

# Superficies minimales foliadas por circunferencias: los ejemplos de Riemann

Francisco Martín      Joaquín Pérez

Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Granada  
18071 Granada

## 1 Introducción

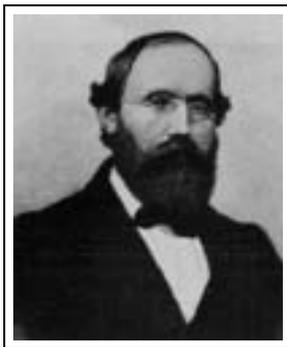


Figura 1: *B. Riemann.*

Tras la prematura muerte de Bernhard Riemann se encontraron en su gabinete gran cantidad de manuscritos no publicados, algunos de ellos inconclusos, de enorme interés. Esto llevó a varios de sus alumnos y colegas a redactarlos, completarlos y publicarlos en las Memorias de la Real Sociedad de Ciencias de Göttingen, en sucesivos artículos que fueron apareciendo a partir de 1867.

Uno de ellos [11], redactado por K. Hattendorf y M. H. Weber, a partir de notas de Riemann que datan del periodo 1860-61, está dedicado a las superficies minimales de  $\mathbb{R}^3$ . En este trabajo, Riemann resuelve varios problemas de Plateau, es decir considera diversos tipos de contornos y determina explícitamente qué superficies minimales tienen por borde a esos contornos. En la última sección de su artículo, Riemann aborda el problema de determinar las superficies minimales bordeadas por dos circunferencias en planos paralelos, añadiendo la hipótesis adicional de que cada plano comprendido entre los dos que contienen al borde corte a la superficie en una circunferencia. En concreto, Riemann probó que las únicas soluciones a su problema (salvo homotecias y movimientos rígidos) son la catenoide y una nueva familia uno-paramétrica de superficies  $\{R_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ , a las que hoy día se conoce como las superficies minimales de Riemann. En 1869, A. Enneper [3] demostró que no existen superficies minimales foliadas por circunferencias en planos no paralelos, y obtuvo la clasificación de las superficies minimales foliadas por circunferencias.

El objetivo de este artículo es recuperar la idea original de Riemann, actualizando ligeramente el lenguaje matemático. A esto dedicaremos la sección 4. Conviene observar que actualmente existen demostraciones más cortas que la del célebre matemático alemán. De hecho, en 1956 M. Shiffman [12] obtuvo la solución más general al problema eliminando la hipótesis de que la superficie esté foliada por circunferencias. No obstante,

la demostración de Riemann es conceptualmente la más sencilla y autocontenida. En la subsección 5.2 veremos algo más sobre el argumento de Shiffman. Incluiremos en la sección 3, como paso previo, la reducción de Enneper, de la foliación general a la foliación en planos paralelos. En las subsecciones 5.3 y 5.4 introduciremos una forma de ver los ejemplos de Riemann más acorde con la teoría actual de superficies minimales, y que además nos permitirá obtener, haciendo uso del programa *Mathematica*, gráficos de estas superficies. Para ello tendremos que hacer uso de lo que se conoce como representación de Weierstrass de una superficie minimal, que se encuentra someramente descrita en la subsección 2.1. En general, las superficies minimales son objetos geométricos a los que el programa *Mathematica* se adapta especialmente. Esto se debe a propiedades de naturaleza geométrica (el principio de reflexión de Schwarz) y analítica (son la parte real de objetos holomorfos). El principio de reflexión de Schwarz, del que hablamos en los preliminares, permite representar porciones relativamente pequeñas de la superficie, donde *Mathematica* puede alcanzar gran precisión, para luego generar la superficie completa sin más que repetir ese patrón inicial. Por otra parte, *Mathematica* representa una superficie en el espacio calculando las imágenes de los vértices de una cuadrícula sobre el dominio de parámetros. Por eso, las parametrizaciones conformes (isotermas), que nosotros vamos a usar, se adecúan especialmente a este cometido: las cuadrículas se aplicarán en una malla rectangular sobre la superficie. En el caso que nos ocupa, hay una razón añadida para la obtención de buenos gráficos; la parametrización de los ejemplos de Riemann viene dada en términos de las funciones elípticas `EllipticE` y `EllipticF`, que al estar internamente implementadas en *Mathematica* evita errores numéricos apreciables.

Nos gustaría mencionar que W. C. Jagy [5] ha observado una interesante dicotomía entre la situación de  $\mathbb{R}^3$  y de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ . Para  $n \geq 4$  toda hipersuperficie minimal en  $\mathbb{R}^n$  foliada por hiperesferas en hiperplanos paralelos debe de ser rotacionalmente simétrica. En otras palabras, los ejemplos de Riemann son algo propio de  $\mathbb{R}^3$  y no tienen parangón en dimensiones más altas.

### Agradecimientos

Los autores quieren expresar su agradecimiento al Prof. Hermann Karcher por sus valiosos comentarios acerca de la última sección de este artículo.

## 2 Preliminares

Entre las diversas formas de expresar la minimalidad de una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  (esto es, la curvatura media  $H$  de  $M$  es idénticamente nula), quizás las más conocidas son la ecuación de Euler-Lagrange<sup>1</sup>

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0,$$

---

<sup>1</sup>A lo largo del artículo usaremos la notación simplificada  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ , etc. para derivar cualquier expresión de más de una variable.

donde  $M$  se expresa (localmente) como grafo de una función  $z = f(x, y)$ , y la formulación en coordenadas locales

$$eG - 2fF + Eg = 0,$$

donde  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$  son respectivamente las matrices de la primera y segunda formas fundamentales de la superficie en una parametrización local. Desde luego, existen otras elegantes maneras de caracterizar la minimalidad de una superficie, por ejemplo imponiendo la armonicidad de las funciones coordenadas o la holomorfía de su aplicación de Gauss. Pero conviene no perder de vista el contexto histórico en que se desarrollaron las ideas que pretendemos recordar: fue el mismo Riemann el que inició el estudio de las funciones de variable compleja, luego más bien poco se podía conocer en la época acerca de caracterizaciones de la minimalidad en términos de holomorfía o armonicidad. A la hora de resolver el problema planteado en la introducción, Riemann expresó la condición de minimalidad cuando la superficie  $M$  se escribe en forma implícita, esto es, como el conjunto de ceros de una función diferenciable  $F$  definida sobre un abierto de  $\mathbb{R}^3$ , mediante la ecuación

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \right) = 0,$$

donde  $\operatorname{div}$  y  $\nabla$  denotan divergencia y gradiente en  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente. Puede que el lector no esté familiarizado con esta manera de escribir la condición  $H = 0$ , por lo que la desarrollamos a continuación. Nótese que

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \right) = \frac{1}{\|\nabla F\|} \left( \Delta F - \frac{1}{\|\nabla F\|} (\nabla F)(\|\nabla F\|) \right),$$

donde  $\Delta$  representa el operador laplaciano. Por tanto, basta probar la siguiente equivalencia:

**Lema 1** Sean  $F : O \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en un abierto  $O$  de  $\mathbb{R}^3$  y  $M \subset F^{-1}(\{0\})$  una superficie regular. Entonces,  $M$  es minimal si y sólo si

$$\|\nabla F\| \Delta F = (\nabla F)(\|\nabla F\|) \quad \text{en } M.$$

*Demostración.* Para probar el lema, recordemos que el espacio tangente a  $M$  en  $p$  es  $T_p M = \ker(dF_p) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, (\nabla F)_p \rangle = 0\} = \langle (\nabla F)_p \rangle^\perp$ , luego  $(\nabla F)|_M$  es un campo normal sobre  $M$  y  $N = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}|_M$  un campo normal unitario, esto es, una aplicación de Gauss. Por definición de laplaciano,

$$\Delta F = \operatorname{traza}(\nabla^2 F) = \sum_{i=1}^2 (\nabla^2 F)(E_i, E_i) + (\nabla^2 F)(N, N) \quad (1)$$

donde  $\nabla^2 F$  es el hessiano de  $F$  y  $\{E_1, E_2\}$  es una base local ortonormal de campos tangentes a  $M$ . Usando ahora la definición de hessiano,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 F)(E_i, E_i) &= \langle d(\nabla F)(E_i), E_i \rangle = \langle E_i(\nabla F), E_i \rangle = \langle E_i(\|\nabla F\|N), E_i \rangle = \\ &= E_i(\|\nabla F\|)\langle N, E_i \rangle + \|\nabla F\|\langle dN(E_i), E_i \rangle. \end{aligned}$$

Como  $N, E_i$  son ortogonales, el primer sumando anterior se anula y

$$\sum_{i=1}^2 (\nabla^2 F)(E_i, E_i) = \|\nabla F\| \text{traza}(dN) = -2\|\nabla F\|H. \quad (2)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 F)(N, N) &= \|\nabla F\|^{-2}(\nabla^2 F)(\nabla F, \nabla F) = \|\nabla F\|^{-2}\langle d(\nabla F)(\nabla F), \nabla F \rangle = \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla F\|^{-2}(\nabla F)(\|\nabla F\|^2) = \|\nabla F\|^{-1}(\nabla F)(\|\nabla F\|). \end{aligned}$$

De aquí y de (2) podemos reescribir (1) como

$$\|\nabla F\|\Delta F = -2\|\nabla F\|^2 H + (\nabla F)(\|\nabla F\|),$$

y esto concluye la demostración. **Q.E.D.**

## 2.1 La representación de Weierstrass de una inmersión minimal de $\mathbb{R}^3$ .

En la década 1860-70, Enneper y Weierstrass obtuvieron fórmulas de representación de superficies minimales, usando las líneas de curvatura como líneas de parámetros, que con el tiempo se han revelado como una de las herramientas principales en el estudio de las superficies minimales orientables. Para superficies minimales no orientables existen fórmulas parecidas, pero nosotros no vamos a entrar en su descripción. El lector puede encontrar más detalles sobre esta representación, y sobre las superficies minimales en general, en las referencias [2, 8, 9, 10].

Su origen está en la bien conocida fórmula

$$\Delta X = 2HN,$$

válida para una inmersión isométrica  $X = (X_1, X_2, X_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie riemanniana en el espacio euclídeo, siendo  $N$  su aplicación de Gauss,  $H$  la curvatura media asociada y  $\Delta X = (\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3)$  el laplaciano de la inmersión. En particular, si  $X$  es minimal se obtiene que  $X_1, X_2$  y  $X_3$  son funciones armónicas. Este concepto de armonicidad no es métrico, sino conforme: podemos trasladar dicha armonicidad a la del plano complejo sin más que usar parametrizaciones isotermas de la superficie. Denotaremos por  $X_j^*$ ,  $j = 1, 2, 3$ , a una conjugada armónica de  $X_j$  (bien definida localmente, salvo constantes aditivas). En este caso,

$$\phi_j \stackrel{\text{def}}{=} dX_j + idX_j^*,$$

define una 1-forma holomorfa. No es difícil darse cuenta de que  $\phi_j$  está globalmente definida sobre  $M$ , es decir, no depende de la elección de parámetros isotermos que hagamos. Fijando un punto  $P_0 \in M$ , la igualdad

$$X(P) = X(P_0) + \left( \operatorname{Re} \int_{P_0}^P \phi_1, \operatorname{Re} \int_{P_0}^P \phi_2, \operatorname{Re} \int_{P_0}^P \phi_3 \right), \quad P \in M$$

permite recuperar la inmersión minimal, supuesto que la integración anterior no depende del camino que une  $P_0$  con  $P$ .

Pero la información contenida en estas tres 1-formas  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  puede condensarse un poco más, porque si llamamos  $g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$  tenemos entonces una función meromorfa, que junto con  $\phi_3$  determina las otras dos 1-formas como:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g} - g \right) \phi_3, \quad \phi_2 = \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g} + g \right) \phi_3,$$

con la particularidad de que  $g$  cumple:

$$N = \left( 2 \frac{\operatorname{Re}(g)}{1 + |g|^2}, 2 \frac{\operatorname{Im}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{|g|^2 - 1}{1 + |g|^2} \right),$$

esto es,  $g$  es la proyección estereográfica desde el polo norte de la aplicación de Gauss. En la bibliografía se llama indistintamente *representación de Weierstrass* a la terna  $(M, g, \phi_3)$ , o a la lista  $(M, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ .

Vamos a acabar estos preliminares con un resultado que nos será de gran utilidad a lo largo del artículo. En 1894, H. A. Schwarz obtuvo, como consecuencia más o menos sencilla del principio de reflexión que él mismo desarrolló para las funciones armónicas del plano, el siguiente resultado:

**Teorema 1 (Schwarz, [9] Lema 7.3)** *Todo arco de línea recta (resp. geodésica plana) en una superficie minimal es una línea de simetría rotacional (resp. simetría especular) de la superficie.*

Otra curiosa demostración, apoyándose en las soluciones del problema de Björling (del que nosotros no hemos hablado) puede encontrarse en [2, §3.4].

### 3 Reducción a planos paralelos

Sin entrar en más consideraciones teóricas, nosotros diremos que una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  está foliada por circunferencias si, localmente, se puede parametrizar en la forma:

$$X(u, v) = c(u) + r(u) (\cos(v) \mathbf{v}_1(u) + \operatorname{sen}(v) \mathbf{v}_2(u)), \quad u_0 < u < u_1, \quad 0 \leq v < 2\pi, \quad (3)$$

donde  $c(u)$  es una curva en  $\mathbb{R}^3$  que parametriza el centro de cada circunferencia,  $r(u)$  es una función positiva que mide su radio y  $\mathbf{v}_1(u)$  y  $\mathbf{v}_2(u)$  son ciertas funciones vectoriales,

ortogonales y unitarias. Todas estas aplicaciones serán de clase  $C^2$ , al menos<sup>2</sup>. El propósito de la presente sección es demostrar el resultado de Enneper mencionado en la introducción:

**Teorema 2 (Enneper)** *Si una superficie minimal  $M \subset \mathbb{R}^3$  está foliada por circunferencias, entonces éstas están contenidas en planos paralelos.*

*Demostración.* Vamos a llamar  $u$  al parámetro de la foliación,  $\{\mathcal{C}_u : u \in ]u_0, u_1[ \}$  a la familia de circunferencias que folia a la superficie y  $t(u)$  al vector normal unitario al plano que contiene a  $\mathcal{C}_u$ . El teorema quedaría probado si demostrásemos que  $t(u)$  es constante.

Por reducción al absurdo, supongamos que  $t$  no es constante. En ese caso, tomando un intervalo más pequeño si fuese preciso, podemos asumir que el vector derivada  $t'(u) \neq 0$ , para todo  $u \in ]u_0, u_1[$ . En estas condiciones llamaremos  $\gamma : ]u_0, u_1[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  a una curva parametrizada por el arco y verificando  $\gamma'(u) = t(u)$ ,  $\forall u \in ]u_0, u_1[$ . Si  $n(u)$  y  $b(u)$  son los vectores normal y binormal unitarios, respectivamente, entonces las ecuaciones de Frenet nos dicen:

$$\begin{cases} t' &= -\kappa n \\ n' &= -\kappa t - \tau b \\ b' &= \tau n \end{cases} \quad (4)$$

Además, la superficie  $M$  se puede escribir localmente como en (3), tomando  $\mathbf{v}_1 = n$  y  $\mathbf{v}_2 = b$ . Nuestro objetivo ahora es escribir la condición  $H = 0$ , en términos de esta parametrización. Para ello, si denotamos como  $E, F$  y  $G$  a los coeficientes de la primera forma fundamental de  $M$  en la parametrización  $X$ , y  $e, f$  y  $g$  a los coeficientes de la segunda forma fundamental, entonces sabemos que

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2},$$

donde

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle,$$

$$e = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\|X_u \wedge X_v\|}, \quad f = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\|X_u \wedge X_v\|}, \quad g = \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\|X_u \wedge X_v\|}.$$

Si llamamos  $(\alpha, \beta, \delta)$  a las coordenadas del vector  $c'$  en la base  $\{t, n, b\}$ , entonces no es difícil comprobar, usando las ecuaciones de Frenet (4), que:

$$eG - 2fF + Eg = \frac{1}{\|X_u \wedge X_v\|} (a_1 \cos(3v) + a_2 \sin(3v) + a_3 \cos(2v) + a_4 \sin(2v) + a_5 \cos v + a_6 \sin v + a_7),$$

---

<sup>2</sup>Si la superficie es minimal, como será en nuestro caso, todas estas aplicaciones son, automáticamente, analíticas.

donde las funciones  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , dependiendo únicamente de  $u$ , tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{2}r^3 \kappa (\beta^2 - \delta^2 + r^2 \kappa^2), \\
a_2 &= -r^3 \beta \delta \kappa, \\
a_3 &= \frac{r^3}{2} (-6\beta \kappa r' + r (5\alpha \kappa^2 + \kappa \beta' - \beta \kappa')), \\
a_4 &= \frac{r^3}{2} (r \kappa \delta' - \delta (6\kappa r' + r \kappa')), \\
a_5 &= -\frac{r^2}{2} (3r^3 \kappa^3 - 4\alpha \beta r' + \\
&\quad r (8\alpha^2 \kappa + 3\beta^2 \kappa + 3\kappa (\delta^2 + 2(r')^2) - 2\beta \alpha' + 2\alpha (\delta \tau + \beta'))) + 2r^2 (r' \kappa' - \kappa r''), \\
a_6 &= r^2 (2\alpha \delta r' + r^2 \kappa \tau r' + r (\delta \alpha' + \alpha (\beta \tau - \delta'))), \\
a_7 &= \frac{r^2}{2} (2\alpha^3 + r (2r' (-2\beta \kappa + \alpha') + r (\kappa (2\delta \tau + \beta') - \beta \kappa'))) + \\
&\quad \alpha (2\beta^2 + 2\delta^2 + 5r^2 \kappa^2 + 2(r')^2 - 2r r'').
\end{aligned}$$

Puesto que las funciones  $\{\cos(nv), \sin((n+1)v) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  son linealmente independientes, la condición  $H = 0$  es equivalente a  $a_i \equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, 7$ .

De la condiciones  $a_1 = a_2 = 0$ , teniendo en cuenta que  $r > 0$  y  $\kappa > 0$ , deducimos que  $\beta = 0$  y  $\delta^2 = r^2 \kappa^2$ . Sustituyendo en  $a_4 = 0$ , llegamos a que  $-5r r' \kappa = 0$ , de donde  $r' = 0$ . De nuevo sustituyendo esta información en la ecuación  $a_3 = 0$ , obtenemos  $5r \alpha \kappa^2 = 0$ , por tanto  $\alpha = 0$ . Si ahora sustituimos  $\alpha = \beta = r' = 0$  y  $\delta^2 = r^2 \kappa^2$  en  $a_5 = 0$ , llegaríamos a que  $-3r^5 \kappa^3 = 0$ , de donde deduciríamos que, ó  $r = 0$ , ó bien  $\kappa = 0$ . Ambas igualdades son absurdas.

Esta contradicción proviene de asumir que  $t$  no es constante. Así pues,  $t$  es constante y por tanto los planos de la foliación son paralelos.

**Q.E.D.**

## 4 La solución de Riemann

En esta sección vamos a ver el razonamiento de Riemann para determinar qué superficies minimales están foliadas por circunferencias. Por el teorema 2, podemos suponer que las circunferencias que folian nuestra superficie  $M$  están contenidas en planos horizontales. Tomaremos como parámetro de la foliación a la altura  $z$ , de forma que  $M \cap \{x_3 = z\}$  es por hipótesis una circunferencia, cuyo centro y radio denotaremos respectivamente por  $(\alpha(z), z) = (\alpha_1(z), \alpha_2(z), z)$  y  $r(z)$ . Usaremos la identificación natural  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  en lo que sigue, ya que los cálculos se escriben así más fácilmente. Aquí  $\alpha_1, \alpha_2, r$  son funciones de clase  $C^2$  definidas en un intervalo real  $]z_0, z_1[$ , y denotaremos por  $E'$  a la derivada respecto de  $z$  de cualquier expresión  $E(z)$ . Consideremos la función

$$F : \mathbb{R}^2 \times ]z_0, z_1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, z) = \|x - \alpha(z)\|^2 - r(z)^2,$$

donde  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Así,  $M \subset F^{-1}(\{0\})$  y por tanto el lema 1 nos dice que  $M$  es minimal si y sólo si  $F_z^2 + \|x - \alpha\|^2 (2 + F_{zz}) + 2\langle x - \alpha, \alpha' \rangle F_z = 0$  en  $M$ .

Usando que sobre  $M$  tenemos  $\|x - \alpha\|^2 = r^2$  y que  $2\langle x - \alpha, \alpha' \rangle = -(\|x - \alpha\|^2)_z = -(F + r^2)_z = -F_z - (r^2)'$ , la minimalidad de  $M$  se expresa

$$2r^2 + r^2 F_{zz} - (r^2)' F_z = 0. \quad (5)$$

A continuación integraremos (5). Primero dividimos por  $r^4$ ,

$$0 = \frac{2}{r^2} + \frac{r^2 F_{zz} - (r^2)' F_z}{r^4} = \frac{2}{r^2} + \left( \frac{F_z}{r^2} \right)_z,$$

luego integrando respecto a  $z$

$$f(x) = 2 \int^z \frac{du}{r(u)^2} + \frac{F_z(x, z)}{r(z)^2}, \quad (6)$$

para cierta función de  $x$ . Por otro lado,  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{F_z}{r^2} \right) = -\frac{2\alpha'_i}{r^2}$ , función que sólo depende de  $z$ . Como esto es válido para  $i = 1, 2$ , concluimos que  $\frac{F_z}{r^2}$  debe ser afín como función de  $x$ . Como  $\int^z \frac{du}{r(u)^2}$  sólo depende de  $z$ , (6) implica que  $f(x)$  es una función afín. Así:

$$2 \int^z \frac{du}{r(u)^2} + \frac{F_z(x, z)}{r(z)^2} = 2\langle a, x \rangle + c \quad (7)$$

para ciertos  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Derivando en (7) respecto a  $x_i$  obtenemos  $\alpha'_i(z) = -a_i r^2(z)$ , luego  $\alpha(z) = -m(z)a$  donde  $m(z) = \int^z r(u)^2 du$ . Por tanto, tenemos determinado el centro de la circunferencia  $M \cap \{x_3 = z\}$  salvo una traslación horizontal independiente de la altura.

Para determinar el radio como función de  $z$ , volvamos a la ecuación (5). Puesto que  $F_z = -2\langle x - \alpha, \alpha' \rangle - (r^2)'$ , entonces  $F_{zz} = 2\|\alpha'\|^2 - 2\langle x - \alpha, \alpha'' \rangle - (r^2)''$ . Sustituyendo  $\alpha' = -r^2 a$  en estas dos expresiones, y éstas a su vez en (5) deducimos que la minimalidad de  $M$  se escribe

$$2\|a\|^2 r^6 + ((r^2)')^2 + r^2(2 - (r^2)') = 0, \quad (8)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria en la función  $q(z) = r(z)^2$ . La resolución de esta ecuación no es difícil. Para ello, observemos que

$$\left( \frac{(q')^2}{q^2} \right)' = \frac{2q'}{q^3} [-(q')^2 + qq''] \stackrel{(8)}{=} \frac{2q'}{q^3} (2\|a\|^2 q^3 + 2q) = 4 \left( \|a\|^2 q' + \frac{q'}{q^2} \right),$$

luego integrando respecto a  $z$

$$\frac{(q')^2}{q^2} = 4 \left( \|a\|^2 q - \frac{1}{q} \right) + 4\lambda, \quad (9)$$

para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En particular, el miembro de la derecha de (9) debe ser no negativo. Despejando,  $\frac{dq}{dz} = 2\sqrt{\|a\|^2 q^3 - q + \lambda q^2}$ , luego la diferencial altura de  $M$  es  $dz =$

$\frac{1}{2} \frac{dq}{\sqrt{\|a\|^2 q^3 - q + \lambda q^2}}$  donde  $q = r^2$ . Viendo  $q$  como variable real, la función altura de  $M$  se escribe

$$z(q) = \frac{1}{2} \int^q \frac{du}{\sqrt{\|a\|^2 u^3 - u + \lambda u^2}}. \quad (10)$$

Para obtener las dos primeras funciones coordenadas de  $M$  sólo debemos recordar que  $M \cap \{x_3 = z\}$  es una circunferencia centrada en  $(\alpha, 0)$  y de radio  $r$ , luego necesitamos además de la variable  $q$  otra variable real que recorra dicha circunferencia:

$$\begin{aligned} x(q, v) &= \alpha(z(q)) + \sqrt{q}e^{iv} = -m(z(q))a + \sqrt{q}e^{iv} = - \int^{z(q)} q(z) dz \cdot a + \sqrt{q}e^{iv} \\ &= - \int^q q \frac{dz}{dq} dq \cdot a + \sqrt{q}e^{iv} = - \frac{1}{2} \int^q \frac{u du}{\sqrt{\|a\|^2 u^3 - u + \lambda u^2}} \cdot a + \sqrt{q}e^{iv}, \end{aligned}$$

donde  $0 \leq v < 2\pi$ . En resumen, hemos obtenido la siguiente parametrización  $X = (x_1, x_2, z) = (x_1 + ix_2, z)$  de  $M$ :

$$X(q, v) = f(q)(a, 0) + \sqrt{q}(e^{iv}, 0) + (0, z(q)), \quad (11)$$

donde  $f(q) = -\frac{1}{2} \int^q \frac{u du}{\sqrt{\|a\|^2 u^3 - u + \lambda u^2}}$  y  $z(q)$  viene dada por (10).

Las superficies obtenidas en (11) dependen, *a priori*, de tres parámetros reales  $a_1, a_2, \lambda$ , aunque dos de estos parámetros no producen realmente superficies sustancialmente nuevas, ya que corresponden a giros y homotecias de otras superficies. Sin embargo, Riemann en su manuscrito original no dio interpretación geométrica alguna de las superficies ni de los parámetros que las gobiernan (a los autores les gustaría pensar que, de haber publicado Riemann su trabajo en un artículo, hubiese incluido tales interpretaciones).

Para terminar esta sección haremos una sencilla discusión geométrica sobre las superficies en (11), que nos hagan entender su forma y propiedades.

Primero notemos que el primer sumando del miembro de la derecha de (11) describe el movimiento del centro de  $M \cap \{x_3 = z(q)\}$ , el segundo sólo parametriza la circunferencia horizontal con ese centro y radio  $\sqrt{q}$ , y el tercero sitúa la circunferencia a altura  $z(q)$ . Recordemos que  $q$  representa el cuadrado del radio de  $M \cap \{x_3 = z(q)\}$ , por lo que necesariamente  $q > 0$ . Cuando discutamos la forma de estas superficies, estudiaremos para qué valores de  $q > 0$  el radicando  $\|a\|^2 q^3 - q + \lambda q^2$  es no negativo (esta condición es necesaria, ver (9)). Esto nos dirá que el rango permitido de  $q$  siempre será de la forma  $[q_1, +\infty[$  para cierto  $q_1 > 0$ . Por otro lado, el integrando de  $z(q)$  es una función positiva, luego  $z$  es una función creciente de  $q$ . Como fijar el límite inferior de integración de  $z(q)$  equivale a trasladar verticalmente la superficie, tomaremos dicho límite inferior como  $q_1$ , lo cual corresponde geoméricamente a normalizar de forma que:

*La circunferencia de radio mínimo en la superficie  $M$  está situada a altura cero y  $M$  está contenida en el semiespacio  $\{x_3 \geq 0\}$ .*

La superficie así representada no será (geodésicamente) completa, ya que tendrá como borde una circunferencia en  $\{x_3 = 0\}$ , pero si tomamos la raíz negativa al despejar  $\frac{dq}{dz}$  después de (9) obtendremos otra superficie contenida en el semiespacio  $\{x_3 \leq 0\}$  con la misma circunferencia borde en  $\{x_3 = 0\}$ . La unión de estas dos superficies minimales es de nuevo una superficie minimal (porque los espacios tangentes a ambas coinciden a lo largo de la curva común a altura cero), aunque tampoco será necesariamente completa. Veremos más información al discutir casos sobre el valor de  $a$ .

Análogamente, fijar el límite inferior de integración de  $f(q)$  corresponde a trasladar horizontalmente el centro de  $M \cap \{x_3 = z(q)\}$  por un vector que no dependa de  $q$ , luego también estamos trasladando horizontalmente  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ . Así, tomaremos como límite inferior de integración de  $f(q)$  el mismo  $q_1$ , lo que nos dice que:

*La circunferencia de radio mínimo en  $M$  tiene su centro en el origen de  $\mathbb{R}^3$ .*

A continuación discutiremos casos según que  $a$  se anule o no:

#### 4.1 Caso $a = (0, 0)$ : La catenoide.

Ahora  $X(q, v) = \sqrt{q}(e^{iv}, 0) + (0, z(q))$  y  $z(q) = \frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{du}{\sqrt{-u + \lambda u^2}} du$ . En particular,  $M$  es de revolución alrededor del eje  $x_3$  luego es una semi-catenode vertical cuyo cuello<sup>3</sup> está situado a altura cero. Para determinar  $q_1$ , notemos que  $\lambda$  es necesariamente positivo (esto se deduce de la ecuación (9)) y que la función  $u \mapsto -u + \lambda u^2$  es no negativa en  $] -\infty, 0] \cup [\frac{1}{\lambda}, \infty[$ . Por tanto, debemos tomar  $q_1 = \frac{1}{\lambda}$ . Además, en este caso la integral que define a  $z(q)$  puede resolverse explícitamente:

$$z(q) = \frac{1}{2} \int_{1/\lambda}^q \frac{du}{\sqrt{-u + \lambda u^2}} du = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arcsenh} \sqrt{-1 + q\lambda},$$

lo que nos da una parametrización explícita de la superficie,

$$X(q, v) = \left( \sqrt{q}e^{iv}, \frac{1}{\lambda} \operatorname{arcsenh} \sqrt{-1 + q\lambda} \right). \quad (12)$$

En este caso, al considerar la superficie en  $\{x_3 \leq 0\}$  definida por la raíz negativa tras despejar  $\frac{dq}{dz}$  en (9) obtendremos la mitad restante de una catenoide, luego la unión de ambas superficies es una superficie completa. En la figura 2, generada con **Mathematica**, usamos la representación (12) en los casos  $\lambda = 0.1, 1, 4$ . Para mayor claridad, hemos representado sólo la parte de cada catenoide en el cuadrante  $\{x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ .

#### 4.2 Caso $a \neq (0, 0)$ : Los ejemplos de Riemann.

Como  $f, z$  dependen de  $\|a\|^2$  pero no de  $(a_1, a_2)$ , un giro del vector  $a \equiv a_1 + ia_2$  en  $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$  alrededor del origen de ángulo  $\theta$  dejará invariante a  $f$  y a  $z$ , y por (11), el centro de  $M \cap \{x_3 = z(q)\}$  sufrirá un giro del mismo ángulo alrededor del eje  $x_3$  mientras que

<sup>3</sup>El cuello de una catenoide es la circunferencia de radio mínimo contenida en la superficie.

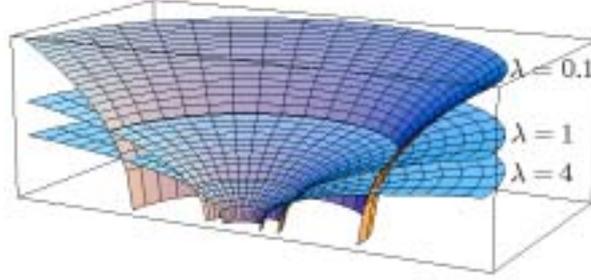


Figura 2: Tres catenoides, para diversos valores de  $\lambda$ .

los sumandos segundo y tercero de (11) quedarán invariantes. Por tanto, girar  $a$  en  $\mathbb{C}$  corresponde a girar la superficie en  $\mathbb{R}^3$  alrededor del eje  $x_3$ , y no perdemos generalidad suponiendo en lo que sigue que  $a \equiv (a, 0) \in \mathbb{R}^2$  con  $a > 0$ .

El radicando que aparece en la ecuación (10) es ahora  $q(a^2q^2 - 1 + \lambda q)$ , luego necesariamente  $a^2q^2 - 1 + \lambda q$  será no negativo. Esto ocurre para  $q \in \left[ \frac{1}{2a^2}(-\lambda - \sqrt{4a^2 + \lambda^2}), 0 \right] \cup \left[ q_1 = \frac{1}{2a^2}(-\lambda + \sqrt{4a^2 + \lambda^2}), \infty \right[$ . Como  $q$  debe ser positivo por razones geométricas, el rango correcto a considerar es  $q \in [q_1, \infty[$ . Fijemos los límites inferiores de integración para  $z(q), f(q)$  en  $q_1$ , y llamemos  $z_{a,\lambda}, f_{a,\lambda}$  a las funciones así obtenidas. Un sencillo cambio de variable nos dice cómo dependen estas funciones de sus parámetros:

$$\sqrt{a}z_{a,\lambda}(q) = z_{1,\lambda/a}(aq), \quad a^{3/2}f_{a,\lambda}(q) = f_{1,\lambda/a}(aq).$$

Por consiguiente, las inmersiones minimales  $X_{a,\lambda}, X_{1,\lambda/a}$  se relacionan mediante la ecuación

$$\sqrt{a}X_{a,\lambda}(q, v) = X_{1,\lambda/a}(aq, v).$$

Es decir, las correspondientes superficies se diferencian en una homotecia de razón  $\sqrt{a}$ . En consecuencia, podemos asumir que  $a = 1$ , luego nuestras superficies sólo dependen del parámetro real  $\lambda$ :

$$X_\lambda(q, v) = f_\lambda(q)(1, 0) + \sqrt{q}(e^{iv}, 0) + (0, z_\lambda(q)), \quad (13)$$

siendo

$$f_\lambda(q) = -\frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{u \, du}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}}, \quad z_\lambda(q) = \frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{u \, du}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}} \quad \text{y}$$

$$q_1 = q_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left( -\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2} \right).$$

Llamando  $M_\lambda = X_\lambda([q_1, \infty[ \times [0, 2\pi[)$ , el centro de cada circunferencia  $M_\lambda \cap \{x_3 = z_\lambda(q)\}$  cae sobre el plano vertical  $\Pi \equiv \{x_2 = 0\}$ , de donde inmediatamente deducimos que  $M_\lambda$  es simétrica por la reflexión en  $\Pi$ .

La función creciente  $q \mapsto z_\lambda(q)$ ,  $q \in [q_1, \infty[$ , es ahora acotada ya que  $\int^q \frac{du}{\sqrt{u^3}}$  tiene límite cero cuando  $q \rightarrow \infty$ . Geométricamente, esto nos dice que  $M_\lambda$  está contenida en una banda horizontal del tipo

$$S(0, \zeta) = \{(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq z \leq \zeta\},$$

donde  $\zeta = \zeta(\lambda) = \lim_{q \rightarrow \infty} z_\lambda(q) > 0$ .

¿Cómo corta  $M_\lambda$  al plano  $\{x_3 = \zeta\}$ ? Primero veamos que  $M_\lambda \cap \{x_3 = \zeta\} \neq \emptyset$ : Recordemos que  $M_\lambda$  es simétrica por reflexión en  $\Pi$ . Dado  $q \in [q_1, \infty[$ , la circunferencia  $M_\lambda \cap \{x_3 = z(q)\}$  corta a  $\Pi$  en dos puntos diametralmente opuestos  $A_+(q), A_-(q)$  que se obtendrán haciendo  $\sin v = 0$  en (13), esto es,

$$A_\pm(q) = \left( -\frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{u \, du}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}} \pm \sqrt{q}, z_\lambda(q) \right) \in (\mathbb{R} \times \{0\}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

Como  $q$  no es acotada, la primera coordenada de  $A_-(q)$  tiende a  $-\infty$  cuando  $q \rightarrow \infty$ , esto es, cuando nos aproximamos al plano superior  $\{x_3 = \zeta\}$  de nuestra banda. Sin embargo, el límite de la primera coordenada de  $A_+(q)$  cuando  $q \rightarrow \infty$  es finito, ya que para  $q$  muy grande

$$\left( -\frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{u \, du}{\sqrt{u^3 - u + \lambda u^2}} + \sqrt{q} \right) \approx \left( \text{cte.}(\lambda) - \frac{1}{2} \int_{q_1}^q \frac{du}{\sqrt{u}} + \sqrt{q} \right) = \text{cte.}(\lambda).$$

Por tanto,  $A_+(q)$  converge cuando  $q \rightarrow \infty$  a un punto  $A \in \{x_3 = \zeta\} \cap \Pi$ . Esto prueba que  $M_\lambda \cap \{x_3 = \zeta\}$  es no vacío. Como esta intersección no puede ser compacta (porque  $A_-(q)$  diverge en  $\mathbb{R}^3$  cuando  $q \rightarrow \infty$ , o también porque si  $M_\lambda \cap \{x_3 = \zeta\}$  fuese compacta podríamos extender  $M_\lambda$  a una banda  $S(0, \zeta + \varepsilon)$  para cierto  $\varepsilon > 0$ , contradicción con que  $\zeta = \sup\{z_\lambda(q) : q \in [q_1, \infty[)\}$ , concluimos que  $M_\lambda \cap \{x_3 = \zeta\}$  es un límite no vacío y no compacto de circunferencias simétricas respecto a  $\Pi$ , luego es una recta horizontal ortogonal a  $\Pi$  pasando por  $A$ .

Una vez que sabemos que el borde de  $M_\lambda$  consiste una circunferencia en  $\{x_3 = 0\}$  y una recta  $r$  ortogonal a  $\Pi$  en  $\{x_3 = \zeta\}$ , el principio de reflexión de Schwarz (teorema 1) muestra que  $M \cup \text{Rot}_r(M)$  es una superficie minimal, donde  $\text{Rot}_r$  denota la rotación de  $180^\circ$  alrededor de  $r$ . Por supuesto, la superficie  $M \cup \text{Rot}_r(M)$  está contenida en la banda horizontal  $S(0, 2\zeta)$  y tiene por borde a dos circunferencias del mismo radio. El mismo comportamiento se obtendría para una banda del tipo  $S(-\zeta, 0)$  si hubiéramos elegido la raíz negativa al despejar  $\frac{dq}{dz}$  en (9), con lo que también podremos hacer una rotación de  $180^\circ$  respecto a la recta afín  $r' = \{-p \mid p \in r\} \subset \{x_3 = -\zeta\}$ , obteniendo así una superficie minimal en la banda  $S(-4\zeta, 2\zeta)$ , cuya frontera son dos circunferencias del mismo radio y que contiene en su interior tres rectas paralelas a alturas  $\zeta, -\zeta, -3\zeta$ . Reiterando este proceso de rotación-extensión encontraremos una superficie minimal completa  $R_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ , con infinitas rectas paralelas en los planos  $\{x_3 = (2k+1)\zeta(\lambda)\}$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , que es invariante por la traslación  $T_\lambda$  de vector  $2(A - B)$  (aquí  $B = r' \cap \Pi$ ), obtenida al componer dos rotaciones alrededor de rectas consecutivas. Esta superficie  $R_\lambda$  se conoce habitualmente con el nombre de *superficie minimal de Riemann*. Para cada ejemplo de Riemann  $R_\lambda$ , las

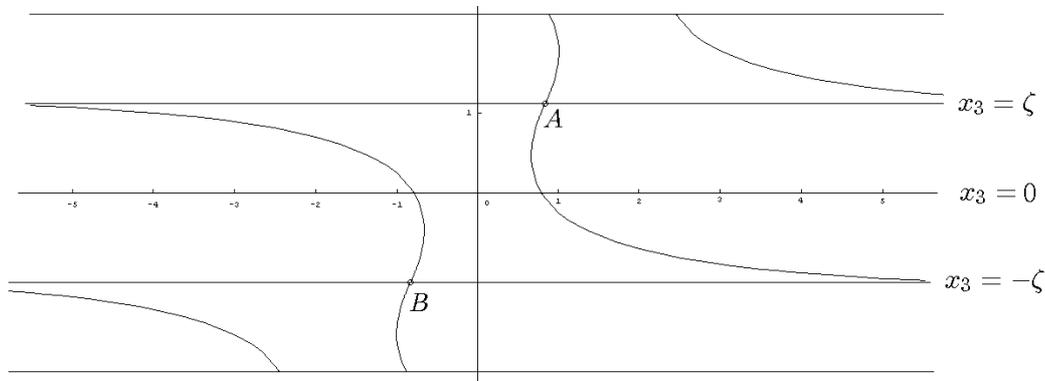


Figura 3: La intersección de la superficie  $R_\lambda$  con el plano de simetría  $\{x_2 = 0\}$ . La traslación de vector  $2(A - B)$  deja invariante a  $R_\lambda$ .

circunferencias de radio mínimo se encuentran exactamente en los planos  $\{x_3 = 2k\zeta(\lambda)\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , y dicho radio mínimo vale  $\sqrt{q_1(\lambda)} = \sqrt{(-\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2})/2}$ . Esta última función de  $\lambda \in \mathbb{R}$  es inyectiva (su derivada es estrictamente negativa), de donde concluimos que ninguna de las superficies  $R_\lambda$  son congruentes entre sí. Es decir,

*Los ejemplos de Riemann  $\{R_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$  constituyen una familia 1-paramétrica de superficies geoméricamente distintas.*

En la figura 3 tenemos la intersección de  $R_\lambda$  para  $\lambda = 1$  con el plano de simetría  $\Pi$ . Por los puntos  $A$  y  $B$  pasan dos rectas contenidas en la superficie, ortogonales a  $\Pi$ .

Visto como superficie completa en  $\mathbb{R}^3$ , cada ejemplo de Riemann  $R_\lambda$  tiene la topología de un cilindro menos una cantidad infinita discreta de puntos (llamados *finales*) y es invariante por una traslación  $T_\lambda$ . Si hacemos el cociente  $\mathcal{R}_\lambda = R_\lambda/T_\lambda$  obtenemos un toro menos dos puntos en la 3-variedad llana  $\mathbb{R}^3/T_\lambda$ . Además, la aplicación de Gauss se induce sobre  $\mathcal{R}_\lambda$ , tiene grado dos y exactamente dos puntos de ramificación. Tenemos entonces que la aplicación de Gauss es una función meromorfa sobre el toro punteado, de grado dos y con ceros y polos dobles en los dos finales.

## 5 Representación de los ejemplos de Riemann usando Mathematica

Con las parametrizaciones obtenidas en la sección precedente podríamos representar los ejemplos de Riemann fácilmente con ayuda de **Mathematica**. No obstante, como ya comentamos, las líneas rectas aparecen como límite cuando el parámetro  $q$  diverge. Esto nos ha hecho desestimar tal representación en beneficio de la parametrización conforme que nos da la representación de Weierstrass.

Recordemos que  $\mathcal{R}_\lambda = R_\lambda/T_\lambda$  es un toro menos dos puntos. Argumentos elementales de la Geometría Algebraica nos dicen que este toro es conformemente equivalente a la

curva algebraica:

$$\overline{M}_\sigma = \{(z, w) \in \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} : w^2 = z(z-1)(z+\sigma)\},$$

donde  $\sigma \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$  depende de  $\lambda$  en la forma que se verá más tarde, y que la aplicación de Gauss (véase la subsección 2.1) tiene la forma  $g^\sigma(z, w) = \rho z$ , para cierta constante  $\rho = \rho(\sigma) \in \mathbb{C}^*$ . Nosotros no vamos a entrar en cómo se dota de estructura de superficie de Riemann a la curva algebraica  $\overline{M}_\sigma$ . La idea original en la construcción de este tipo de superficies (que se debe también a Riemann) es encontrar un objeto geométrico donde esté bien definida, en este caso, la aplicación  $z \mapsto \sqrt{z(z-1)(z+\sigma)}$ , que es multivaluada en el plano complejo.

Puesto que la tercera función coordenada de la superficie es armónica y se puede extender de forma analítica a los puntos del infinito, su diferencial compleja (en lo que sigue la llamaremos *diferencial altura*) es una 1-forma holomorfa sobre el toro, sin ceros. De nuevo la Geometría Algebraica nos dice que, en este caso la tercera 1-forma de la representación de Weierstrass debe ser  $\phi_3^{\sigma, B} \equiv B \frac{dz}{w}$ ,  $B \in \mathbb{C}^*$  a determinar. Es claro que, tras aplicar a la superficie una adecuada homotecia, podemos suponer que  $|B| = 1$ .

## 5.1 Las simetrías de la superficie

Sabemos, a partir de los cálculos de la sección anterior, que cada superficie  $R_\lambda$  es invariante por varios movimientos rígidos del espacio que, por tanto, inducen isometrías intrínsecas de la superficie, que a su vez se traducen en automorfismos conformes de la curva algebraica  $\overline{M}_\sigma$ , holomorfos o antiholomorfos dependiendo de si preservan o invierten la orientación de la superficie en el espacio. Estas simetrías nos ayudarán a determinar las constantes  $\rho$  y  $B$ , que quedaban libres en el párrafo anterior.

La primera de las isometrías que queremos mencionar es la simetría respecto de una recta paralela al eje  $x_2$ , que corta al ejemplo de Riemann ortogonalmente a la altura de la circunferencia de menor radio. Se trata de una transformación,  $S_1$ , holomorfa (respeto la orientación) que actúa sobre  $g^\sigma$  de la siguiente forma  $g^\sigma \circ S_1 = -1/g^\sigma$  y sobre la diferencial altura como  $S_1^* \phi_3^{\sigma, B} = -\phi_3^{\sigma, B}$ . Por otra parte, esta isometría intercambia todos los puntos ramificación de  $g^\sigma$ . Así pues, deducimos que  $\rho = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$  y que la simetría induce sobre la curva algebraica la transformación  $S_1(z, w) = (-\frac{\sigma}{z}, -\sigma \frac{w}{z^2})$ .

Otra de las isometrías de  $R_\lambda$  es el giro de  $180^\circ$  respecto de una recta  $r$  paralela al eje  $x_2$  y que está contenida en la superficie. El efecto de una tal simetría, a la que llamaremos  $S_2$ , sobre la aplicación de Gauss es  $g^\sigma \circ S_2 = \overline{g^\sigma}$ , mientras que sobre la diferencial altura actúa como  $S_2^* \phi_3^{\sigma, B} = -\overline{\phi_3^{\sigma, B}}$ . Teniendo en cuenta que dicha transformación fijaba a los puntos de ramificación de  $g^\sigma$  (uno de ellos está sobre  $r$ ) deducimos que  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $B \in \{\pm 1, \pm i\}$  y que la simetría se traduce en el automorfismo  $S_2(z, w) = (\overline{z}, \pm \overline{w})$  de  $\overline{M}_\sigma$ . Además, la aplicación de Gauss a lo largo de  $r$  toma valores sobre  $\{x_2 = 0\}$ . En particular  $g^\sigma(1, 0)$  ha de ser un número real, lo que implica  $\sigma > 0$ .

**Nota 1** Consideremos la representación de Weierstrass  $(\overline{M}_\sigma, g^\sigma, \phi_3^{\sigma, B})$ . Si definimos el

biholomorfismo  $\Sigma : \overline{M}_{1/\sigma} \longrightarrow \overline{M}_\sigma$  dado por  $\Sigma(z, w) = (-\sigma z, i\sigma^{3/2} w)$ , entonces se tiene

$$g^\sigma \circ \Sigma = -g^{1/\sigma}, \quad \Sigma^* \phi_3^{\sigma, B} = \frac{i}{\sqrt{\sigma}} \phi_3^{1/\sigma, B}.$$

Un cambio de variable nos lleva a

$$\int_{\Sigma(P_0)}^{\Sigma(P)} \frac{i}{\sqrt{\sigma}} \phi_3^{1/\sigma, B} = \int_{P_0}^P \phi_3^{\sigma, B},$$

y lo mismo en las otras dos componentes de la representación de Weierstrass. Esto nos dice que podemos suponer, salvo movimientos rígidos y homotecias, que  $B = 1$ . De esta forma, la expresión de la isometría  $S_2$  queda fijada como

$$S_2(z, w) = (\bar{z}, -\bar{w}).$$

Por último, habíamos visto que cada ejemplo de Riemann es simétrico respecto al plano  $\{x_2 = 0\}$ . Esta simetría especular,  $S_3$ , induce una involución antiholomorfa de  $\overline{M}_\sigma$  que fija todos los puntos de ramificación de  $g^\sigma$  (incluidos los finales  $(0, 0), (\infty, \infty)$ ) y que preserva la tercera coordenada de la superficie. Es claro entonces que dicha transformación tiene la forma  $S_3(z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$ . Veamos que la anterior representación de Weierstrass da lugar a

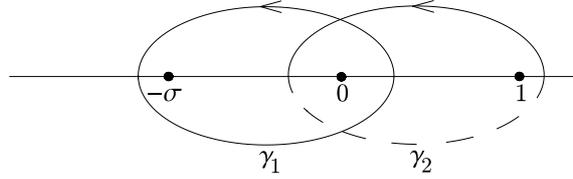


Figura 4: Las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en el  $z$ -plano.

una superficie minimal de  $\mathbb{R}^3$ , que es invariante por una traslación. Aquellos lectores más familiarizados con el estudio de curvas algebraicas no tendrán dificultad en reconocer una base de homología de  $\overline{M}_\sigma$  en  $\mathcal{B} = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ , siendo estas curvas los levantamientos a  $\overline{M}_\sigma$  por la  $z$ -proyección de las curvas representadas en la figura 4. La acción de las simetrías  $S_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , sobre la base  $\mathcal{B}$  y sobre la representación de Weierstrass implica

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \{x_2 = 0\}.$$

Esto nos dice que la representación de Weierstrass anterior da lugar a una inmersión minimal bien definida sobre el recubridor cilíndrico de  $\overline{M}_\sigma$  asociado al subgrupo cíclico  $\langle \gamma_1 \rangle$  del grupo fundamental de  $\overline{M}_\sigma$ . Llamaremos  $M_\sigma \subset \mathbb{R}^3$  a la imagen de dicha inmersión.

Como nuestra motivación en esta sección es la de obtener imágenes de las superficies minimales de Riemann usando **Mathematica**, y este programa sólo trabaja con parametrizaciones definidas sobre dominios del plano, nuestro siguiente objetivo será encontrar

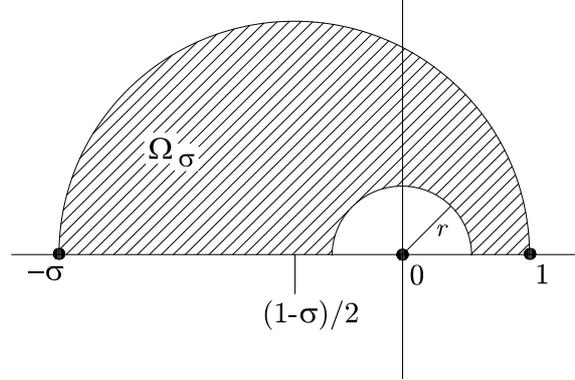


Figura 5: El dominio  $\Omega_\sigma$ .

una región simplemente conexa de  $M_\sigma$ , bordeada por líneas de simetría (a la que llamaremos pieza fundamental) y usaremos esa pieza para generar toda la superficie, gracias al principio de reflexión de Schwarz.

Teniendo en cuenta cómo actúan las isometrías  $S_2$  y  $S_3$  sobre el  $z$ -plano, es claro que bastaría con representar el trozo de  $M_\sigma$  que se obtiene cuando  $z$  se mueve sobre el semiplano superior. Usando ahora la simetría  $S_1$  podemos reducirnos únicamente al conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1-\sigma}{2}| \leq \frac{1+\sigma}{2}, \text{Im}(z) \geq 0\}$ . Por otro lado, el punto  $(z, w) = (0, 0)$  es un final de  $M_\sigma$ , así que eliminaremos un pequeño disco alrededor del origen, quedando una región plana,  $\Omega_\sigma$ , como la descrita en la figura 5.

De todo lo dicho, nuestra parametrización conforme debe ser  $X^\sigma : \Omega_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde

$$\begin{aligned} X_1^\sigma(z) &= \text{Re} \left( \int_1^z \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{\sigma}}{u} - \frac{u}{\sqrt{\sigma}} \right) \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u+\sigma)}} \right) \\ X_2^\sigma(z) &= \text{Re} \left( \int_1^z \frac{i}{2} \left( \frac{\sqrt{\sigma}}{u} + \frac{u}{\sqrt{\sigma}} \right) \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u+\sigma)}} \right) \\ X_3^\sigma(z) &= \text{Re} \left( \int_1^z \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u+\sigma)}} \right). \end{aligned}$$

La imagen por  $X^\sigma$  del trozo de frontera de  $\Omega_\sigma$  que cae sobre el intervalo  $[-\sigma, 0]$  corresponde a una curva plana de simetría, contenida en el plano  $\{x_2 = 0\}$ , mientras que la curva obtenida aplicando  $X^\sigma$  a  $[0, 1] \cap \Omega_\sigma$  es un segmento de una recta de simetría contenida en la superficie, paralela al eje  $x_2$ . Además, la imagen mediante  $X^\sigma$  de la semi-circunferencia exterior corresponde a una curva que es invariante por el giro de  $180^\circ$  alrededor de la recta paralela al eje  $x_2$ , pasando por  $X^\sigma(i\sqrt{\sigma})$  (que es un punto fijo de  $S_1$ ). No es difícil comprobar que, reflejando sucesivamente nuestra pieza fundamental respecto a las curvas de simetría de la frontera, obtenemos la superficie minimal completa  $M_\sigma \subset \mathbb{R}^3$ . No obstante, aún no hemos identificado rigurosamente esta  $M_\sigma$  como una de las  $R_\lambda$  obtenidas

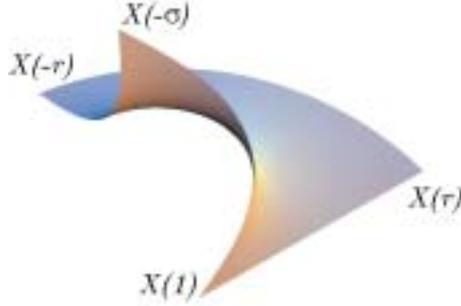


Figura 6: La pieza fundamental para  $\sigma = 1$ .

en la sección 4. Este es el propósito de la siguiente subsección.

## 5.2 La relación entre $M_\sigma$ y $R_\lambda$ . La función de Shiffman

Las superficies  $M_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ , construidas en la subsección precedente tienen, como ya dijimos, la topología de un cilindro menos una cantidad infinita discreta de puntos. Para superficies con este tipo topológico, Shiffman introdujo en 1956 una función que expresa la variación de la curvatura de las secciones planas de la superficie, que hoy día se conoce como *función de Shiffman*. Más precisamente, salvo homotecias, todo anillo minimal puede localmente representarse mediante  $\phi_3 = d\xi$  y  $g = g(\xi)$  siendo  $\xi = x + yi$  una coordenada holomorfa que se mueve en cierta banda vertical  $\{0 \leq x \leq x_0\}$ ,  $x_0 > 1$ . Geométricamente, esto significa que el anillo está contenido en la banda horizontal  $\{0 \leq x_3 \leq x_0\} \subset \mathbb{R}^3$ . Las curvas de nivel  $x_3 = c$  corresponden a  $\xi_c(y) = c + iy$ . Llamando  $\kappa_c$  a la curvatura de la curva plana  $x_3 = c$ , no es difícil comprobar que:

$$\kappa_c(y) = \left[ \frac{|g|}{1 + |g|^2} \operatorname{Re} \left( \frac{g'}{g} \right) \right] \Big|_{\xi=\xi_c(y)}.$$

La función de Shiffman se define como:

$$u = \Lambda \frac{\partial \kappa_c}{\partial y},$$

donde  $\Lambda$  es el factor conforme que liga la primera forma fundamental  $ds^2$  con el producto escalar del  $\xi$ -plano, es decir,  $ds^2 = \Lambda^2 |d\xi|^2$ . En particular,  $u \equiv 0$  equivale a que la superficie esté foliada por circunferencias en planos horizontales. Así pues, si probamos que  $u \equiv 0$  en  $M_\sigma$ , esta superficie habrá de coincidir con una  $R_\lambda$  para cierto valor de  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Un cálculo directo muestra que:

$$u = \operatorname{Im} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{g'}{g} \right)^2 - \frac{g''}{g} - \frac{1}{1 + |g|^2} \left( \frac{g'}{g} \right)^2 \right].$$

Como  $g^\sigma(z, w) = g(z, w) = \frac{z}{\sqrt{\sigma}}$  y  $d\xi = \phi_3^\sigma = \frac{dz}{w} = \sqrt{\sigma} \frac{g' d\xi}{w}$ , deducimos que  $w = \sqrt{\sigma} g'$  y por tanto  $(g')^2 = g(\sqrt{\sigma} + g)(-1 + \sqrt{\sigma} g)$ . Derivando en la expresión anterior obtenemos  $g'' = \frac{-\sqrt{\sigma}}{2} + (-1 + \sqrt{\sigma} g)g + \frac{3\sqrt{\sigma}g^2}{2}$ . Sustituyendo en la función de Shiffman se tiene que

$$u = \text{Im} \left[ \frac{(\sigma - 1)(|g|^2 - 1) - 4\sqrt{\sigma} \text{Re}(g)}{2(1 + |g|^2)} \right] = 0,$$

luego  $M_\sigma$  es una de las superficies  $R_\lambda$ , pero ¿cuál de ellas?. Queremos una expresión que ligue  $\lambda \in \mathbb{R}$  con  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ , de forma que las superficies  $R_\lambda$  y  $M_\sigma$  sean congruentes. Sabemos que  $g^\sigma(1, 0) = 1/\sqrt{\sigma}$ ,  $g^\sigma(-\sigma, 0) = -\sqrt{\sigma}$ , y también que  $X^\sigma(1, 0)$  y  $X^\sigma(-\sigma, 0)$  son los puntos de intersección de las rectas contenidas en  $M_\sigma$  con el plano de simetría vertical. Si calculamos el valor de la imagen estereográfica de la aplicación de Gauss de  $R_\lambda$  en dichos puntos habremos acabado nuestra pesquisa.

Con la parametrización  $X_\lambda(q, v)$  de  $R_\lambda$  dada en la sección 4, esos puntos se alcanzan cuando  $v = 0$  y  $q \rightarrow \infty$ , luego debemos calcular el límite cuando  $q$  tiende a  $\infty$  de  $\frac{N_1(q, 0)}{1 - N_3(q, 0)}$ , siendo  $(N_1, N_2, N_3)$  la aplicación de Gauss asociada a  $X_\lambda$ . Si uno calcula este límite obtiene  $\frac{2}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4}}$ , que por ser negativo, debe coincidir con  $-\sqrt{\sigma}$ . En otras palabras,

$$\sigma = \left( \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 + 4} - \lambda} \right)^2.$$

### 5.3 Parametrizando la superficie con Mathematica

A la hora de integrar, usando **Mathematica**, debemos tener presente que la elección de los gérmenes de las funciones multivaluadas que aparecen en la integración debe ser continua. Esa elección no coincide a veces con la estándar del programa, pero no queremos aburrir al lector con argumentos demasiados técnicos, así pues directamente escribimos las tres coordenadas de la parametrización ya integrada:

$$\begin{aligned} \text{x1}[\sigma_-][z_-] &:= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left( \left( \left( \sqrt{\frac{-1+z}{z}} \sqrt{z+\sigma} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{1+\sigma}} \left( 2 \left( (-1-\sigma) \text{EllipticE} \left[ \text{ArcSin} \left[ \sqrt{1+\frac{z}{\sigma}} \right], \frac{\sigma}{1+\sigma} \right] + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \text{EllipticF} \left[ \text{ArcSin} \left[ \sqrt{1+\frac{z}{\sigma}} \right], \frac{\sigma}{1+\sigma} \right] \right) \right) \right) \right) \\ \text{x2}[\sigma_-][z_-] &:= -\sqrt{\frac{-1+z}{-\sigma z}} \sqrt{\sigma+z} \\ \text{x3}[\sigma_-][z_-] &:= -2 \frac{\text{EllipticF} \left[ \text{ArcSin} \left[ \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma+z}} \right], \frac{1+\sigma}{\sigma} \right]}{\sqrt{\sigma}} \end{aligned}$$

Nos gustaría, para facilitar la representación gráfica, que el origen de coordenadas de  $\mathbb{R}^3$  estuviese situado en el punto  $v_0^\sigma = X^\sigma(1)$ . Es por esto que definimos una nueva parametrización, trasladando la anterior,  $\psi^\sigma(z) \stackrel{\text{def}}{=} X^\sigma(z) - v_0^\sigma$ :

$$v_0[\sigma_-] := \left\{ -2 \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\sqrt{-(1+\sigma)} \sigma} \left( (-1-\sigma) \operatorname{EllipticE} \left[ \operatorname{ArcSin} \left[ \sqrt{\frac{1+\sigma}{\sigma}} \right], \frac{\sigma}{1+\sigma} \right] + \operatorname{EllipticF} \left[ \operatorname{ArcSin} \left[ \sqrt{\frac{1+\sigma}{\sigma}} \right], \frac{\sigma}{1+\sigma} \right] \right) \right], 0, \right. \\ \left. -2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\operatorname{EllipticF} \left[ \operatorname{ArcSin} \left[ \sqrt{\frac{\sigma}{1+\sigma}} \right], \frac{1+\sigma}{\sigma} \right]}{\sqrt{\sigma}} \right] \right\}$$

$$\psi[\sigma_-][z_-] := \operatorname{Re}[\{\mathbf{x}_1[\sigma][z], \mathbf{x}_2[\sigma][z], \mathbf{x}_3[\sigma][z]\}] - v_0[\sigma]$$

De nuevo, para simplificar nuestra parametrización vamos a usar una transformación de Möbius que nos lleve una semi-corona circular  $\{e \leq |z| \leq 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ , para cierto  $e$ , en la región  $\Omega_\sigma$ ; posteriormente usaremos coordenadas polares sobre la semi-corona:

$$\mathbf{f}[z_-, \mathbf{a}_-, \mathbf{e}_-] := \frac{(-\mathbf{a}^2(1+\mathbf{e}^2)(-1+z) - 2\mathbf{a}(-3+\mathbf{e}^2)z - (1+\mathbf{e}^2)(1+z) + \operatorname{Sqrt}[4(-1+\mathbf{a})^2\mathbf{e}^2 + (1+\mathbf{a})^2(-1+\mathbf{e}^2)^2](1+\mathbf{a}(-1+z)+z)) / (2\operatorname{Sqrt}[4(-1+\mathbf{a})^2\mathbf{e}^2 + (1+\mathbf{a})^2(-1+\mathbf{e}^2)^2] - 2((1+\mathbf{a})(-1+\mathbf{e}^2) - 2(-1+\mathbf{a})z))}{1}$$

$$\mathbf{r}_1[\sigma_-][\mathbf{e}_-] := \operatorname{ParametricPlot3D}[\psi[\sigma][\mathbf{f}[\operatorname{rExp}[\mathbf{I} \operatorname{Pi} \mathbf{t}], \sigma, \mathbf{e}], \{\mathbf{r}, \mathbf{e}, 1\}, \{\mathbf{t}, 0, 1\}], \operatorname{PlotPoints} \rightarrow \{40, 60\}, \operatorname{Axes} \rightarrow \operatorname{False}];$$

Ya podemos dibujar una pieza fundamental como la que aparece en la Figura 6, que corresponde a ejecutar  $\mathbf{r}_1[1][0.1]$ . Pasemos ahora a definir las isometrías, para ello necesitamos cargar el paquete gráfico *Shapes*:

```
<< Graphics`Shapes`
```

$$\operatorname{simplano}[\mathbf{x}_-] := \operatorname{Show}[\mathbf{x}, \operatorname{AffineShape}[\mathbf{x}, \{1, -1, 1\}], \operatorname{PlotRange} \rightarrow \operatorname{All}]$$

$$\operatorname{simrecta1}[\mathbf{x}_-, \mathbf{v}_-] := \operatorname{Show}[\mathbf{x}, \operatorname{TranslateShape}[\operatorname{AffineShape}[\operatorname{TranslateShape}[\mathbf{x}, -\mathbf{v}], \{-1, 1, -1\}], \mathbf{v}]]$$

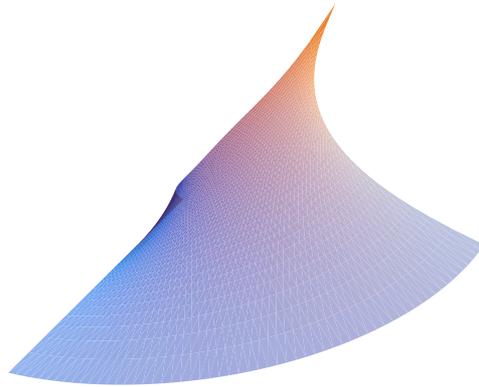
$$\operatorname{simrecta2}[\mathbf{x}_-] := \operatorname{Show}[\mathbf{x}, \operatorname{AffineShape}[\mathbf{x}, \{-1, 1, -1\}], \operatorname{PlotRange} \rightarrow \operatorname{All}]$$

La función `simplano` actúa sobre un gráfico tridimensional,  $\mathbf{x}$ , simetrizándolo respecto al plano  $x_2 = 0$ . Por su parte, `simrecta1` actúa sobre  $\mathbf{x}$  como el giro de  $180^\circ$  alrededor la recta paralela al eje  $x_2$ , pasando por el punto  $\mathbf{v}$ , que también es variable. La función `simrecta2` es simplemente el giro de  $180^\circ$  alrededor del eje  $x_2$ .

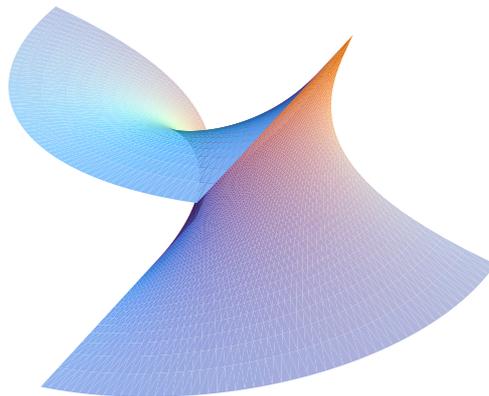
#### 5.4 Representando la superficie minimal de Riemann para $\sigma = 2$

Con todos estos ingredientes, ya podemos abordar la representación de un ejemplo concreto. Si queremos representar la superficie minimal de Riemann  $M_\sigma$  para  $\sigma = 2$ , ejecutamos:

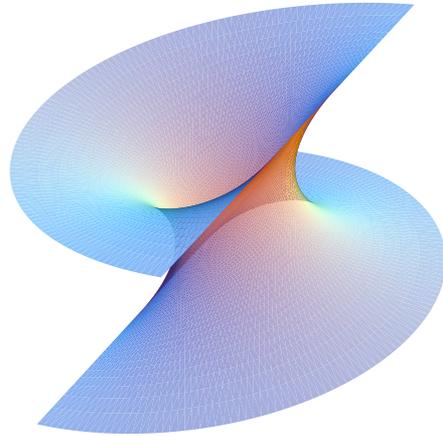
```
p1 = r1[2][0.1]
```



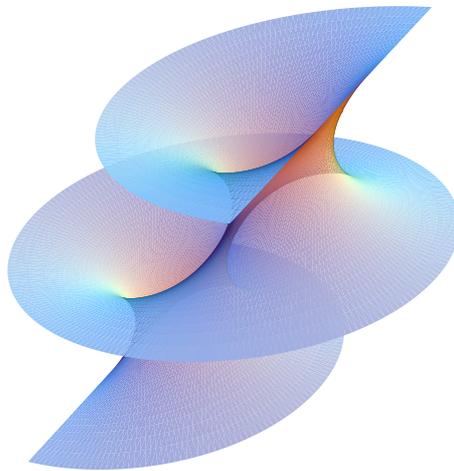
```
p2 = simrecta1[p1,  $\psi$ [2][Sqrt[2]I]]
```



```
p3 = simplano[p2]
```



`p4 = simrecta2[p3]`

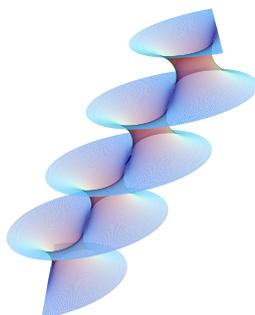


La superficie completa se obtiene haciendo sucesivas traslaciones de `p4` mediante el vector  $2t_0 = \psi(-\sigma)$ , en nuestro caso concreto  $2\psi(-2)$ . Definimos entonces  $t_0$ :

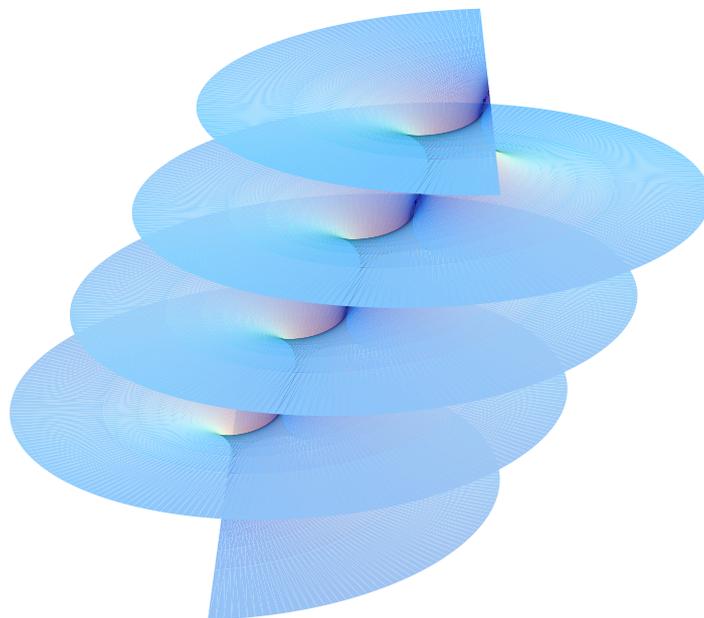
`t0 =  $\psi[2][-1.99999]$`

El evaluar en un punto próximo a  $-2$ , por la derecha, se debe simplemente al hecho, ya comentado, de que necesitamos usar una determinación continua de las funciones elípticas que aparecen en la expresión de  $\psi$ , para que lo que obtengamos se “pegue” bien con nuestra pieza ya construida. El error numérico que cometemos es despreciable, pues en la representación que estamos haciendo una diferencia de  $10^{-3}$  no se aprecia en la pantalla. Trasladamos pues y obtenemos:

```
Show[p4, TranslateShape[p4, 2t0], ViewPoint -> {0.049, -3.105, 1.344}]
```



Si queremos ver un poco mejor cómo es el comportamiento de la superficie en infinito, podemos disminuir el valor de  $e$  y repetir todo el proceso. La siguiente figura representa el caso  $e=0.02$ .



Como se puede apreciar en esta última figura, la superficie es asintótica a una familia infinita de planos paralelos e igualmente espaciados. Es por esto que a este tipo de finales de una superficie minimal, se les llama en general *finales planos*.

**Nota 2** Para valores muy grandes, o muy pequeños, del parámetro  $\sigma$  pueden aparecer imperfecciones en la figura, alrededor de  $\psi^\sigma(1)$  ó de  $\psi^\sigma(-\sigma)$  debido a que la distribución de la malla de puntos en la figura, que el programa usa para dibujar la superficie, no es homogénea con nuestra representación. Esto se puede corregir sustituyendo `Exp[I Pi t]` por `Exp[I Pi t^n]` en la definición de `r1[σ][z]`, con `n` grande si  $\sigma$  es próximo a 0, ó `n` próximo a cero si  $\sigma$  es muy grande.

Para aquellos lectores que deseen conocer más cosas sobre la representación de curvas y superficies usando *Mathematica*, les recomendamos, de forma general, la referencia [1] y de un modo más dirigido a las superficies minimales, los contenidos de la página Web [6].

Para terminar, nos gustaría comentar que los ejemplos de Riemann “durmieron el sueño de los justos” hasta la década de los 50 del siglo XX, en que cobraron interés a raíz de los trabajos de Shiffman que ya hemos mencionado. En el artículo de David Hoffman y William H. Meeks III [4] puede encontrarse un estudio detallado de las superficies de Riemann desde un punto de vista más actual, usando fundamentalmente la representación de Weierstrass. Las superficies minimales de Riemann siguen siendo objeto de estudio hoy día: actualmente está abierta, entre otras, la cuestión de decidir si éstas son las únicas superficies minimales propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$  con la topología del plano menos una cantidad infinita de puntos. Para más detalles véase [7].

## Referencias

- [1] L. A. Cordero, M. Fernández, A. Gray, *Geometría Diferencial de curvas y superficies con Mathematica*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- [2] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab, *Minimal surfaces, Vol. I*. Grundlehren der mathem. Wiss. 295, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [3] A. Enneper, *Die cyrklichen flachen.*, Z. Math. und Phys., Vol. **14** (1869), 393-421.
- [4] D. Hoffman, W. H. Meeks III, *Minimal surfaces based on the catenoid*, Amer. Math. Monthly **97** (1990), 702-730.
- [5] W. C. Jagy, *Minimal hypersurfaces foliated by spheres*, Michigan Math. J. **38** no. 2 (1991) 255–270.
- [6] F. Martín, J. Pérez, *Superficies minimales en  $\mathbb{R}^3$* , notas electrónicas de la Universidad de Granada, [http://www.ugr.es/local/fmartin/superficies\\_minimales.htm](http://www.ugr.es/local/fmartin/superficies_minimales.htm)
- [7] W. H. Meeks III, J. Pérez, A. Ros, *Uniqueness of Riemann minimal examples*. Invent. math., Vol. **131**, (1998) 107-132.
- [8] J. C. C. Nitsche, *Lectures on minimal surfaces, Vol. 1. Introduction, fundamentals, geometry and basic boundary value problems*. Cambridge University Press, 1989.

- [9] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*. Dover Pub., New York (1986).
- [10] R. Osserman (editor), *Geometry V. Minimal surfaces*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **90** Springer-Verlag (1997).
- [11] B. Riemann, *Über die Fläche vom Kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung*. Abh. Königl. Ges. d. Wiss. Göttingen, Mathem. Cl. **13**, 3-52 (1867) (K. Hattendorff, edit.) Véase también: B. Riemann, *Oeuvres mathématiques*. Les grands classiques Gauthier-Villars. Editions Jacques Gabay, Paris, 1990.
- [12] M. Shiffman, *On surfaces of stationary area bounded by two circles, or convex curves, in parallel planes*. Ann. of Math. (2) **63** (1956), 77–90.