Examen final – 8 de junio de 2017

Curvas y Superficies, Grado en Matemáticas. Curso 2016/2017

1. *Resolver de forma razonada los siguientes apartados:*

   a) *Sean a y b números reales positivos. Se considera la elipse:*

$$C = \left\{ (x,u) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Obtener una curva regular $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(\mathbb{R}) = C$. Calcular la curvatura de α.
Si $(x,y) \in C$, entonces $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$, luego existe $t \in [0, 2\pi)$ de forma que $(a\cos t, b \operatorname{sen} t) = (x,y)$. Esto nos lleva a definir

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

α es diferenciable, $\alpha'(t) = (-a \operatorname{sen} t, b \cos t)$ tiene norma $\|\alpha'\| = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}$, que no puede anularse porque el seno y el coseno no se anulan simultáneamente. Por tanto, α es una curva regular y parametriza a C. Calculamos su curvatura:
$J\alpha' = -(b\cos t, a \operatorname{sen} t)$, $\alpha'' = -(a \cos t, b \operatorname{sen} t)$, luego la curvatura de α es

$$\kappa = \frac{\langle \alpha'', J\alpha' \rangle}{\|\alpha\|^3} = \frac{-ab}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

   b) *Sea $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura $\kappa > 0$. Supongamos que $\alpha(I) \subset \mathbb{S}^2(1)$ y que todas las rectas afines binormales a α son tangentes a $\mathbb{S}^2(1)$. Demostrar que $\alpha(I)$ está contenida en una circunferencia de radio 1.*

Como α es p.p.a. con curvatura positiva, admite triedro de Frenet $\{T, N, B\}$ y torsión τ. Dado $t \in I$, la recta afín binormal a α en el instante t es $\alpha(t) + \mathbb{R}B(t)$, y que esta recta sea tangente a $\mathbb{S}^2(1)$ equivale a que sea perpendicular el normal a la esfera en el punto $\alpha(t)$, es decir, al vector de posición $\alpha(t)$. Así que $\langle \alpha, B \rangle \equiv 0$ en I. Derivando y usando las ecuaciones de Frenet:
$0 = \langle T, B \rangle + \langle \alpha, B' \rangle = \langle \alpha, \tau N \rangle = \tau \langle \alpha, N \rangle$.
Si existe $t_0 \in I$ tal que $\tau(t_0) \neq 0$, entonces por continuidad de τ existe un intervalo abierto $J \subset I$ con $t_0 \in J$ tal que τ no se anula en ningún instante de J. Esto nos dice que en J tenemos $\langle \alpha, N \rangle \equiv 0$. Como $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, tenemos en J que
$\alpha = \langle \alpha, T \rangle T + \langle \alpha, N \rangle N + \langle \alpha, B \rangle B = \langle \alpha, T \rangle T$.
Pero $\langle \alpha, T \rangle = \langle \alpha, \alpha' \rangle = \frac{1}{2}(\|\alpha\|^2)' = 0$, porque $\|\alpha\|^2$ es constante 1. Esto nos dice que α es constante cero en J, contradicción.
Por tanto, τ debe ser idénticamente cero en I, es decir, α es una curva plana. Podemos entonces escribir $\langle \alpha, a \rangle \equiv c$ en I, donde $a \in \mathbb{S}^2(1)$ es el vector normal al plano Π que contiene a α y $c \in \mathbb{R}$. Si probamos que $c = 0$ tendremos que Π pasa por el origen, luego corta a $\mathbb{S}^2(1)$ en una circunferencia de radio 1, con lo que el problema estará terminado. Veamos que $c = 0$:
Derivando en $\langle \alpha, a \rangle \equiv c$ se obtiene $\langle T, a \rangle \equiv 0$. Volviendo a derivar y usando las ecuaciones de Frenet, $0 = \langle T', a \rangle = \langle \kappa N, a \rangle = \kappa \langle N, a \rangle$. Como κ no tiene ceros en I, deducimos que $\langle N, a \rangle \equiv 0$. De nuevo usamos que $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, luego en I se tiene
$a = \langle a, T \rangle T + \langle a, N \rangle N + \langle a, B \rangle B = \langle a, B \rangle B$, luego $B \equiv \pm a$ (sabíamos que B era constante por ser α plana). Finalmente, $c = \langle \alpha, a \rangle = \langle \alpha, \pm B \rangle = \pm \langle \alpha, B \rangle = 0$.

2. *Sea $\alpha \colon \to \mathbb{S}^2(1)$ una curva p.p.a. y embebida. Se llama cono sobre α a $S_\alpha = X(I \times \mathbb{R}^+)$ donde $X \colon I \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación dada por $X(s,t) = t\alpha(s)$. Se pide lo siguiente:*

a) *Demostrar que S_α es una superficie orientable.*

X es diferenciable, por ser α diferenciable. Veamos que X es una parametrización y S_α será una superficie (ya que X_α será una parametrización global de S_α):

$X_s = t\alpha'(s)$, $X_t = \alpha(s)$. Estos dos vectores son no nulos (porque α es unitaria y p.p.a. y $t > 0$) y ortogonales (porque $2\langle \alpha, \alpha' \rangle = (\|\alpha\|^2)' \equiv 0$ ya que $\|\alpha\|^2 \equiv 1$). Asíque X_s, X_t son linealmente independientes en todo $(t, s) \in I \times \mathbb{R}^+$.

Veamos que X es inyectiva: sean $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in I \times \mathbb{R}^+$ tales que $X(s_1, t_1) = X(s_2, t_2)$. Entonces, $t_1\alpha(s_1) = t_2\alpha(s_2)$, luego tomando normas, $t_1 = t_2$ y por tanto $\alpha(s_1) = \alpha(s_2)$. Como α está embebida, no tiene autointersecciones luego es inyectiva y por tanto, $s_1 = s_2$. Hemos demostrado que X es inyectiva.

Por ser X inyectiva, X es biyectiva sobre su imagen S_α, y por tanto admite inversa $X^{-1} \colon S_\alpha \to I \times \mathbb{R}^+$, que será del tipo $X^{-1}(p) = (s, t)$ donde s, t dependen de $p \in S_\alpha$. Veamos que X^{-1} es continua: como $p = X(s, t) = t\alpha(s)$, tomando normas tenemos $\|p\| = t > 0$ y por tanto $\alpha(s) = \frac{p}{\|p\|}$ luego $s = \alpha^{-1}(\frac{p}{\|p\|})$ (α admite inversa sobre su imagen porque se supone que α es un embebimiento topológico). Esto nos dice que $X^{-1}(p) = (\alpha^{-1}(\frac{p}{\|p\|}), \|p\|)$, que es continua por serlo la norma y α^{-1} (de nuevo por ser α un embebimiento topológico). Luego X es continua, biyectiva sobre su imagen y con inversa continua. Es decir, X es un embebimiento topológico de $I \times \mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^3$ con imagen S_α.

Finalmente, X es parametrización por ser diferenciable, homeomorfismo sobre su imagen y por ser X_s, X_t linealmente independientes en todo $(t, s) \in I \times \mathbb{R}^+$. Y por tanto, S_α es una superficie. Además, S_α es orientable porque la parametrización X es global.

b) *Probar que S_α es llana. Calcular H sobre S_α.*

Calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental de S_α respecto de la parametrización X:

$E = \|X_s\|^2 = \|t\alpha'\|^2 = t^2$, por ser α p.p.a.

$F = \langle X_s, X_t \rangle = 0$, porque lo probamos en el apartado anterior.

$G = \|X_t\|^2 = \|\alpha\|^2 = 1$, porque α está valuada en $\mathbb{S}^2(1)$.

Por tanto , $EG - F^2 = t^2$. En cuanto a los coeficientes de la segunda forma fundamental, tenemos que

$$N \circ X = \frac{X_s \times X_t}{\|X_s \times X_t\|} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} X_s \times X_t = \frac{1}{t} t\, \alpha' \times \alpha = \alpha' \times \alpha$$

es una aplicación de Gauss N para S_α, y

$e = \langle X_{ss}, N \circ X \rangle = \langle t\alpha'', \alpha' \times \alpha \rangle = -t \det(\alpha, \alpha', \alpha'')$,

$f = \langle X_{st}, N \circ X \rangle = \langle \alpha', \alpha' \times \alpha \rangle = 0$,

$g = \langle X_{tt}, N \circ X \rangle = \langle 0, \alpha' \times \alpha \rangle = 0$.

Luego $eg - f^2 = 0$ de donde $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \equiv 0$ (S_α es llana), y

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{-t \det(\alpha, \alpha', \alpha'')}{t^2} = -\frac{1}{2t} \det(\alpha, \alpha', \alpha'').$$

c) *Sean $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{S}^2(1)$ dos curvas p.p.a. y embebidas. Demostrar que los conos S_α y S_β son superficies isométricas.*

Vamos a encontrar una isometría entre S_α y S_β. Consideremos las parametrizaciones globales $X(s, t) = t\alpha(s)$ de S_α de $Y(s, t) = t\beta(s)$ de S_β, ambas definidas en $I \times \mathbb{R}^+$. Entonces, $Y \circ X^{-1} \colon S_\alpha \to S_\beta$ es un difeomorfismo (es composición de difeomorfismos).

Para probar que $Y \circ X^{-1}$ es una isometría basta comprobar que en cada $(s, i) \in I \times \mathbb{R}^+$ la diferencial de $Y \circ X^{-1}$ es una isometría de espacios vectoriales entre los espacios tangentes $T_{X(s,t)}S_\alpha$ y $T_{Y(s,t)}S_\beta$. Esto equivale a que los coeficientes de la primera forma fundamental de S_α respecto a X en (s, t) coincidan con los coeficientes de la primera forma fundamental de S_β respecto a Y en (s,t). Pero hemos visto en el apartado anterior que estos coeficientes son $E(s,t)=t^2$, $F=0$, $G=1$, y ninguno de ellos depende de α, β. Por tanto, $Y\circ X^{-1}$ es una isometría de S_α en S_β.

3. *Resolver de forma razonada los siguientes apartados:*

   a) *En el cilindro S de ecuación $x^2+y^2=1$ se define $\alpha\colon I\to S$ como:*

   $$\alpha(t)=(\cos\theta(t),\operatorname{sen}\theta(t),at+b),$$

   donde $\theta\in C^\infty(I)$ y $a,b\in\mathbb{R}$. Probar que α es geodésica de S si y sólo si $\theta(t)=ct+d$, para ciertas constantes $c,d\in\mathbb{R}$.

   Calculo la velocidad y la aceleración de α:
   $\alpha'=(-\theta'\operatorname{sen}\theta,\theta'\cos\theta,a)$,
   $\alpha''=(-\theta''\operatorname{sen}\theta-(\theta')^2\cos\theta,\theta''\cos\theta-(\theta')^2\operatorname{sen}\theta,0)$.
   Tomamos como aplicación de Gauss de S al normal exterior, es decir $N(x,y,z)=(x,y,0)$, con lo que $N\circ\alpha=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,0)$ y
   $\langle\alpha'',N\circ\alpha\rangle=-\theta''\operatorname{sen}\theta\cos\theta-(\theta')^2\cos^2\theta+\theta''\cos\theta\operatorname{sen}\theta-(\theta')^2\operatorname{sen}^2\theta=-(\theta')^2$.
   Por tanto, $(\alpha'')^T=\alpha''-\langle\alpha'',N\circ\alpha\rangle(N\circ\alpha)=(-\theta''\operatorname{sen}\theta,\theta''\cos\theta,0)$. Como el seno y el coseno no se anulan simultáneamente, tenemos que α es geodésica de S si y solo si $(\alpha'')^T\equiv0$, si y solo si $\theta''\equiv0$, es decir, $\theta(t)=ct+d$, para ciertas constantes $c,d\in\mathbb{R}$.

   a) *Sea S una superficie orientable y P un plano afín tales que $S\cap P=\alpha(I)$, donde $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^3$ es una curva p.p.a. Demostrar que si S y P se cortan ortogonalmente a lo largo de α, entonces α es una geodésica de S. ¿Es α una geodésica de P?*

   Tomemos un vector unitario $a\in\mathbb{R}^3$ ortogonal a la variedad de dirección $\vec{P}$ de P. Como S y P se cortan ortogonalmente a lo largo de α', deducimos que $a\in T_\alpha S$ (para todo instante). Como α' es unitario y tangente a S, entonces $\{\alpha',a\}$ es una base ortonormal de $T_\alpha S$, y $\alpha'\times a$ es normal (y unitario) a S en α. Por otro lado, $\alpha'\in\vec{P}$ porque α está valuada en P y P es un plano afín. Por la misma razón, $\alpha''\in\vec{P}$. Pero una base ortonormal de P es $\{\alpha',\alpha'\times a\}$, luego α'' será combinación lineal de α' y $\alpha'\times a$. El coeficiente de dicha combinación lineal en la dirección de α' es $\langle\alpha'',\alpha'\rangle$, que vale cero porque α está parametrizada proporcionalmente al arco. Así que α'' lleva la dirección de $\alpha'\times a$, que es normal a S en α. Es decir, $(\alpha'')^T=0$, luego α es geodésica de S.

   Sin embargo, para que α sea geodésica de P, la traza de α ha de ser un segmento de recta, pero eso no tiene porqué ser cierto (por ejemplo, si S es un cilindro vertical y P un plano horizontal). Luego α no tiene porqué ser una geodésica de P.

4. *Resolver de forma rigurosa y razonada los siguientes apartados:*

   a) *Dada una superficie compacta S, probar que existe $p\in S$ tal que la recta afín normal a S en p es paralela al eje z.*

   Que la recta afín normal a S en $p\in S$ sea paralela al eje z equivale a que T_pS sea horizontal, es decir, que p sea un punto crítico de la función altura $f\colon S\to\mathbb{R}$, $f(p)=\langle p,e_3\rangle$, donde $e_3=(0,0,1)$.

   Como S es compacta y f es continua (es diferenciable), entonces f admite un máximo y un mínimo en S. Cualquiera de estos puntos de máximo o mínimo es un punto crítico de f, y por tanto cumple lo pedido.

   b) *Sea S una superficie orientable y $p\in S$ de forma que $K(p)=4$ y $H(p)=0$. Probar que existe una sección normal de S en p cuya curvatura en p se anula.*

   Como $K(p)=-4<0$, las dos curvaturas principales en p son de signos contrarios (no nulos), luego p es un punto hiperbólico. En un punto hiperbólico, existen dos direcciones asintóticas, es decir, direcciones no cero en T_pS cuyas curvaturas normales se anulan. Las secciones normales de S asociadas a estas dos direcciones asintóticas cumplen lo pedido.

c) *Demostrar que si una superficie compacta y conexa S con $K > 0$ cumple la igualdad $H + bK = 0$ con $b \in \mathbb{R}$, entonces S es una esfera.*

Vamos a aplicar el Teorema de Hilbert. Como S es compacta, S es orientable. Elegimos una orientación en S y llamamos $k_1 \leq k_2 \colon S \to \mathbb{R}$ a las curvaturas principales de S, que son funciones continuas. Sea $p_0 \in S$ un mínimo de k_1 en S, que existe por ser k_1 continua y S compacta. Veamos que k_2 alcanza un máximo en p_0:

En cualquier punto de S se tiene $0 = H + bK = \frac{k_1+k_2}{2} + bk_1k_2 = \frac{k_1}{2} + k_2(\frac{1}{2} + bk_1)$. Notemos que $\frac{1}{2} + bk_1$ no puede tener ceros en S, porque la última ecuación implicaría que k_1 se anularía en cada cero de $\frac{1}{2} + bk_1$, lo que contradice que K no los tiene. Así que podemos despejar k_2 en la última ecuación, obteniendo

$$k_2 = \frac{-k_1}{1 + 2bk_1}.$$

Pero la función $f(x) = \frac{-x}{1+2bx}$ tiene derivada $f'(x) = \frac{-1}{(1+2bx)^2} < 0$, luego f es estrictamente decreciente. Por tanto, k_2 es función estrictamente decreciente de k_1. Como k_1 tiene un mínimo en p_0, deducimos que k_2 alcanza un máximo en p_0.

Como k_1 tiene un mínimo en p_0, k_2 tiene un máximo en p_0 y p_0 es elíptico (porque $K > 0$), el Teorema de Hilbert asegura que p_0 es un punto umbilical. Finalmente, dado cualquier $p \in S$ se tiene

$$k_1(p_0) \leq k_1(p) \leq k_2(p) \leq k_2(p_0) = k_1(p_0),$$

luego $k_1(p) = k_2(p)$, es decir, p es umbilical. Como esto es para todo $p \in S$, entonces S es totalmente umbillical. Como S es compacta y conexa, deducimos que S es una esfera.