Examen parcial – 3 de junio de 2017

Curvas y Superficies, Grado en Matemáticas. Curso 2016/2017

1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta, contenida en una bola de radio $r > 0$. Probar que existe un punto $p \in S$ tal que $K(p) \geq \frac{1}{r^2}$ y $|H(p)| \geq \frac{1}{r}$.*

   Salvo una traslación, podemos suponer que la bola de radio r que contiene a S está centrada en el origen de $\mathbb{R}^3$. Consideremos la función distancia al cuadrado al origen, $f\colon S \to \mathbb{R}$, $f(p) = \|p\|^2$, que es diferenciable. Sabemos que un punto $p_0 \in S$ es crítico para f si y sólo si $T_{p_0}S$ es perpendicular a p_0, es decir, $p_0 = \lambda N_{p_0}$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $N\colon S \to \mathbb{S}^2(1)$ una aplicación de Gauss de S (que existe, porque S el orientable al ser compacta). También vimos en clase que dado un punto crítico $p_0 \in S$ de f, el hessiano de f en p_0 viene dado por

   $$(\nabla^2 f)_{p_0}(v) = 2(\|v\|^2 + \lambda \cdot \sigma_{p_0}(v, v)),$$

   donde σ es la segunda forma fundamental de S respecto de N.

   Ahora tomemos un punto $p_0 \in S$ donde f alcance un máximo, que existe por ser S compacta y f continua. Como p_0 es un máximo de f, se tiene que $(\nabla^2 f)_{p_0}$ es semidefinido negativo. Por tanto, $\|v\|^2 + \lambda \cdot \sigma_{p_0}(v, v) \leq 0$ para todo $v \in T_{p_0}S$. Sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de direcciones principales en p_0 (si p_0 fuera umbilical, tomamos cualquier base ortonormal de $T_{p_0}S$), y sean k_1, k_2 las curvaturas principales en p_0 respecto a N. Tomando $v = e_i$ tenemos

   $$0 \geq \|e_i\|^2 + \lambda \cdot \sigma_{p_0}(e_i, e_i) = 1 + \lambda \cdot k_i, \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

   Por tanto, $1 \leq (-\lambda)k_i$, $i = 1, 2$. Multiplicando estas inecuaciones para $i = 1$ e $i = 2$ queda $1 \leq \lambda^2 \cdot k_1 k_2 = \lambda^2 \cdot K(p_0)$, donde K es la curvatura de Gauss de S. Por tanto, $K(p_0) \geq 1/\lambda^2$. Por otro lado, tomando normas en $p_0 = \lambda N_{p_0}$ tenemos $|\lambda| = \|\lambda N_{p_0}\| = \|p_0\| \leq r$, siendo esta última desigualdad cierta porque S está contenida en la bola de radio r centrada en el origen. Así que $K(p_0) \geq 1/\lambda^2 \geq 1/r^2$.

   Finalmente, de la desigualdad $H^2 \geq K$ (válida para todo punto de toda superficie) y lo que acabamos de probar se deduce que $H(p_0)^2 \geq K(p_0) \geq 1/r^2$, luego $|H(p_0)| \geq \frac{1}{r}$. Esta última desigualdad también podría haberse obtenido sumando las inecuaciones (1) para $i = 1$ e $i = 2$.

2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta y conexa, con curvatura de Gauss positiva. Si H/K es constante, probar que S es una esfera.*

   S es orientable por ser compacta. Elegimos una orientación en S (equivalentemente, elegimos una aplicación de Gauss N para S) y llamamos $k_1 \leq k_2\colon S \to \mathbb{R}$ a las correspondientes curvaturas principales. Como k_1 es continua y S es compacta, podemos elegir un punto $p_0 \in S$ donde k_1 alcanza su mínimo. Veamos que k_2 alcanza su máximo en p_0: notemos que

   $$\frac{H}{K} = \frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right). \tag{2}$$

   Como H/K es constante, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ también lo es. Como k_1 tiene un mínimo en p_0, entonces $1/k_1$ tiene un máximo en p_0. Como $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ es constante en S, deducimos que $1/k_2$ tiene un mínimo en p_0, luego k_2 tiene un máximo en p_0. Esto mismo podría haberse obtenido probando que k_2 es función estrictamente decreciente de k_1, lo cual se obtiene despejando k_2 de (2): $k_2 = \frac{k_1}{ck_1 - 1}$, donde c es la constante $2H/K$. Como la función $f(x) = \frac{x}{cx-1}$ tiene derivada $f'(x) = \frac{-1}{(cx-1)^2} < 0$, tenemos que f es estrictamente decreciente. Por tanto, k_2 es función estrictamente decreciente de k_1.

   Como p_0 es un punto elíptico de S (todos los son por ser K positiva), el Teorema de Hilbert nos asegura que p_0 es un punto umbilical.

Finalmente, dado $p \in S$ cualquier se tiene $k_1(p_0) \leq k_1(p) \leq k_2(p) \leq k_2(p_0) = k_1(p_0)$ (la última desigualdad es cierta porque p_0 es umbilical), de donde deducimos que todos los puntos de S son umbilicales, es decir, S es totalmente umbilical. Como S es compacta y conexa, el teorema de caracterización de las superficies totalmente umbilicales implica que S es una esfera.

3. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable con aplicación de Gauss $N: S \to \mathbb{S}^2(1)$ y segunda forma fundamental asociada σ.*

   Dada una curva diferenciable y p.p.a. $\alpha: I \to S$ definida sobre un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, se definen las aplicaciones diferenciables

$$T = \alpha', \quad N_\alpha = N \circ \alpha, \quad B = T \times N_\alpha.$$

   Así, $\{T, N_\alpha, B\}$ forma una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ en cada instante de I (llamada el triedro de Darboux de α).

   (A) *Probar que $T' = (\alpha'')^T + \kappa_n N_\alpha$, donde κ_n es la curvatura normal de S en la dirección de α'.*

   Descomponemos $T' = \alpha''$ en partes tangente y normal a S (en cada punto de α):

$$T' = (\alpha'')^T + \langle \alpha'', N_\alpha \rangle N_\alpha,$$

   donde hemos usado que N_α es unitario para escribir la parte normal de α'' como $\langle \alpha'', N_\alpha \rangle N_\alpha$. Como en cada instante se tiene $\langle \alpha', N_\alpha \rangle = 0$, tras derivar tenemos $0 = \langle \alpha'', N_\alpha \rangle + \langle \alpha', dN_\alpha(\alpha') \rangle$ luego $\langle \alpha'', N_\alpha \rangle = -\langle \alpha', dN_\alpha(\alpha') \rangle = \sigma_\alpha(\alpha', \alpha')$. Como α es p.p.a., $\sigma_\alpha(\alpha', \alpha')$ es la curvatura normal κ_n de S en la dirección de α' y queda

$$T' = (\alpha'')^T + \sigma_\alpha(\alpha', \alpha') N_\alpha = (\alpha'')^T + \kappa_n N_\alpha.$$

   (B) *Demostrar que $(\alpha'')^T$ lleva la dirección de B. Deducir que $(\alpha'')^T = \kappa_g B$, donde $\kappa_g = \langle \alpha'', B \rangle = -\det(\alpha'\alpha'', N_\alpha)$. A κ_g se le llama curvatura geodésica de α.*

   Como $\{T, N_\alpha, B\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y N_α es normal a S, tenemos que $\{T, B\}$ es base ortonormal de $T_\alpha S$. Como $(\alpha'')^T \in T_\alpha S$, tenemos que $(\alpha'')^T$ se descompone respecto de esta base ortonormal de la forma

$$(\alpha'')^T = \langle (\alpha'')^T, T \rangle T + \langle (\alpha'')^T, B \rangle B.$$

   Así que $(\alpha'')^T$ llevará la dirección de B si vemos que $\langle (\alpha'')^T, T \rangle \equiv 0$. Pero $\langle (\alpha'')^T, T \rangle = \langle \alpha'', T \rangle = \langle T', T \rangle = \frac{1}{2}(\|T\|^2)' \equiv 0$ porque $\|T\|^2 \equiv 1$.

   Por lo tanto, hemos probado que $(\alpha'')^T = \langle (\alpha'')^T, B \rangle B$. Llamando $\kappa_g = \langle (\alpha'')^T, B \rangle$, se tiene $(\alpha'')^T = \kappa_g B$ y

$$\kappa_g = \langle \alpha'', B \rangle = \langle \alpha'', T \times N_\alpha \rangle = \det(\alpha'', T, N_\alpha) = -\det(T, \alpha'', N_\alpha) = -\det(\alpha', \alpha'', N_\alpha).$$

   (C) *Probar que α es una geodésica de S si y sólo si su curvatura geodésica se anula idénticamente.*

   Por definición, α es geodésica de S si y sólo si $(\alpha'')^T \equiv 0$. Como $(\alpha'')^T = \kappa_g B$ y B no puede anularse en ningún instante (es parte de una base ortonormal en cada instante), tenemos que $(\alpha'')^T \equiv 0$ si y sólo si $\kappa_g \equiv 0$.

   (D) *Demostrar que*

$$T' = \kappa_g B + \kappa_n N_\alpha, \quad (N_\alpha)' = -\kappa_n T - \sigma_\alpha(T, B) B, \quad B' = -\kappa_g T + \sigma_\alpha(T, B) N_\alpha$$

   (éstas son las ecuaciones de Darboux).

   Tenemos $T' \overset{(A)}{=} (\alpha'')^T + \kappa_n N_\alpha \overset{(B)}{=} \kappa_g B + \kappa_n N_\alpha$ que es la primera ecuación. Escribimos $(N_\alpha)'$ en coordenadas respecto de la base ortonormal $\{T, N_\alpha, B\}$:

$$(N_\alpha)' = \langle (N_\alpha)', T \rangle T + \langle (N_\alpha)', N_\alpha \rangle N_\alpha + \langle (N_\alpha)', B \rangle B. \qquad (3)$$

Derivando en $\langle N_\alpha, T\rangle \equiv 0$ sale $\langle (N_\alpha)', T\rangle = -\langle N_\alpha, T'\rangle \overset{(A)}{=} -\langle N_\alpha, (\alpha'')^T + \kappa_n\, N_\alpha\rangle = -\kappa_n$.
Derivando en $\langle N_\alpha, N_\alpha\rangle \equiv 1$ tenemos $\langle (N_\alpha)', N_\alpha\rangle \equiv 0$.
Por otro lado, $\langle (N_\alpha)', B\rangle = \langle dN_\alpha(\alpha'), B\rangle = -\sigma_\alpha(\alpha', B) = -\sigma_\alpha(T, B)$.
Sustituyendo estos tres coeficientes en (3) tenemos $(N_\alpha)' = -\kappa_n\, T - \sigma_\alpha(T, B)B$, que es la segunda ecuación de Darboux.
Finalmente probamos la tercera ecuación de Darboux. Empezamos razonando como antes, escribiendo B' en coordenadas respecto de la base ortonormal $\{T, N_\alpha, B\}$:

$$B' = \langle B', T\rangle T + \langle B', N_\alpha\rangle N_\alpha + \langle B', B\rangle B. \tag{4}$$

Derivando en $\langle B, T\rangle \equiv 0$ tenemos $\langle B', T\rangle = -\langle B, T'\rangle = -\langle B, \alpha''\rangle \overset{(B)}{=} -\kappa_g$.
Derivando en $\langle B, N_\alpha\rangle \equiv 0$ tenemos $\langle B', N_\alpha\rangle = -\langle B, (N_\alpha)'\rangle$, que por la segunda ecuación de Darboux vale $-\langle B, -\kappa_n\, T - \sigma_\alpha(T, B)B\rangle = \sigma_\alpha(T, B)$.
Derivando en $\langle B, B\rangle \equiv 1$ tenemos $\langle B', B\rangle \equiv 0$.
Sustituyendo estos tres coeficientes en (4) tenemos $B' = -\kappa_g\, T + \sigma_\alpha(T, B)N_\alpha$, que es la tercera ecuación de Darboux.