_3'z_3 + f_2,$$

para cierto $f_2 \in \mathbb{R}$.

1. Si $k_3' \neq 0$, la cuádrica es un *paraboloide*, que puede ser *elíptico* si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ o *hiperbólico* si $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

2. Si $k_3' = 0$, la variable z_3 no aparece en la ecuación. Por tanto, la cuádrica es el producto cartesiano de la recta real en la dirección de z_3 con una cónica en el plano $\mathbb{R}^2 \equiv \{z_3 = 0\}$). Clasificamos esta cónica olvidándonos momentáneamente de la tercera variable z_3. Como $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, esta cónica es de rango máximo (rango 2 en la clasificación de las cónicas), luego o bien la cónica es un punto (y la cuádrica es una *recta doble*) o es una elipse (y la cuádrica es un cilindro sobre dicha elipse, es decir un *cilindro con base elíptica*[3]), o la cónica es un par de rectas secantes (luego la cuádrica es un *par de planos que se cortan*), o una hipérbola (y la cuádrica es un *cilindro con base hiperbólica*).

[3]Los cilindros cuya base es una circunferencia se llaman *cilindros circulares*, y corresponden al caso $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.

Caso rango$(M) = 1$**:** El argumento es muy parecido al caso anterior. Ahora sólo el primer valor propio es distinto de cero (salvo reordenación). Teníamos de (3.8)

$$F_1(Y) = Y^t DY + 2\left(v^t M + k^t\right) QY + \left(v^t Mv + 2k^t v + f\right) = \lambda_1 y_1^2 + 2(k')^t y + f_1, \tag{3.15}$$

donde $D = Q^t MQ$ es la matriz diagonal con entradas $\lambda_1, 0, 0$, $k' = Q^t(Mv + k)$ y $f_1 = v^t Mv + 2k^t v + f$. Desarrollando (3.15) obtenemos

$$F_1(Y) = \lambda_1 y_1^2 + 2k_1' y_1 + 2k_2' y_2 + 2k_3' y_3 + f_1,$$

para ciertos $k_1', k_2', k_3' \in \mathbb{R}$. Cambiando el sistema de referencia ortonormal mediante el movimiento rígido $Y = Z + w$ con $w = (w_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ con w_1 solución de $\lambda_1 w_1 + k_1' = 0$, se llega a

$$F_1(Y) = F_1(Z + w) = \lambda_1 z_1^2 + 2k_2' z_2 + 2k_3' z_3 + f_2,$$

para cierto $f_2 \in \mathbb{R}$.

1. Si $(k_2', k_3') \neq (0, 0)$, giramos el sistema de referencia (sin mover el origen) en en plano $\{z_1 = 0\}$ para anular k_2' ó k_3', con lo que el otro de estos dos coeficientes será no nulo. Es decir, tras ese giro $(u_2, u_3) \mapsto (z_2, z_3)$ en el plano afín $\{z_1 = 0\}$ llegamos a

   $$F_2(U) = \lambda_1 u_1^2 + k_2'' u_2 + f_2 = 0$$

   para cierto $k_2'' \in \mathbb{R} - \{0\}$. Como u_3 no aparece en la última expresión, la cuádrica es el producto cartesiano de la recta real en la dirección de u_3 con una cónica en $\mathbb{R}^2 \equiv \{u_3 = 0\}$). Esta cónica es una parábola, con lo que la cuádrica es un *cilindro parabólico.*

2. Si $(k_2', k_3') = (0, 0)$, la ecuación es $\lambda_1 z_1^2 + f_2 = 0$. Resolviendo la ecuación en z_1 tendremos dos soluciones, una o ninguna, que se corresponden con que la cuádrica consista en *dos planos paralelos* $\{z_1 = \pm\, cte\}$, un *plano doble* $\{z_1 = 0\}$ o el vacío.

Terminamos con la clasificación de las cuádricas en $\mathbb{R}^3$:

Teorema 3.11.3 *Una cuádrica $F^{-1}(0) \neq \varnothing$ en $\mathbb{R}^3$ es de uno de los siguientes tipos:*

1. *Un punto.*
2. *Una elipsoide (o esferoide o esfera como casos particulares).*
3. *Un cono (sobre una elipse o circular).*
4. *Un hiperboloide elíptico de dos hojas (sobre una elipse o circular).*
5. *Un hiperboloide hiperbólico de una hoja (sobre una elipse o circular).*

6. *Un paraboloide elíptico.*

7. *Un paraboloide hiperbólico.*

8. *Una recta doble.*

9. *Un cilindro sobre una elipse (o sobre una circunferencia).*

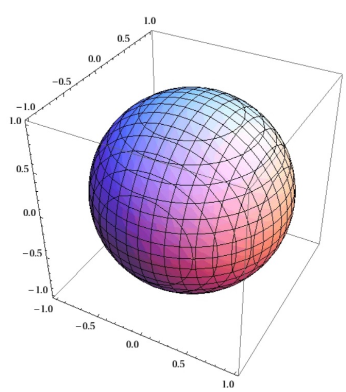
10. *Un par de planos secantes.*

11. *Un cilindro sobre una hipérbola.*

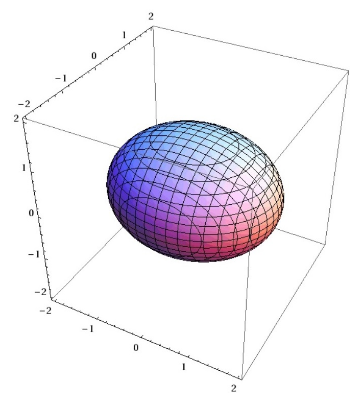
12. *Un cilindro sobre una parábola.*

13. *Dos planos paralelos.*

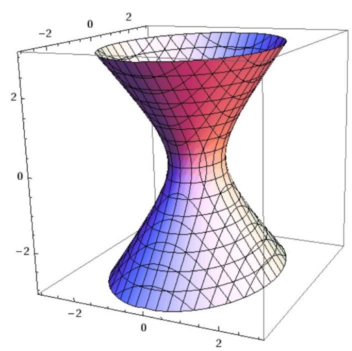
14. *Un plano doble.*



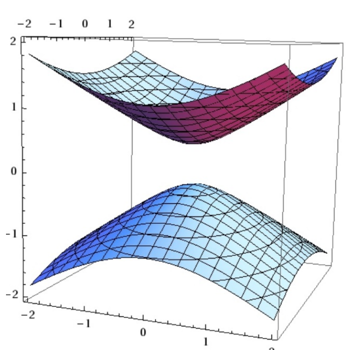
Esfera
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



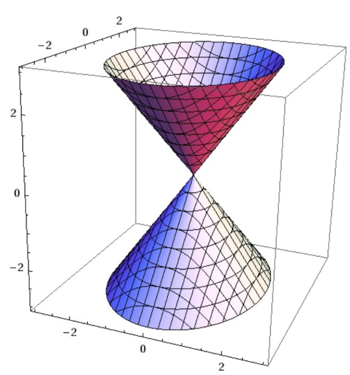
Elipsoide
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



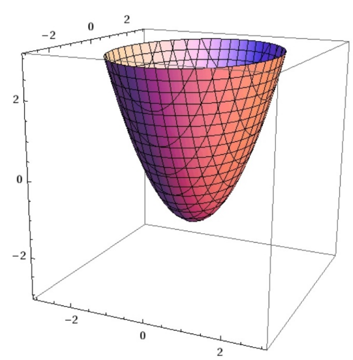
Hiperboloide de 1 hoja
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



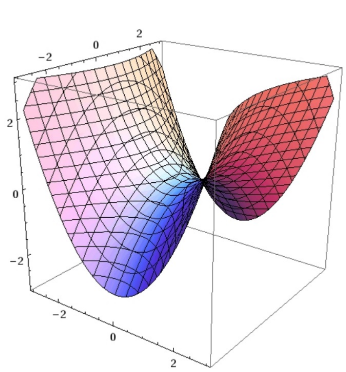
Hiperboloide de 2 hojas
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



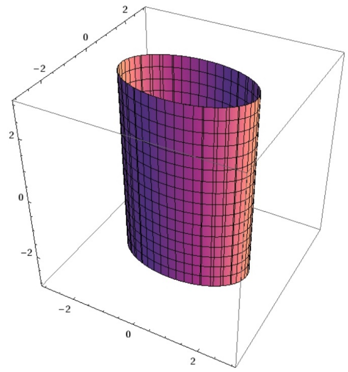
Cono
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



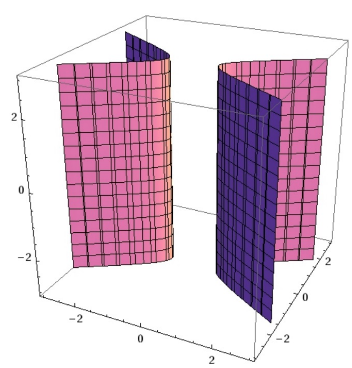
Paraboloide elíptico
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



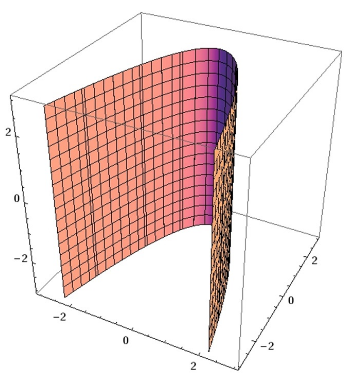
Paraboloide hiperbólico
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$



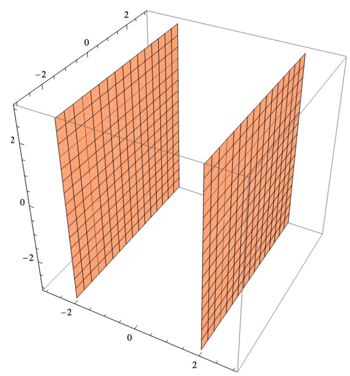
Cilindro elíptico
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



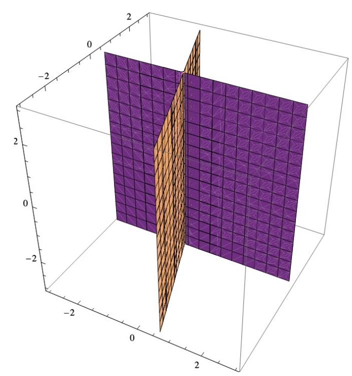
Cilindro hiperbólico
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Cilindro parabólico
$y = ax^2$



Par de planos paralelos
$ax^2 + b = 0$



Par de planos secantes
$(3x + y + 1)(2y - 1) = 0$

Al igual que ocurría para cónicas, existe un criterio para clasificar cuádricas en forma general (sin diagonalizar la matriz de coeficientes de grado dos); seguimos usando la notación en (3.7). Para el siguiente teorema nos hará falta algo de notación;dada una matriz $M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, su polinomio característico viene dado por

$$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \mathrm{Tr}(M)\lambda^2 - J(M)\lambda + \det M = 0, \tag{3.16}$$

donde

$$J(M) = \det\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.11.4 *Sea $F(X) = 0$ una cuádrica en $\mathbb{R}^3$ dada por (3.7). Entonces:*

1. *Supongamos que* $\det M \neq 0$. *Asociamos a* M *los siguientes cuatro invariantes:* $\mathrm{Traza}(M)$, $\det M$, $J(M)$ *y* $\sigma(M)$ *(la* signatura *de* M*), definida como*

$$\sigma(M) = |P - V|,$$

donde P *es el número de permanencias de signo en la lista*[4] $(\det M, J(M), \mathrm{Traza}(M), 1)$ *y* V *es el número de cambios de signo en la misma lista.*

   a*) Si* $\sigma(M) = 3$, *hay tres casos según el signo de* $\det \widetilde{M}$*:*

      1) Si $\det \widetilde{M} < 0$, *la cuádrica representa un elipsoide.*

      2) Si $\det \widetilde{M} = 0$, *la cuádrica se reduce a un punto.*

      3) Si $\det \widetilde{M} > 0$, *la cuádrica es un elipsoide imaginario (conjunto vacío en* $\mathbb{R}^3$*).*

   b*) Si* $\sigma(M) = 1$, *hay otros tres casos:*

      1) Si $\det \widetilde{M} < 0$, *la cuádrica es un hiperboloide de 2 hojas.*

      2) Si $\det \widetilde{M} = 0$, *la cuádrica es un cono.*

      3) Si $\det \widetilde{M} < 0$, *la cuádrica es un hiperboloide de 1 hoja.*

2. *Supongamos que* $\det M = 0$ *y* $\det \widetilde{M} \neq 0$.

   a*) Si* $J(M) > 0$, *entonces la cuádrica es un paraboloide elíptico. Este caso también se caracteriza porque* $r(M) = 2$, $r(M|k) = 3$ *y* $\det \widetilde{M} < 0$.

   b*) Si* $J(M) < 0$, *entonces la cuádrica es un paraboloide hiperbólico. Este caso también se caracteriza porque* $r(M) = 2$, $r(M|k) = 3$ *y* $\det \widetilde{M} > 0$.

3. *Supongamos que* $\det M = 0 = \det \widetilde{M}$. *En este caso, definimos:*

$$J(\widetilde{M}) = \det \begin{pmatrix} m_{11} & k_1 \\ k_1 & f \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} m_{22} & k_2 \\ k_2 & f \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} m_{33} & k_3 \\ k_3 & f \end{pmatrix}, \quad K(\widetilde{M}) = \sum_{i=1}^{3} \det A_{ii},$$

donde A_{ii} *es la matriz adjunta de* m_{ii} *en* $\widetilde{M}$.

   a*) Si* $J(M) > 0$, *entonces tenemos tres casos:*

      1) Si $K(\widetilde{M}) \neq 0$ *y* $K(\widetilde{M})\mathrm{Traza}(M) < 0$, *la cuádrica es un cilindro sobre una elipse.*

[4] Comparar con los coeficientes del polinomio característico de M, ver (3.16). $\sigma(M)$ coincide con el módulo de la diferencia de valores propios positivos y negativos de M, luego $\sigma(M)$ sólo puede tomar los valores 1 y 3.

2) *Si* $K(\widetilde{M}) \neq 0$ *y* $K(\widetilde{M})\mathrm{Traza}(M) > 0$*, la cuádrica es un cilindro sobre una elipse imaginaria (vacío en* $\mathbb{R}^3$*).*

3) *Si* $K(\widetilde{M}) = 0$*, la cuádrica es un cilindro sobre un punto (recta en* $\mathbb{R}^3$*). Este caso también se caracteriza por tener* $r(M) = r(M|k) = r(\widetilde{M}) = 2$ *y* $p'_M(0) < 0$ *(recordemos que* $p_M(\lambda)$ *es el polinomio característico de* M*).*

b*) Si* $J(M) < 0$*, tenemos dos casos:*

1) *Si* $K(\widetilde{M}) \neq 0$*, la cuádrica es un cilindro sobre una hipérbola. Este caso se caracteriza por tener* $r(M) = r(M|k) = 2$*,* $r(\widetilde{M}) = 3$ *y* $p'_M(0) > 0$*.*

2) *Si* $K(\widetilde{M}) = 0$*, la cuádrica consiste en dos planos secantes. Este caso también se caracteriza por tener* $r(M) = r(M|k) = r(M) = 2$ *y* $p'_M(0) > 0$*.*

c*) Finalmente, si* $J(M) = 0$*, tenemos cuatro casos:*

1) *Si* $K(\widetilde{M}) \neq 0$*, la cuádrica es un cilindro sobre una parábola. Este caso también se caracteriza porque* $r(M) = 1$ *y* $r(M|k) = 2$*.*

2) *Si* $K(\widetilde{M}) = 0$ *y* $J(M) < 0$*, la cuádrica consiste en un par de planos paralelos. Este caso también se caracteriza por tener* $r(M) = r(M|k) = 1$*,* $r(\widetilde{M}) = 2$ *y* $p''_{\widetilde{M}}(0) < 0$*, donde* $p_{\widetilde{M}}(\lambda)$ *es el polinomio característico de* $\widetilde{M}$*.*

3) *Si* $K(\widetilde{M}) = J(M) = 0$*, la cuádrica es un plano doble. Este caso también se caracteriza por tener* $r(M) = r(M|k) = r(\widetilde{M}) = 1$*.*

4) *Si* $K(\widetilde{M}) = 0$ *y* $J(M) > 0$*, la cuádrica representa dos planos paralelos imaginarios (vacío en* $\mathbb{R}^3$*). Este caso también se caracteriza por tener* $r(M) = r(M|k) = 1$*,* $r(\widetilde{M}) = 2$ *y* $p''_{\widetilde{M}}(0) > 0$*.*

3.12. Ejercicios.

1. Determinar el subespaio afín de $\mathbb{R}^3$ generado por los puntos $P_0 = (1,1,1), P_1 = (2,1,0), P_2 = (1,-1,0)$ y $P_3 = (2,1,1)$. Calcular su dimensión.

2. Determinar el menor subespacio afín de $\mathbb{R}^3$ que contiene a las rectas $S = (1,1,1) + L(\{(1,1,1)\})$ y $T = (0,1,1) + L(\{(0,0,1)\})$.

3. Se consideran los puntos $P_0 = (1,0,0,0)$, $P_1 = (0,1,0,0)$, $P_2 = (0,0,1,0)$, $P_3 = (0,0,0,1)$.

   (a) Probar que estos puntos son afínmente independientes.

   (b) Dado el punto $Q = (0,a,a,1)$ donde $a \in \mathbb{R}$, hallar los valores de a para los que $Q \in < \{P_0, P_1, P_2, P_3\} >$.

4. Se considera el plano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 2\}$ y las rectas $L_1 =< \{P_0, P_1\} >$, $L_2 =< \{P_1, P_2\} >$ con $P_0 = (1,0,1), P_1 = (0,0,0), P_2 = (0,1,-1)$.

   (a) Hallar, si es posible, una recta $< \{P, Q\} >$ con $P \in L_1$ y $Q \in L_2$ que sea paralela al plano S.

   (b) Hallar una recta paralela a $< \{P, Q\} >$ contenida en S.

5. Se considera el plano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 2\}$ y los puntos $P_0 = (1,0,2)$, $P_1 = (0,0,-1)$, $P_2 = (\lambda, 1, -1)$, donde λ es un parámetro real.

   (a) Hallar los valores de λ para los cuales estos tres puntos son afínmente independientes.

   (b) Estudiar si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el plano generado por P_0, P_1, P_2 sea paralelo a S.

6. Probar que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 + \lambda,\ y = -1 - \lambda + \mu,\ z = 2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$. Calcular su dimensión y ecuaciones cartesianas respecto del sistema de referencia usual.

7. Hallar un conjunto de puntos afínmente independientes que generen cada uno de los siguientes subespacios:

   (a) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = -2\}$.

   (b) $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = -2\}$.

   (c) $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = -2, y - 2z = -2\}$.

   (d) $L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = -2, y - 2z = -1\}$.

   (e) $L = P + U \subset \mathbb{R}^4$ donde $P = (1,0,0,0)$ y $U = L(\{(1,0,0,0)\})$.

8. Sea S un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$. Estudiar bajo qué condiciones se tiene $S + S = S$.

9. Sean S y T dos subespacios afines de $\mathbb{R}^n$ tales que $S+T=S$. ¿Es cierto que $T\subset S$? En caso contrario, dar un contraejemplo.

10. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios afines $S=<\{P_0,P_1,P_2,P_3\}>$, $T=Q+U$, donde

$$P_0=(0,1,1,1), P_1=(-1,0,0,1), P_2=(0,0,0,0), P_3=(-2,0,0,2), Q=(0,0,1,0),$$

$$U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid y-z=0, x-2t=0\}.$$

Hallar las dimensiones de $S\cap T$, $S+T$ y sus ecuaciones cartesianas.

11. Hallar las ecuaciones cartesianas del subespacio $L=P+U\subset\mathbb{R}^3$, donde $P=(1,0,-1)$, $U=<(1,0,1)>$ respecto del sistema de referencia afín $((1,0,-1);B=\{(1,1,1),$ $(1,1,0)$,$(1,0,0)\})$.

12. Hallar las ecuaciones del plano paralelo a $S=<\{P_0,P_1,P_2\}>$ que pasa por $(1,1,1)$, donde $P_0=(1,0,1)$, $P_1=(0,0,0)$, $P_2=(0,0,-1)$.

13. Hallar las ecuaciones cartesianas de la intersección y suma de los subespacios afines de $\mathbb{R}^4$ $S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-2y=1,\ y-2z=-1\}$, $T=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y-z-t=1,\ x-3y=2,\ z-2t=0\}$.

14. Hallar las ecuaciones del cambio de coordenadas afines de los siguientes sistemas de referencia afín de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{R}_1=((1,0,0);B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}),$$
$$\mathcal{R}_2=((1,0,1);B'=\{(0,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}).$$

Calcular las ecuaciones cartesianas en ambos sistemas de referencia del subespacio $S=<P_0,P_1>$ donde $P_0=(1,0,0)$, $P_1=(1,0,1)$.

15. Se considera la recta $L=<P,Q>$, donde $P=(1,1,1)$, $Q=(0,1,1)$.

    (a) Hallar las ecuaciones cartesianas de L respecto del sistema de referencia afín $((1,0,0);B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\})$.

    (b) Hallar las ecuaciones de la recta paralela a L que pasa por el punto $(0,0,0)$.

16. En $\mathbb{R}^3$ y respecto del sistema de referencia cartesiano usual, determinar la ecuación de la recta R paralela a $S=\{x-y+z=0,\ x+y-z=1\}$ que pasa por el punto $(1,1,1)$. Calcular también las ecuaciones de $R+S$ en dicho sistema de referencia.

17. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P=(3,5,1)$ y corta perpendicularmente a la recta $S\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

18. Dadas las rectas de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $R \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-\lambda}{-1}$, $S \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$, hallar λ para que se R y S corten y calcular la ecuación del plano que determinan.

19. Probar que las rectas $x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7}$ y $x-2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ se cruzan y hallar una recta perpendicular a ambas que las interseque.

20. Se consideran los siguientes tres planos de $\mathbb{R}^3$ $R \equiv x+y+z=1$, $S \equiv \lambda x + y + z = 1$, $T \equiv x + \lambda y + \mu z = 1$. Hallar los valores de λ, μ para que
    (a) R, S, T tengan un único punto común.
    (b) Tengan una única recta común.
    (c) Se corten 2 a 2.

21. Estudiar la posición relativa de los siguientes subespacios afines:
    (a) En $\mathbb{R}^4$, $R \equiv 2x - z + 2t = -3$, $S \equiv \lambda x - 2y + 2z + 2t = 6$.
    (b) En $\mathbb{R}^3$, $R \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{5}$, $S \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+8}{3}$.
    (c) En $\mathbb{R}^3$, $R \equiv \frac{x+5}{\alpha} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{\beta}$, $S \equiv \frac{x+3}{\lambda} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+8}{\mu}$.

22. Probar que en un espacio afín de dimensión finita, todo hiperplano y toda recta no paralela al hiperplano se cortan exactamente en un punto.

23. Teorema de las paralelas de Thales. Sea A un espacio afín, y $P_1, P_2, P_3 \in A$ tres puntos que caen sobre una misma recta afín de A, tales que $P_1 \neq P_2$. La *razón simple* $(P_1P_2P_3) \in \mathbb{K}$ se define como el único escalar tal que $\overrightarrow{P_1P_3} = (P_1P_2P_3)\overrightarrow{P_1P_2}$. Supongamos que $\dim A$ es finita. Probar que si H_1, H_2, H_3 son tres hiperplanos de A distintos y paralelos, y r_1 y r_2 son dos rectas no paralelas a H_1 y llamamos $\{P_i\} = r_1 \cap H_i$, $\{Q_i\} = r_2 \cap H_i$, $i = 1, 2, 3$, entonces
$$(P_1P_2P_3) = (Q_1Q_2Q_3).$$

24. Sean A, A' un espacios afines, $\dim A = n \in \mathbb{N}$. Tomemos $n+1$ puntos afínmente independientes $P_0, \ldots, P_n \in A$ y $n+1$ puntos cualesquiera $P'_0, \ldots, P'_n \in A'$. Probar que existe una única aplicación afín $f : A \to A'$ tal que $f(P_i) = P'_i$ para $i = 0, \ldots, n$.

25. Demostrar que si $R, S \subset A$ son dos rectas distintas paralelas en un espacio afín A, y T es otra recta secante a las anteriores, entonces los ángulos $\sphericalangle(R, T)$ y $\sphericalangle(T, S)$ son iguales, y que esta propiedad se mantiene para ángulos orientados tras elegir una orientación del plano $R + S = R + T = S + T$.

26. Probar que en todo plano afín euclídeo, los ángulos de un triángulo suman π.

27. Hallar la distancia entre las rectas $\frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$ y $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$.

28. Teorema de Pitágoras. Sean tres puntos P, Q, R de un espacio afín euclídeo (A, V, g) tales que $g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}) = 0$. Demostrar que la distancia asociada d verifica:

$$d(P, Q)^2 + d(Q, R)^2 = d(P, R)^2.$$

Justificar a partir de este teorema que, dados dos subespacios afines S, T de A, existen $P_0 \in S$, $P_0' \in T$ tales que $d(P_0, P_0') = d(S, T)$ y P_0, P_0' pertenecen a en una recta afín de A ortogonal a S, T.

29. Se consideran un punto P y un hiperplano H de un espacio afín euclídeo (A, V, g).

(a) Probar que si $X \in H$ y $u \in V$ es un vector unitario ortogonal a $\overrightarrow{H}$, entonces $d(P, H) = |g(\overrightarrow{PX}, u)|$.

(b) Demostrar que si en un sistema de referencia cartesiano las coordenadas de P son $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ y la ecuación de H es $\sum_i a_i x_i + b = 0$, entonces el vector $u \in \overrightarrow{H}$ de coordenadas $\frac{1}{\sum_i a_i^2}(a_1, \ldots, a_n)$ es unitario y ortogonal a $\overrightarrow{H}$, y cumple

$$d(P, H) = \frac{|a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

30. Sea (A^3, V, g) un espacio afín euclídeo real de dimensión 3. Se considera el tensor determinante det fijado por g en una base ortonormal y una de las orientaciones de V, y el correspondiente producto vectorial $\times$. Sea un punto $P_0 \in A$ y $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ de forma que la rectas afines $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$, $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$ se cruzan. Probar que

$$d(P_0, r_1) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1} \times v_1\|}{\|v_1\|}, \qquad d(r_1, r_2) = \frac{|\mathsf{det}(v_1, v_2, \overrightarrow{P_1P_2})|}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

(La primera de estas dos expresiones es también útil para calcular la distancia entre dos rectas paralelas)

31. Hallar la dimensión del subespacio de puntos fijos de la aplicación afín $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y + 1, x - z, x + y + z - 1)$. Hallar un conjunto de puntos afínmente independientes del mismo que generen dicho subespacio afín.

32. Calcular la homotecia de $\mathbb{R}^3$ que lleva los puntos $P = (1, 0, -1)$ y $Q = (0, 1, 2)$ en $P' = (2, 5, 0)$ y $Q' = (0, 5, 2)$ respectivamente.

33. Se consideran los subespacios afines de $\mathbb{R}^4$ dados por $S = (1, 0, 1, 0) + < (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0) >$, $T = (0, 1, 1, 1) + < (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1) >$. Probar que están en suma directa. Hallar la proyección sobre T paralela a S y la simetría respecto de S paralela a T.

34. Sean $T_v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la traslación de vector $v = (1, 2, 3)$, y $H_{a,\lambda}$ la homotecia con centro $(1, 0, -1)$ y razón 2. Sea L la recta dada por $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{3}$. Hallar las ecuaciones cartesianas de $T_v(L)$ y $H_{a,\lambda}(L)$.

35. Hallar todas afinidades de $\mathbb{R}^2$ que llevan las rectas L_1, L_2, L_3 en L_2, L_3, L_1 (en ese orden), donde $L_1 \equiv x + y = 1$, $L_2 \equiv x + 2y = 0$, $L_3 \equiv 4x - y = 2$.

36. En $\mathbb{R}^2$, sean L y S dos rectas que se cortan. Hallar las afinidades que tienen a L como una recta de puntos fijos y que dejan invariantes a S.

37. Hallar el punto simétrico de $(1, 2, 3)$ respecto del plano $x - y - z = 1$ paralelamente a la dirección $< (1, 1, 2) >$.

38. Probar que la composición de una simetría deslizante de $\mathbb{R}^2$ consigo misma es una traslación.

39. Calcular la proyección del punto $(1, 2, 3)$ sobre la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{7}$ y paralelamente al plano $x + y + z = 1$.

40. Probar que la aplicación $f(x, y, z) = (\frac{1}{2}(x+y+z+1), -x+2y+z+1, \frac{1}{2}(3x-2y-z-3))$ es afín. Demostrar que $f \circ f = f$ y hallar el subespacio respecto del cual es una proyección.

41. Se consideran los subespacios afines de $\mathbb{R}^3$ $S =< (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1) >$, $T =< (1, 2, 3), (2, -1, 0) >$. Probar que están en suma directa. Hallar la proyección π sobre T paralela a S, y la simetría σ respecto de S paralela a T. Estudiar si $\pi \circ \sigma$ es una simetría o una proyección afín.

42. Estudiar si la aplicación $f\colon R^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (2y + x, -y, 2 - z)$ es afín. Hallar un conjunto afínmente independiente que genere el subespacio afín de puntos fijos de f. Estudiar también si f es una proyección o una simetría afín. En tal caso, hallar los subespacios que determinan la aplicación.

43. Hallar la simetría central de $\mathbb{R}^3$ que lleva el punto $(1, 2, 3)$ en el punto $(2, -1, 0)$.

44. Hallar la simetría ortogonal de $\mathbb{R}^4$ respecto del plano $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 1, z - t = 0\}$.

45. Probar que $f(x, y, z) = (-z - 2, -y, -x - 2)$ es un movimiento rígido y clasificarlo.

46. Hallar la expresión del giro de ángulo $\theta = \pi/4$ y centro $(1, 4)$.

47. Estudiar si $f(x, y) = (\frac{-3x-4y}{5} + 3, \frac{-4x+3y}{5} + 1)$ es un movimiento rígido y clasificarlo.

48. Clasificar $f(x, y, z) = (y + 2, x, z + 1)$.

49. Probar que $f(x,y,z) = (\frac{x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y-1-\sqrt{3}}{2}, z+1)$ es un movimiento rígido y clasificarlo.

50. Hallar la expresión del giro de ángulo $\theta = \pi/6$ cuyo eje es la recta $r = \{x-2y+1 = 0, y-2z+1 = 0\}$.

51. Hallar la expresión del movimiento helicoidal de ángulo $\pi/4$ respecto del eje

$$r = \{x-2y+1 = 0, y-z+1 = 0\}$$

con paso (vector de traslación) $(-2,1,1)$.

52. Determinar qué tipo de cónicas definen las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}^2$:

a) $x^2 - y^2 + 2xy - 3x + 2 = 0$,
b) $2x^2 + 3y^2 - 4xy - 3x + 2 = 0$,
c) $-y^2 + 2xy - 5x + 1 = 0$,
d) $3x^2 + 4y^2 - 5xy + 7x - 4 = 0$,
e) $x^2 + y^2 - 7xy + 5x + 1 = 0$,
f) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$,
g) $x^2 + 4xy - 4y^2 + 2x + 2 = 0$,
h) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$,
i) $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

53. Determinar qué tipo de cónicas definen las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}^3$:

a) $3x^2 - 2y^2 + 5z^2 = 1$,
b) $\frac{x^2}{25} + 4y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$,
c) $x = 4y^2 + z^2$,
d) $y = x^2$,
e) $-x^2 - 5y^2 + 3z^2 = 1$,
f) $\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$
g) $z = x^2 - 4y^2$,
h) $z = x^2 - 4y + 2xz$,