Geometría I. Ingeniería Informática y Matemáticas
Convocatoria ordinaria. Curso 2015-2016

1. *En* $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ *se definen:*

$$\begin{aligned} (x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) &= (x_1+x_2, y_1 \cdot y_2), \quad \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2_+, \\ a \odot (x,y) &= (a \cdot x, y^a), \quad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_+. \end{aligned}$$

Se verifica que $\mathbb{R}^2_+$ *es un espacio vectorial real con estas operaciones. Se pide lo siguiente:*

(a) *Demostrar explícitamente la propiedad pseudoasociativa y una de las propiedades distributivas. ¿Qué elemento de* $\mathbb{R}^2_+$ *es el vector nulo (elemento neutro) para* $\oplus$*?*
Para la pseudoasociativa, tomemos $a, b \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$.

$$a \odot (b \odot (x,y)) = a \odot (b \cdot x, y^b) = (a \cdot (b \cdot x), (y^b)^a) = ((a \cdot b) \cdot x, y^{a \cdot b}) = (a \cdot b) \odot (x,y).$$

Las dos distributivas son: Dados $a \in \mathbb{R}$, $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$a \odot ((x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)) = a \odot (x_1+x_2, y_1 \cdot y_2) = (a \cdot (x_1+x_2), (y_1 \cdot y_2)^a)$$

$$= (a \cdot x_1 + a \cdot x_2, y_1^a \cdot y_2^a) = (a \cdot x_1, y_1^a) \oplus (a \cdot x_2, y_2^a) = [a \odot (x_1,y_1)] \oplus [a \odot (x_2,y_2)].$$

Y dados $a, b \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$(a+b) \odot (x,y) = ((a+b) \cdot x, y^{a+b}) = (a \cdot x + b \cdot x, y^a \cdot y^b)$$

$$= (a \cdot x, y^a) \oplus (b \cdot x, y^b) = [a \odot (x,y)] \oplus [b \odot (x,y)].$$

El elemento neutro de $\oplus$ es $(0,1) \in \mathbb{R}^2_+$, ya que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$(0,1) \oplus (x,y) = (0+x, 1 \cdot y) = (x,y), \quad (x,y) \oplus (0,1) = (x+0, y \cdot 1) = (x,y).$$

(b) *Estudiar si* $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x - \log(y) = 0\}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2_+$.
Dados $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in U$, tenemos que $(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1 \cdot y_2) \in U$ porque $(x_1+x_2) - \log(y_1 \cdot y_2) = (x_1 - \log y_1) + (x_2 - \log y_2) = 0 - 0 = 0$, es decir, U es cerrado para $\oplus$. Y si $a \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in U$, entonces $a \odot (x,y) = (a \cdot x, y^a) \in U$ porque $a \cdot x - \log(y^a) = a \cdot x - a \cdot \log(y) = a \cdot (x - \log(y)) = a \cdot 0 = 0$. Es decir, U es también cerrado para el producto por esclares $\odot$. Esto implica que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2_+$.

(c) *¿Son* $\mathcal{B} = \{(1,1),(0,1)\}$ *y* $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,e)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^2_+$*?*
Método 1. Consideremos la aplicación $f\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x, \log(y))$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_+$. Entonces, f es biyectiva porque su inversa es $f^{-1}(a,b) = (a, e^b)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Además f es lineal:

$$f((x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)) = f(x_1+x_2, y_1 \cdot y_2) = (x_1+x_2, \log(y_1 \cdot y_2))$$

$$= (x_1+x_2, \log(y_1) + \log(y_2)) = (x_1, \log(y_1)) + (x_2, +\log(y_2)) = f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2),$$

$$f(a \odot (x,y)) = f(a\cdot x, y^a) = (a\cdot x, \log(y^a)) = (a\cdot x, a\cdot \log(y)) = a\cdot (x, \log(y)) = a\cdot f(x,y).$$

Como f es lineal y biyectiva, entonces f es un isomorfismo de $\mathbb{R}^2_+$ en $\mathbb{R}^2$ (éste último con su estructura usual de espacio vectorial). Como los isomorfismos llevan bases en bases, deducimos que un subconjunto de vectores $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2_+$ será base de $\mathbb{R}^2_+$ si y sólo si $f(\mathcal{B})$ es base de $\mathbb{R}^2$. En nuestro caso,

$$\{f(1,1), f(0,1)\} = \{(1,\log(1)), (0,\log(1))\} = \{(1,0),(0,0)\} \quad \text{no es base de } \mathbb{R}^2,$$

mientras que

$$\{f(1,1), f(1,e)\} = \{(1,\log(1)), (1,\log(e))\} = \{(1,0),(1,1)\} \quad \text{sí es base de } \mathbb{R}^2.$$

Por tanto, $\mathcal{B}$ no es base de $\mathbb{R}^2_+$ (es linealmente dependiente) y $\mathcal{B}'$ sí es base de $\mathbb{R}^2_+$.
Este mismo método podía haberse usado para resolver el apartado (b): como $f\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, que U sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2_+$ equivale a que $f(U)$ sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Pero $f(U) = \{(x,\log(y)) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \log(y) = 0\} = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x - z = 0\}$, que es un subespacio vectorial de dimensión 1 de $\mathbb{R}^2$.

Método 2. También podemos realizar este apartado directamente con la definición de base. Nótese que $\mathcal{B}$ no es base pues contiene a $(0,1)$, que es el neutro para la suma $\oplus$ en $\mathbb{R}^2_+$. Veamos que $\mathcal{B}'$ sí es una base de $\mathbb{R}^2_+$. Comprobaremos que $\mathcal{B}'$ es un sistema de generadores linealmente independiente. Sean $a,b \in \mathbb{R}$. Operando, obtenemos:

$$[a\odot (1,1)] \oplus [b \odot (1,e)] = (a,1)\oplus (b,e^b) = (a+b, e^b).$$

Así, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, tendremos que $(x,y) = [a\odot(1,1)]\oplus[b\odot(1,e)]$ si y sólo si $a+b=x$, y $e^b = y$. Tomando logaritmos en la segunda ecuación se sigue que $b = \log(y)$, mientras que $a = x - b = x - \log(y)$. Esto prueba que $\mathcal{B}'$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2_+$. Para probar que $\mathcal{B}'$ es linealmente independiente consideramos una combinación lineal $[a\odot(1,1)]\oplus[b\odot(1,e)] = (0,1)$, lo que conduce a las ecuaciones $a+b=0$ y $e^b = 1$. Procediendo como antes deducimos que $a=b=0$ y se acaba.

2. *Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ siguientes:*

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0,\ x+y+z+t=0\},\\ W_\alpha &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-2y=0,\ \alpha x - y + z - t = 0\} \quad (\alpha\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(a) *Calcular una base de $U\cap W_\alpha$ y otra base de $U+W_\alpha$ para cada $\alpha\in\mathbb{R}$.*
Primero estudiamos U. Sumando y restando las ecuaciones que definen a U:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z-t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+z=0 \\ y+t=0 \end{array}\right.$$

luego $U = L(\{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\})$ y U tiene dimensión 2. Ahora estudiamos W_α con $\alpha\in\mathbb{R}$ arbitrario: Los coeficientes de las ecuaciones cartesianas de W_α forman la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2. Por tanto, W_α tiene dimensión $4-2=2$

independientemente de α, y una base de W_α es $\{(2,1,1-2\alpha,0),(0,0,1,1)\}$ (los dos vectores se obtienen a partir de las ecuaciones cartesianas de W_α, el primero dando los valores $y=1$, $t=0$, y el segundo dando los valores $y=0$, $t=1$). Juntamos las dos bases de U y de W_α y estudiamos dependencia lineal:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(I)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1-2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(II)}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-2\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-\alpha),$$

donde en (I) hemos sustituido la tercera fila por la suma de la segunda y tercera filas, y en (II) hemos desarrollado por los elementos de la segunda columna. Por tanto:

(A) Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$, entonces los cuatro vectores obtenidos al juntar las bases de U y W_α son linealmente independientes (luego forman una base de $\mathbb{R}^4$). Esto nos dice que $U + W_\alpha = \mathbb{R}^4$ y, por dimensiones, $\dim(U \cap W_\alpha) = \dim U + \dim W_\alpha - \dim(U + W_\alpha) = 2 + 2 - 4 = 0$, de donde $U \cap W_\alpha = \{0\}$. Por tanto, $U \cap W_\alpha$ no tiene bases.

(B) Si $\alpha = 1$, entonces los cuatro vectores obtenidos al juntar las bases de U y W_1 son linealmente dependientes. Pero los vectores de la base de U junto con el vector $(0,0,1,1)$ de base de W_1 son linealmente independientes, ya que el rango de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es claramente 3. Esto nos dice que $\{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1),(0,0,1,1)\}$ es una base de $U + W_1$. Queda calcular una base de $U \cap W_1$: Las ecuaciones cartesianas de $U \cap W_{\alpha=1}$ se obtienen juntando las de U con las de W_1:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} x & & +z & & = 0 \\ & y & & +t & = 0 \\ x & -2y & & & = 0 \\ x & -y & +z & -t & = 0 \end{array} \right.$$

La cuarta ecuación es la primera menos la segunda, luego podemos eliminarla. Al resolver el sistema formado por las tres primeras ecuaciones, obtenemos las soluciones $\{(-2t,-t,2t,t) = t(-2,-1,2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$, luego $\{(-2,-1,2,1)\}$ es base de $U \cap W_1$.

(b) *Obtener unas ecuaciones cartesianas para un subespacio que sea complementario de $U \cap W_1$ dentro de $U + W_1$.*

Hemos visto que $U + W_1$ tiene dimensión 3, y que $v_1 := (-2,-1,2,1)$ es una base de $U \cap W_1$. Así que el complementario que nos piden deberá tener dimensión $3 - 1 = 2$. Para elegirlo, necesitamos dos vectores v_2, v_3 de $U + W_1$ tales que el sistema $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea linealmente independiente (y en ese caso el complementario buscado será $L(\{v_2, v_3\})$). Tomo $v_2 = (0,-1,0,1)$ (que está en la base de U que calculamos en el apartado anterior, y por tanto está en $U + W_1$) y $v_3 = (0,0,1,1)$ (que está en la base de W_1 que calculamos en el apartado anterior, luego también está en $U + W_1$). Como la matriz $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3, entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un sistema linealmente independiente, luego $L(\{v_2, v_3\})$ es un complementario de $U \cap W_1$ dentro de $U + W_1$. Queda sólo calcular las ecuaciones cartesianas de $L(\{v_2, v_3\})$, que deben ser dos (por tener $L(\{v_2, v_3\})$ dimensión 2 en $\mathbb{R}^4$). Para ello, impongo que los menores de orden 3 de la matriz siguiente sean cero: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$.

Como el menor 2×2 formado por la intersección de las dos primeras filas con las dos últimas columnas de la última matriz tiene determinante distinto de cero, deducimos que las dos ecuaciones que buscamos se obtienen ampliando ese menor a un menor de orden 3 e igualando el determinante correspondiente a cero. Así obtenemos

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ y & z & t \end{vmatrix} = -t - y + z, \qquad 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & z & t \end{vmatrix} = -x,$$

luego las ecuaciones cartesianas de $L(\{v_2, v_3\})$ son $x = 0$, $y - z + t = 0$.

3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y $f \in End(V)$.*

   (a) *Probar que si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f)$, entonces $f|_{\mathrm{Im}(f)}$ es un automorfismo de $\mathrm{Im}(f)$.*

   Restringiendo $f\colon V \to V$ a $\mathrm{Im}(f)$ se obtiene $f|_{\mathrm{Im}(f)}\colon \mathrm{Im}(f) \to V$. La imagen de esta restricción es $\{f(y) \mid y \in \mathrm{Im}(f)\} = \{f(f(x)) \mid x \in V\} = \mathrm{Im}(f \circ f)$, que coincide con $\mathrm{Im}(f)$ por hipótesis. Por tanto, $f|_{\mathrm{Im}(f)}\colon \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ es un endomorfismo sobreyectivo, luego es un automorfismo (porque $\mathrm{Im}(f)$ tiene dimensión finita).

   (b) *Deducir que $V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ si y sólo si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f)$.*

   Supongamos que $V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, y veamos que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f)$. Por un lado,

$$\mathrm{Im}(f \circ f) = \{f(f(x)) \mid x \in V\} \subseteq \{f(y) \mid y \in V\} = \mathrm{Im}(f).$$

   Recíprocamente, si $y \in \mathrm{Im}(f)$ entonces existe $x \in V$ tal que $y = f(x)$. Como $V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, podemos descomponer (de forma única) $x = u + v$ donde $u \in \ker(f)$ y $v \in \mathrm{Im}(f)$. Así, $y = f(x) = f(u + v) = f(u) + f(v) = f(v)$, por ser f lineal y porque $u \in \ker(f)$. Finalmente, como $v \in \mathrm{Im}(f)$ entonces $v = f(w)$ para algún $w \in V$, de donde $y = f(v) = f(f(w)) = (f \circ f)(w)$, y hemos probado que $y \in \mathrm{Im}(f \circ f)$. Las dos inclusiones hacen que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f)$.

   Ahora supongamos que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f)$ y veamos que $V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Para ver esto último, empezamos comprobando que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Por el apartado (a), la hipótesis $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f)$ implica que $f|_{\mathrm{Im}(f)}$ es un automorfismo de $\mathrm{Im}(f)$. En particular, el núcleo de este automorfismo es $\{0\}$. Pero $\ker\left(f|_{\mathrm{Im}(f)}\right) = \{x \in \mathrm{Im(f)} \mid f(x) = 0\} = \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Por tanto, $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Finalmente, como $\ker(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$ son subespacios vectoriales de V cuyas dimensiones suman $\dim V$ (por la fórmula de la nulidad y el rango), el que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ implica que $V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

4. *En* $\mathbb{R}^3$ *se consideran las formas lineales* $\alpha, \beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dadas por* $\alpha(x,y,z) = y$, $\beta(x,y,z) = x+z$. *Encontrar un endomorfismo* $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $\ker(f^t) = L(\{\alpha,\beta\})$ *y* $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$.

   Tomando anuladores en $\ker(f^t) = L(\{\alpha,\beta\})$, esta condición es equivalente a $\operatorname{an}(\ker(f^t)) = \operatorname{an}(L(\{\alpha,\beta\}))$. Pero $\operatorname{an}(\ker(f^t)) = \operatorname{Im}(f)$, así que estamos imponiendo que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{an}(L(\{\alpha,\beta\}))$. Calculamos este último anulador:

$$\operatorname{an}(L(\{\alpha,\beta\})) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x+z = 0\} = L(\{(1,0,-1)\}).$$

   Por otro lado, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\} = L(\{(1,0,1),(0,1,0)\})$. Estos dos vectores (linealmente independientes) serán por tanto base del núcleo de f. Los amplío a una base de $\mathbb{R}^3$ con $(0,0,1)$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Finalmente, impongo que la imagen de f sea $L(\{(1,0,-1)\})$ mediante el cuadro siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (1,0,1) & \mapsto & (0,0,0) \\ & (0,1,0) & \mapsto & (0,0,0) \\ & (0,0,1) & \mapsto & (1,0,-1) \end{array}$$

   El teorema fundamental de las aplicaciones lineales asegura la existencia de un único endomorfismo que cumple el cuadro anterior. Es claro que f cumple $\operatorname{Im}(f) = L(\{(1,0,-1)\})$ y $\ker(f) = L(\{(1,0,1),(0,1,0)\})$, así que f cumple las propiedades deseadas (aunque f no es única con estas dos propiedades).