Examen parcial – 4 de mayo de 2017

Curvas y Superficies, Grado en Matemáticas. Curso 2016/2017

1. *Se considera la curva* $\alpha(t) = \big(t, \frac{4}{3}t^{3/2}, t^2\big)$*,* $t > 0$*. Determinar* $t_0 > 0$ *tal que la longitud de* α *de* t_0 *a* 1 *sea igual que la longitud de* α *de* 1 *a* $3/2$*.*

   $\alpha'(t) = (1, 2t^{1/2}, 2t)$ luego $\|\alpha'(t)\|^2 = 1 + 4t + 4t^2 = (1 + 2t)^2$. Por tanto, dados $a, b > 0$ con $a \leq b$, la longitud de α de a a b es

   $$L(\alpha)_a^b = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b (1 + 2t) dt = \big[t + t^2\big]_a^b = (b + b^2) - (a + a^2).$$

   Calculamos t_0 imponiendo que $L(\alpha)_{t_0}^1 = L(\alpha)_1^{3/2}$, es decir, $2 - (t_0 + t_0^2) = (\frac{3}{2} + \frac{9}{4}) - 2$. Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son $t_0 = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{2})$. Como t_0 ha de ser positivo, concluimos que $t_0 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})$.

2. *Calcular la curvatura y la torsión de la hélice hiperbólica,* $\alpha(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, t)$*,* $t \in \mathbb{R}$*.*

   $\alpha'(t) = (\operatorname{senh} t, \cosh t, 1)$, $\alpha''(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, 0)$, $\alpha'''(t) = (\operatorname{senh} t, \cosh t, 0)$.

   Por tanto, $\|\alpha'\|^2 = \operatorname{senh}^2 t + \cosh^2 t + 1 = 2\cosh^2 t$,
   $\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (-\operatorname{senh} t, \cosh t, -1)$,
   $\|\alpha' \times \alpha''\|^2 = \operatorname{senh}^2 t + \cosh^2 t + 1 = 2\cosh^2 t$.

   La curvatura de α viene dada por
   $\kappa_\alpha = \dfrac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \dfrac{\sqrt{2}\cosh t}{\sqrt{2}^3 \cosh^3 t} = \dfrac{1}{2\cosh^2 t}$, que no tiene ceros.

   Por otro lado, $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = 1$ luego la torsión de α viene dada por
   $\tau = -\dfrac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = -\dfrac{1}{2\cosh^2 t}$.

3. *Sea* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ *una curva parametrizada por el arco, con campo normal* N *y curvatura* κ*. Dado* $d \in \mathbb{R}$*, sea* $\beta\colon I \to \mathbb{R}^2$ *la curva dada por* $\beta(t) = \alpha(t) + dN(t)$*. Probar que si* $1 - d\kappa$ *no tiene ceros, entonces* β *es regular y su curvatura es*

   $$\kappa_\beta = \frac{\kappa}{|1 - d\kappa|}.$$

   β es diferenciable, porque tanto α como N lo son. Por las ecuaciones de Frenet, $\beta'(t) = \alpha'(t) + dN'(t) = T(t) - d\kappa(t)T(t) = (1 - d\kappa(t))T(t)$, donde T es el campo tangente a α. Si $1 - d\kappa$ no tiene ceros, lo anterior prueba que β' no puede anularse, luego β es una curva regular. Pero β no está parametrizada por el arco, luego su curvatura viene dada por

   $$\kappa_\beta(t) = \frac{\langle \beta''(t), J\beta'(t)\rangle}{\|\beta'(t)\|^3}.$$

   Como $\beta'' = -d\kappa' T + (1 - d\kappa)T' = -d\kappa' T + (1 - d\kappa)\kappa N$ y $J\beta' = J(1 - d\kappa)T) = (1 - d\kappa)JT = (1 - d\kappa)N$ y T, N son ortogonales, tenemos $\langle \beta'', J\beta'\rangle = (1 - d\kappa)^2\kappa$ luego
   $\kappa_\beta = \dfrac{\langle \beta'', J\beta'\rangle}{\|\beta'\|^3} = \dfrac{(1 - d\kappa)^2\kappa}{|1 - d\kappa|^3} = \dfrac{\kappa}{|1 - d\kappa|}$.

4. *Considera la aplicación* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida como* $X(u, v) = (u + v, 1 - 4uv, u - v)$*.*

   a) *Prueba que* $S = X(\mathbb{R}^2)$ *es una superficie regular de* $\mathbb{R}^3$*.*
   Llamamos $x = u + v$, $y = 1 - 4uv$, $z = u - v$. Despejando u, v de la primera y la tercera ecuación, tenemos $u = \frac{1}{2}(x + z)$, $v = \frac{1}{2}(x - z)$.

Ahora consideramos la aplicación $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\phi(x,z) = \left(\frac{1}{2}(x+z), \frac{1}{2}(x-z)\right) := (u(x,z), v(x,z)),$$

que es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo (es lineal y biyectiva). Claramente, $X \circ \phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ viene dada por $(X\circ\phi)(x,z) = (x, 1-4u(x,z)v(x,z), z) = (x, 1-x^2+z^2, z)$. Por tanto, $(X\circ\phi)(\mathbb{R}^2)$ es una superficie, porque es el grafo de la función $f(x,z) = 1-x^2+z^2$, $(x,z)\in\mathbb{R}^2$, con parametrización global $X\circ\phi$. Pero $(X\circ\phi)(\mathbb{R}^2) = X(\mathbb{R}^2) = S$, luego S es una superficie regular.

Otra forma de ver que S es una superficie consiste en probar directamente que X es una parametrización.

b) *¿Es S el grafo de alguna función?*

Sí, de la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,z) = 1-x^2+z^2$ (ver apartado anterior).

c) *Calcula el plano tangente a S en el punto $p_0 = (1,1,-1)$.*

$(1,1,-1) = X(0,1)$ luego $T_{p_0}S$ es el plano vectorial generado por los vectores $X_u(0,1)$ y $X_v(0,1)$. Como $X_u(u,v) = (1,-4v,1)$, $X_v(u,v) = (1,-4u,-1)$, tenemos que $T_{p_0}S = L(\{(1,-4,1),(1,0,-1)\})$.

d) *Calcula una aplicación de Gauss de S.*

Podemos usar que X es una parametrización global de S (esto se deduce de que $X\circ\phi$ es parametrización por sre un grafo global y ϕ es un difeomorfismo).

$$N\circ X = \frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1+8u^2+8v^2}}(2(u+v), 1, 2(-u+v))$$

5. *Sea S una superficie compacta con $\vec{0}\notin S$. Probar que existen números positivos $a\le b$ tales que $S\subset\{p\in\mathbb{R}^3 \mid a\le\|p\|\le b\}$ y S corta tangencialmente a $\mathbb{S}^2(\vec{0},a)$ y $\mathbb{S}^2(\vec{0},b)$.*

Consideramos la función $f\colon S\to\mathbb{R}$ dada por $f(p) = \|p\|$. Como $0\notin S$, concluimos que f es diferenciable y positiva sobre S. Como S es compacta y f es continua, existen $p_0, q_0\in S$ tales que f alcanza su mínimo $a>0$ en p_0 y su máximo $b\ge a$ en q_0 (ni p_0 ni q_0 han de ser únicos). La condición de mínimo y máximo de f nos dice que $\forall p\in S$, $a\le f(p) = \|p\|\le b$ luego $S\subset\{p\in\mathbb{R}^3 \mid a\le\|p\|\le b\}$.

Ahora estudiamos la intersección $S\cap\mathbb{S}^2(\vec{0},a)$. Esta intersección es no vacía ya que $p_0\in S\cap\mathbb{S}^2(\vec{0},a)$. Y si $p\in S\cap\mathbb{S}^2(\vec{0},a)$, entonces f alcanza un mínimo en p, luego p es un punto crítico de f, es decir, $df_p = 0$. Como esta diferencial viene dada por $df_p(v) = \frac{1}{\|p\|}\langle v,p\rangle$ $\forall v\in T_pS$, concluimos que $\langle v,p\rangle = 0$ $\forall v\in T_pS$, es decir, $T_pS = \{p\}^\perp$. Como por otro lado el plano tangente a $\mathbb{S}^2(\vec{0},a)$ en p es $T_p\mathbb{S}^2(\vec{0},a) = \{p\}^\perp$, deducimos que $T_pS = T_p\mathbb{S}^2(\vec{0},a)$ luego la intersección de S y $\mathbb{S}^2(\vec{0},a)$ en p es tangencial. Esto ocurre en cada punto de $S\cap\mathbb{S}^2(\vec{0},a)$, luego S corta a $\mathbb{S}^2(\vec{0},a)$ tangencialmente. El mismo argumento prueba que S corta a $\mathbb{S}^2(\vec{0},b)$ tangencialmente.