Asignatura: Geometría I
Grado en Matemáticas. Universidad de Granada
Tema 3. Aplicaciones lineales

Prof. Rafael López Camino
Universidad de Granada

24 de enero de 2013

Índice

La estructura de espacio vectorial ha sido introducida en el tema 2 y éste ha girado en torno a la manera de trabajar en un espacio vectorial usando el concepto de base. También se han usado las herramientas que proporciona el tema 1, es decir, matrices y sistemas de ecuaciones, para hallar la dimension y ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial.

Una vez dado el objeto matemático, el espacio vectorial, el siguiente paso natural es cómo 'relacionar' dos de dichos objetos. Para ello, y como siempre, recurrimos a la teoría de conjuntos, usando aplicaciones y por tanto, la pregunta natural que surge es la siguiente:

> Dados dos espacios vectoriales V y V' y una aplicación $f : V \to V'$ entre ellos ¿hay algún tipo de aplicaciones 'buenas' respecto de la estructura vectorial que soportan V y V'?

La respuesta es sí, y a dichas aplicaciones se les llaman aplicación lineales. Igual que sucedía con el concepto de subespacio vectorial, no todas las aplicaciones entre espacios vectoriales son lineales, en verdad, 'muy pocas' lo son. Este tema se dedica a su estudio y de nuevo será importante el uso de matrices para el tratamiento de estos nuevos objetos.

1. Definición y primeras propiedades

Definición 1.1 *Una aplicación $f : V \to V'$ entre dos espacios vectoriales se dice que es lineal si satisface las dos siguientes propiedades:*

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in V$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$.

Si $V = V'$, se dice que f es un endomorfismo.

Es evidente que esta definición es equivalente a que

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v), \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, u, v \in V.$$

Veamos algunos ejemplos.

1. La aplicación identidad $1_V : V \to V$, $1_V(v) = v$, es lineal. Aquí estamos suponiendo que la estructura de espacio vectorial que soporta V es la misma en el dominio como en el codominio.

2. La aplicación nula $0 : V \to V'$, $0(v) = 0$. Esta aplicación puede verse como una aplicación constante y es la única aplicación constante que es lineal. Exactamente, sea $v_0' \in V'$ un vector fijo y definamos la aplicación constante $f : V \to V'$, $f(v) = v_0'$. Entonces f es lineal si y sólamente si $v_0' = 0$.

3. Una homotecia de razón $\lambda(\neq 0, 1)$ en un espacio vectorial es el endomorfismo $f : V \to V$ dado por $f(v) = \lambda v$. Esta aplicación es lineal.

4. Consideramos $\mathbb{R}^n$ con la estructura usual e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se define la i-proyección como la aplicación $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Esta aplicación es lineal.

5. Si $U \subset V$ es un subespacio vectorial de V, la aplicación inclusión $i : U \to V$, $i(u) = u$, es lineal.

6. Generalizamos el caso anterior. Si $U \subset V$ es un subespacio vectorial y $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces la restricción de f a U, $f_{|U} : U \to V'$, es lineal. Así la aplicación inclusión i dada en el ejemplo anterior es un caso particular con $i = 1_{V|U}$.

7. La composición de aplicaciones lineales: si $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ son aplicaciones lineales, entonces $g \circ f : V \to V''$ es lineal.

8. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ n vectores fijos de un espacio vectorial V. Entonces la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to V$ definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ es lineal.

9. Sea $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $f(x) = Ax$ es una aplicación lineal.

Las primeras propiedades de una aplicación lineal reflejan que estas aplicaciones son las más adecuadas entre espacios vectoriales y las que llevan, en cierto modo, la estructura vectorial de un espacio a otro, justificando el porqué de su definición.

Proposición 1.2 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal.*

1. $f(0) = 0$.
2. $f(-v) = -f(v)$, $v \in V$.
3. $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in V$.
4. *Si* $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, *entonces* $< f(v_1), \ldots, f(v_n) >= f(< v_1, \ldots, v_n >)$.

5. *Si U es un subespacio de V, entonces $f(U)$ es un subespacio de V'.*

6. *Si U' es un subespacio de V', entonces $f^{-1}(U')$ es un subespacio de V. En particular, el conjunto imagen de f, $Im(f)$, es un subespacio vectorial de V'.*

Demostración.

1. Por la linealidad de f y como 0 es elemento neutro de V, se tiene $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, luego $f(0) = 0$.

2. Dado $v \in V$, hay que probar el el elemento opuesto de $f(v)$ es $f(-v)$. Efectivamente, $f(v) + f(-v) = f(v - v) = f(0) = 0$.

3. Evidente.

4. Es consecuencia del apartado anterior.

5. Sean $u', v' \in f(U)$, es decir, existen $u, v \in U$ tales que $f(u) = u'$ y $f(v) = v'$. Entonces $u' + v' = f(u) + f(v) = f(u+v) \in f(U)$ ya que $u + v \in U$. De la misma forma, $\lambda u' = \lambda f(u) = f(\lambda u) \in f(U)$ ya que $\lambda u \in U$.

6. Sean $u, v \in f^{-1}(U')$. Entonces existen $u', v' \in U'$ tal que $f(u) = u'$ y $f(v) = v'$. Por tanto, $f(u+v) = f(u) + f(v) = u' + v' \in U'$ y así, $u + v \in f^{-1}(U')$. Del mismo modo, $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda u' \in U'$, luego $\lambda u \in f^{-1}(U')$.

□

Definición 1.3 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal.*

1. *Se dice que f es un monomorfismo si f es inyectiva.*

2. *Se dice que f es un epimorfimo si f es sobreyectiva.*

3. *Se dice que f es un isomorfismo si f es biyectiva. En el caso que, además, f sea un endomorfismo, se dice que f es un automorfismo.*

Es evidente entonces el siguiente resultado:

Proposición 1.4 *La composición de monomorfismo (resp. epimorfismos, isomorfismo) es un monomorfismo (resp. epimorfismos, isomorfismo).*

Definición 1.5 *Sean V y V' dos espacios vectoriales. Se dice que V es isomorfo a V' si existe un isomorfismo de V a V'.*

'Ser isomorfo a' establece una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios vectoriales, que viene reflejado en el siguiente resultado.

Proposición 1.6

1. *Todo espacio vectorial es isomorfo a sí mismo.*
2. *Si V es isomorfo a V', entonces V' es isomorfo a V.*
3. *Si V es isomorfo a V' y V' a V'', entonces V es isomorfo a V''.*

Demostración.

1. Basta con tomar la aplicación identidad en el espacio vectorial.
2. Si $f : V \to V'$ es un isomorfismo, entonces f^{-1} también lo es. Efectivamente, el hecho de que f sea biyectiva asegura que existe la inversa de f y que ésta es biyectiva. Sólo hay que probar que es lineal. Si $u', v' \in V'$, sean $u, v \in V$ con $f(u) = u'$ y $f(v) = v'$. Entonces $f(u+v) = f(u) + f(v)$, luego $u + v = f^{-1}(f(u) + f(v))$, es decir, $f^{-1}(u') + f^{-1}(v') = f^{-1}(u' + v')$. Del mismo modo, como $f(\lambda u) = \lambda f(u)$, entonces $\lambda u = f^{-1}(\lambda f(u))$, es decir, $\lambda u' = f^{-1}(\lambda u')$.
3. Si $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ son dos isomorfismos, entonces la composición $g \circ f$ también es lineal y es biyectiva.

$\square$

Una vez establecido este resultado podemos decir, en vez de 'V es isomorfo a V'', simplemente 'V y V' *son* isomorfos'. Esto se denota por el símbolo $\cong$: $V \cong V'$. De la proposición anterior, tenemos:

Corolario 1.7 *En el conjunto de todos los espacios vectoriales, la relación 'ser isomorfo a' es de equivalencia.*

Siguiendo con la idea del tema anterior de que un espacio vectorial se conoce si se sabe una base, en el siguiente resultado vamos a probar que una aplicación lineal se controla mediante la imagen de muy pocos vectores, concretamente de una base del dominio.

Teorema 1.8 *Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial V y $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ un subconjunto de vectores de un espacio V'. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que $f(e_i) = v'_i$, $1 \le i \le n$.*

Demostración. Probamos primero la *existencia* de la aplicación. Sea $v \in V$. Como B es base, existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tales que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Entonces se define la imagen de v mediante

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v'_i.$$

El vector está unívocamente definido ya que los escalares λ_i son únicos. Demostramos que f es lineal. Sean $u, v \in V$, donde $u = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$, para escalares μ_i. Entonces

$$u + v = \sum_{i=1}^n (\mu_i + \lambda_i) e_i$$

y usando la definición de f,

$$f(u+v) = \sum_{i=1}^n (\mu_i + \lambda_i) v'_i = \sum_{i=1}^n \mu_i v'_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i v'_i = f(u) + f(v).$$

Del mismo modo, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i) e_i$ y por la definición de f,

$$f(\lambda v) = \sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i) v'_i = \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i v'_i = \lambda f(v).$$

Para la *unicidad*, suponemos que $g : V \to V'$ es otra aplicación lineal con $g(e_i) = v'_i$. Si $v \in V$ es un vector cualquiera de V con $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, entonces

$$g(v) = g(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v'_i = f(v).$$

Como consecuencia de este resultado, dadas dos aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales, estas aplicaciones son iguales si y sólo si coinciden las imágenes para *alguna base* de dominio.

2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Definición 2.1 *Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$. Se define el núcleo de f al conjunto conjunto*

$$Ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : f(v) = 0\}.$$

Teorema 2.2 *Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$.*

1. *El núcleo de f es un subespacio vectorial.*

2. *La aplicación f es inyectiva si y sólo si $Ker(f) = \{0\}$.*

Demostración.

1. Es inmediato del hecho de que $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$ y de (6) de la proposición 1.2.

2. Supongamos que f es inyectiva. La inclusión $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(f)$ es inmediata por (1) de la proposición 1.2. Sea ahora $v \in \mathrm{Ker}(f)$. Entonces $f(v) = 0$. Pero como $f(0) = 0$, la inyectividad de f implica que $v = 0$, probando $Ker(f) \subset \{0\}$.

   Supongamos ahora que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Sean vectores $u, v \in V$ tales que $f(u) = f(v)$. Por la linealidad (proposición 1.2, 2)), $0 = f(u) - f(v) = f(u - v) = 0$, luego $u - v \in \mathrm{Ker}(f)$. Como $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, entonces $u - v = 0$, es decir, $u = v$.

□

Esta proposición nos dice que, para una *aplicación lineal*, el estudio de si la aplicación es o no inyectiva se 'reduce' a estudiar aquellos vectores v tales que $f(v) = 0$.

Relacionamos a continuación el hecho de que una aplicación sea inyectiva o sobreyectiva con los conceptos de linealmente independiente y sistema de generadores del tema 2.

Proposición 2.3 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y $X = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ un conjunto finito de vectores de V.*

1. *Si f es un monomorfismo y X es linealmente independiente, entonces $f(X)$ es linealmente independiente.*

2. *Si f es un epimorfismo y X es un sistema de generadores de V, entonces $f(X)$ es un sistema de generadores de V'.*

3. *Si f es un isomorfismo y X es una base de V, entonces $f(X)$ es una base de V'.*

Demostración.

1. Sea $\sum_{i=1}^m \lambda_i f(v_i) = 0$. Como f es lineal, $f(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i) = 0$, es decir, $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \in \mathrm{Ker}(f)$. Como f es un monomorfismo, el núcleo es $\{0\}$, es decir, $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0$. Como X es linealmente independiente, $\lambda_i = 0, \forall i$.

2. Si X es un sistema de generadores, entonces $V =< X >$. Por la proposición 1.2, (4), $f(< X >) =< f(X) >$ y en nuestro caso, $f(V) =< f(X) >$. Como f es sobreyectiva, $f(V) = V'$, probando que $f(X)$ es un sistema de generadores de V'.
3. Consecuencia de los dos apartados anteriores.

$\square$

Es inmediato ahora:

Corolario 2.4 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal.*

1. *Si f es un monomorfismo, $dim(V) \leq dim(V')$.*
2. *Si f es un epimorfismo, $dim(V) \geq dim(V')$.*
3. *Si f es un isomorfismo, $dim(V) = dim(V')$.*

Queremos probar, en cierto sentido, el recíproco de la proposición anterior. Por ejemplo, supongamos que tenemos una aplicación lineal $f : V \to V'$ y queremos saber si es inyectiva. Es claro que una condición necesaria es que tiene que llevar conjuntos de vectores linealmente independientes de V en vectores linealmente independientes de V', pero ¿cuántos son suficientes para asegurarnos que f es inyectiva? Por ejemplo, si $v \neq 0$, $\{v\}$ es linealmente independiente y si $f(v) \neq 0$, entonces $\{f(v)\}$ también lo es. Pero es claro que el hecho de que esto ocurra para *un* vector no es suficiente para afirmar que f es inyectiva. La respuesta nos la da el siguiente resultado y nos dice que *basta* con estudiar qué pasa para *una base* de V.

Proposición 2.5 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y B una base de V.*

1. *Si $f(B)$ es linealmente independiente, entonces f es inyectiva.*
2. *Si $f(B)$ es un sistema de generadores de V', entonces f es sobreyectiva.*
3. *Si $f(B)$ es una base de V', entonces f es biyectiva.*

Demostración. Supongamos que $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

1. Usamos el teorema 2.2. Sea $v \in \mathrm{Ker}(f)$. Como B es base, existen escalares λ_i tales que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Ya que f es lineal,

$$0 = f(v) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i).$$

Ya que $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ es linealmente independiente, $\lambda_i = 0, \forall i$.

2. Usando la proposición 1.2 4), y la linealidad de f, se tiene $f(V) = f(< B >) =< f(B) >$ y como $f(B)$ es un sistema de generadores de V', $< f(B) >= V'$. Por tanto, $f(V) = V'$, es decir, f es sobreyectiva.

3. Consecuencia de los dos apartados anteriores.

$\square$

Corolario 2.6 *Sean V y V' espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente.*

1. *Si $n \leq m$, entonces existe un monomorfismo de V a V'.*
2. *$n \geq m$, entonces existe un epimorfismo de V a V'.*
3. *Si $n = m$, entonces existe un isomorfismo de V a V'.*

Demostración. Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ de V'.

1. Si $n \leq m$, definimos $f : V \to V'$ mediante $f(e_i) = e'_i$, $1 \leq i \leq n$. Como

$$\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$$

es linealmente independiente, la proposición 2.5 asegura que f es inyectiva.

2. Si $n \geq m$, se define como $f(e_i) = e'_i$ para $1 \leq i \leq m$ y $f(e_i) = 0$ para $m+1 \leq i \leq n$. Entonces

$$\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} = \{e'_1, \ldots, e'_m, 0, \ldots, 0\}$$

es un sistema de generadores de V' y la misma proposición que antes afirma que f es sobreyectiva.

3. Es consecuencia de los dos apartados anteriores.

$\square$

Corolario 2.7 *Dos espacios son isomorfos si y sólamente si tienen la misma dimensión.*

Demostración. Sean V y V'. Supongamos que $V \cong V'$. Entonces por el corolario 2.4, tienen la misma dimensión.

El recíproco es consecuencia del corolario anterior. $\square$

A continuación damos uno de los resultados más importantes de este tema. En él, aparece una relación entre el núcleo y la imagen de una aplicación lineal que, a priori, eran conceptos que no guardaban ninguna relación.

Teorema 2.8 *Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$. Entonces*

$$dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)). \tag{1}$$

A la dimensión del núcleo se llama nulidad de f, $n(f)$, y a la dimensión de la imagen de f se llama rango de f, $r(f)$.

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base de $\mathrm{Ker}(f)$. Por el tema anterior, podemos ampliar dicho conjunto hasta conseguir una base de V: $B = \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$. El resultado queda demostrado si se prueba que $\{f(e_{m+1}), \ldots, f(e_n)\}$ es base de $\mathrm{Im}(f)$.

Por una lado, y usando (4) de la proposición 1.2,

$$Im(f) = f(V) = f(< B >) =< f(B) >=< f(e_{m+1}), \ldots, f(e_m) >,$$

ya que $f(e_i) = 0$ para $1 \le i \le m$. Esto prueba que $\{f(e_{m+1}), \ldots, f(e_n)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$.

Para probar que $\{f(e_{m+1}), \ldots, f(e_n)\}$ es linealmente independiente, sea $\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$. Por la linealidad de f, $f(\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i) = 0$, es decir, $\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$. Como $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es una base del núcleo, existen escalares μ_i tales que

$$\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i e_i,$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{m} (-\mu_i) e_i + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i = 0.$$

Ya que B es linealmente independiente, todos los escalares son cero, en particular, λ_i, $\forall i$, y esto era lo que había que probar. $\square$

Corolario 2.9 *Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$.*

1. *$r(f) \leq dim(V)$.*
2. *Si U es un subespacio de V, entonces $dim(f(U)) \leq dim(U)$.*

Demostración.

1. Es consecuencia de (1).
2. Se considera la aplicación restricción $f_{|U} : U \to f(U)$, que también es lineal y usamos el apartado anterior.

$\square$

Corolario 2.10 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal tal que $dim(V) = dim(V')$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *f es inyectiva.*
2. *f es sobreyectiva.*
3. *f es biyectiva.*

Demostración. 1)$\Rightarrow$ 2) Por hipótesis, $n(f) = 0$ y (1) da $r(f) = dim(V)$. Como $dim(V) = dim(V')$, entonces $r(f) = dim(V')$, es decir, $f(V) = V'$ y así f es sobreyectiva.

2) $\Rightarrow$ 3) Como f es sobreyectiva, $r(f) = dim(V')$, pero usando (1) y la hipótesis, concluimos que $n(f) = 0$, es decir, f es inyectiva. Como era sobreyectiva, es biyectiva.

3) $\Rightarrow$ 1) Evidente $\square$

3. Expresión matricial de una aplicación lineal

En esta sección usaremos las herramientas de matrices dadas en el tema 1 para un mejor tratamiento de las aplicaciones lineales. Para ello asignaremos a cada aplicación lineal una matriz (fijadas bases en los dos espacios vectoriales). Con esto se entenderá mejor las operaciones de suma y producto de matrices que se hicieron en el tema 1.

Sea $f: V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ bases de V y V' respectivamente. Sea $v \in V$ y escribamos $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, con $x_i \in \mathbb{R}$. Entonces $f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$. Escribamos $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i$, para cada $1 \leq j \leq n$. Entonces

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e'_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji} \right) e'_j.$$

Por tanto, *las coordenadas de $f(v)$ respecto de la base B'* son

$$(\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{ni} x_i).$$

Este vector de $\mathbb{R}^m$, es decir, las coordenadas de $f(v)$, se puede escribir también como la siguiente matriz columna:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m \times 1}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Definición 3.1 *Sea $f: V \to V'$ una aplicación lineal, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ bases de V y V' respectivamente. Supongamos que para cada $1 \leq j \leq n$ se tiene*

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i.$$

Se llama expresión matricial de f respecto de las bases B y B' a la matriz

$$M(f, B, B') = (a_{ij}).$$

Por tanto:

> *Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de v respecto de la base B, las coordenadas de $f(v)$ respecto de B' son $M(f, B, B')x^t$.*

Nota. En el caso particular que f sea un endomorfismo y si tomamos $B' = B$, escribiremos la expresión matricial simplemente por $M(f, B)$.

La primera relación con el tema 1 se refiere al rango. Con el término rango hemos definido el rango de una matriz (número de pivotes en su forma de Hermite por filas) y el rango de una aplicación lineal, que es la dimensión de su imangen.

Teorema 3.2 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ bases de V y V' respectivamente. Entonces*

$$r(f) = r(M(f,B,B')).$$

Observemos que el resultado es independiente de las bases elegidas, ya que el miembro de la izquierda de esta identidad no depende de bases.

Demostración. Usamos la fórmula (1). Denotamos $A = M(f,B,B')$. Trabajamos en coordenadas y usamos (2). Sea $v \in Ker(f)$: si las coordenadas de v respecto de B son $(x_1, \ldots, x_n)$, entonces las coordenadas de $f(v)$ vienen dadas por (2). Por tanto el núcleo de f viene dado (en coordenadas respecto de B) como:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

Del tema 2 sabemos que la dimensión de dicho subespacio, es decir, la nulidad de f, es $n - r(A)$. Por tanto, $n(f) = n - r(A)$. Por otro lado, gracias a (1), $n = n(f) + r(f)$, obteniendo, por tanto, la igualdad deseada. □

De esta forma tenemos otra interpretación del concepto de rango de una matriz:

Corolario 3.3 *Sea $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces el rango de A es el número de columnas linealmente independientes, vistas dichas columnas como vectores de $\mathbb{R}^m$.*

Demostración. Se define la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como $f(x) = Ax$. Entonces $A = M(f,B_u,B'_u)$. La imagen de f esta generada por $f(B_u)$, es decir, las columnas de A. Por tanto, la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$ es el número de columnas linealmente independientes. Por otro lado sabemos por el teorema 3.2 que dicha dimensión coincide con $r(M(f,B_u,B'_u)) = r(A)$.

Como consecuencia de la demostración, se tiene:

Corolario 3.4 *Sea $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces el rango de A es el rango de cualquier aplicación lineal que la tenga por expresión matricial.*

Es importante hacer en este momento las siguientes observaciones:

1. Del último corolario, el rango no depende ni de las bases tomadas ni en qué espacios vectoriales está definida la aplicación.

2. Si tomamos como definición de rango una matriz la caracterización dada en el corolario 3.3 no es claro que el rango de una matriz coincide con su traspuesta. La justificación de dicha igualdad en términos de aplicaciones lineales (y que sabemos que es cierta del tema anterior), vendrá justificada en la última sección de este tema.

3. Si tomamos de nuevo como definición de rango la que aparece en el corolario 3.3, es evidente que $r(A) \leq n$, el número de columnas, ya que hay como mucho, n vectores. Por otro lado, $r(A) \leq m$, el número de filas, ya que $Im(f) \subset V'$, y sabemos entonces del tema 2 que $dim(Im(f)) \leq dim(V') = m$.

La segunda relación con el tema 1 nos dirá porqué se definió la suma de matrices y el producto por escalares en el tema 1 de la forma que se hizo y no de otra. Para ello, se considera el conjunto de todas las aplicaciones lineales de un espacio V a otro V' y al que denotamos por $L(V,V')$. Dotamos a este conjunto estructura de espacio vectorial del siguiente modo:

1. Si $f,g \in L(V,V')$ se define $f+g : V \to V'$ mediante
$$(f+g)(v) = f(v)+g(v).$$

2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, se define $\lambda f : V \to V'$ por
$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v).$$

Teorema 3.5 *La terna $(L(V,V'),+,\cdot)$ es un espacio vectorial*

Demostración. La demostración de las propiedades son sencillas con las siguientes observaciones:

1. Las operaciones $+$ y $\cdot$ son internas, es decir, si $f,g \in L(V,V')$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $f+g \in L(V,V')$ y $\lambda f \in L(V,V')$. Esto quiere decir que tanto $f+g$ como λf son lineales. Efectivamente, si $u,v \in V$ y $a,b \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}(f+g)(au+bv) &= f(au+bv)+g(au+bv) = \Big(af(u)+bf(v)\Big)+\Big(ag(u)+bg(v)\Big)\\ &= a\Big(f(u)+g(u)\Big)+b\Big(f(u)+f(v)\Big) = a(f+g)(u)+b(f+g)(v),\end{aligned}$$
donde en la primera igualdad hemos usado la definición de $f+g$ y en la segunda, las linealidades de f y g. De la misma forma se prueba que λf es lineal.

2. El elemento neutro es la aplicación nula, es decir, $0 : V \to V'$, donde $0(v) = 0$. Sabemos del inicio de este tema, que esta aplicación es lineal.

3. Si $f \in L(V,V')$, su elemento opuesto es la *aplicación opuesta*, es decir, la dada por $(-f)(v) = -f(v)$.

$\square$

Es natural preguntarse por la dimensión del espacio vectorial $L(V,V')$ y si tiene relación con las dimensiones de V y V'. Para ello vamos a calcular una base y luego contamos cuántos elementos tiene dicha base.

Teorema 3.6 *Si V y V' son espacios vectoriales, entonces*

$$dim(L(V,V')) = dim(V)dim(V').$$

Demostración. Sean $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ bases de V y V' respectivamente. Definimos nm aplicaciones lineales de V en V' usando el teorema 1.8. Denotamos a estas aplicaciones como $\bar{B} = \{f_{ij} : V \to V' : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Para cada i, j, se define f_{ij} como

$$f_{ij}(e_k) = \delta_{ik} e'_j, 1 \leq k \leq n.$$

1. *Independencia lineal.* Sea $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} f_{ij} = 0$ una combinación lineal nula. Para $1 \leq k \leq n$, fijamos e_k, y se tiene $\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} f_{ij}\right)(e_k) = 0$. Usando la estructura vectorial de $L(V,V')$ junto con la definición de f_{ij},

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} f_{ij}(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} \delta_{ik} e'_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{kj} e'_j.$$

   Como los vectores $\{e'_j\}$ son linealmente independientes, $\lambda_{kj} = 0, \forall j \in \{1, \ldots, m\}$. Pero k era arbitrario, con $k \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto $\lambda_{kj} = 0, \forall k, j$.

2. *Sistema de generadores.* Sea $f \in L(V,V')$ una aplicación cualquiera. Para probar que es un sistema de generadores, hay que encontrar escalares $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, tales que $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} f_{ij}$. Del apartado anterior, es inmediato que los que aparecen al expresar $f(e_i)$ en coordenadas respecto de la base B':

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} e'_j, \ 1 \leq i \leq n.$$

$\square$

Es inmediato de la definición de la suma de aplicaciones lineales y de la definición de la expresión matricial de una aplicación lineal, el siguiente resultado:

Corolario 3.7 *Sean f y g aplicaciones lineales entre V y V' y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si B y B' son bases de V y V' respectivamente, entonces*

$$M(f+g,B,B') = M(f,B,B') + M(g,B,B')$$

$$M(\lambda f,B,B') = \lambda M(f,B,B').$$

Estas dos igualdades justifican claramente las definiciones de la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz que se dieron en el tema 1.

La otra operación de matrices que se definió en dicho tema fue el producto de matrices. Es en este momento donde se justifica aquella definición.

Proposición 3.8 *Sean $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ dos aplicaciones lineales. Sean B, B' y B'' bases de V, V' y V'' respectivamente. Entonces*

$$M(g \circ f,B,B'') = M(g,B',B'')M(f,B,B').$$

Demostración. Sean $A = M(f,B,B')$ y $C = M(g,B',B'')$, es decir,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i, \ \ g(e'_j) = \sum_{i=1}^{q} c_{ij}e''_i,$$

donde $q = dim(V'')$. Entonces

$$(g \circ f)(e_j) = g(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{s=1}^{q} c_{si}e''_s = \sum_{s=1}^{q}\sum_{i=1}^{m} c_{si}a_{ij}e''_s.$$

Por tanto, el elemento (s, j) de la matriz $M(g \circ f,B,B'')$ es $\sum_{i=1}^{m} c_{si}a_{ij}$, es decir, el elemento (s, j) de la matriz CA. $\square$

Este resultado nos permite relacionar la expresión matricial de un isomorfismo y de su inversa.

Corolario 3.9 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, B y B' bases de V y V'. Supongamos que $dim(V) = dim(V')$.*

1. *f es un isomorfismo si y sólo si cualquier (o una) expresión matricial suya es regular.*

2. *Si f es un isomorfismo, entonces $M(f^{-1},B',B) = M(f,B,B')^{-1}$.*

Demostración. Si f es un isomorfismo, tiene inversa, luego $f^{-1} \circ f = 1_V$. Por la proposición anterior, $M(f^{-1},B',B)M(f,B,B') = M(1_V,B,B)$. Pero esta última matriz es la identidad, luego se prueba que $M(f,B,B')$ es regular y tenemos también el segundo apartado del corolario.

Si $M(f,B,B')$ es regular, entonces $r(M(f,B,B')) = n$, donde $n = dim(V) = dim(V')$. Por tanto, $r(f) = n$, es decir, f es sobreyectiva. Por tanto, f es biyectiva por el corolario 2.10. □

Ya se explicitó al principio del tema que las aplicaciones entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ de la forma $f(x) = Ax$ eran lineales. Veamos ahora que así son todas.

Corolario 3.10 *Las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ son de la forma $f(x) = Ax$, donde $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sean B_u y B'_u bases usuales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente y sea $A = M(f,B_u,B'_u)$. Como un vector $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tiene como coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ respecto de B_u, entonces es inmediato que $f(x) = Ax$. □

Para acabar con esta sección, nos preguntamos cómo cambia la expresión matricial de una aplicación lineal al cambiar de bases. Concretamente, sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y bases B_1, B_2 de V, B'_1 y B'_2 de V'. Entonces tenemos las matrices $M(f,B_1,B'_1)$ y $M(f,B_2,B'_2)$ ¿cuál es la relación entre ambas matrices? Para ello tomamos el siguiente diagrama

$$V \xrightarrow{1_V} V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{1_{V'}} V'.$$

Tomamos en cada uno de los espacios vectoriales, las bases B_1, B_2, B'_2 y B'_1. La composición de las tres aplicaciones es f. Por la proposición 3.8,

$$M(f,B_1,B'_1) = M(1_{V'},B'_2,B'_1)M(f,B_2,B'_2)M(1_V,B_1,B_2).$$

Las matrices $M(1_{V'},B'_2,B'_1)$ y $M(1_V,B_1,B'_2)$ son matrices regulares al ser expresiones matriciales de isomorfismos. Por tanto, con la notación anterior, tenemos

Corolario 3.11 *Las matrices $M(f,B_1,B'_1)$ y $M(f,B_2,B'_2)$ son equivalentes.*

En el caso concreto que f sea un endomorfismo, y tomando $B_1 = B'_1$ y $B_2 = B'_2$

$$M(f,B_1) = M(1_V,B_2,B_1)M(f,B_2)M(1_V,B_1,B_2).$$

Por otro lado, y usando de nuevo la proposición 3.8,

$$M(1_V,B_2,B_1)M(1_V,B_1,B_2) = M(1_V,B_1,B_1) = I_n,$$

es decir,

$$M(1_V,B_2,B_1) = M(1_V,B_1,B_2)^{-1}.$$

Definición 3.12 *Dos matrices cuadradas A y C de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se llaman semejantes si existe una matriz regular $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = P^{-1}CP$.*

Por el cálculo anterior, dos matrices que representan al mismo endomorfismo, son matrices semejantes.

Finalmente, y resumiendo todo lo anterior, podemos ver de *forma natural*, el espacio $L(V,V')$ como el espacio de matrices. Observemos que $dim(L(V,V')) = nm = dim\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, luego los espacios $L(V,V')$ y $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ son isomorfos por el corolario 2.7. Concretamente tenemos

Corolario 3.13 *Sean V y V' dos espacios vectoriales de dimensiones n y m, B y B' bases de V y V'. Entonces la aplicación $\phi : L(V,V') \to \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dada por*

$$\phi(f) = M(f,B,B')$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además, esta aplicación ϕ satisface $\phi(f_{ij}) = E_{ji}$, donde E_{ji} es la matriz cuyos elementos son todos ceros excepto en el lugar (j,i), que es 1.

4. Espacio dual

En esta última parte del tema vamos a poner nuestra atención en el estudio del espacio vectorial $L(V,V')$ en un *caso particular*, aquél en que $V' = \mathbb{R}$, considerando en $\mathbb{R}$ la estructura usual de espacio vectorial. Por tanto, parte del trabajo ya se ha realizado en la sección anterior.

Definición 4.1 *Sea V un espacio vectorial. Se llama el espacio dual de V, y se denota por V^*, al espacio vectorial $V^* = L(V, \mathbb{R})$. A los elementos de V^* se llaman formas lineales de V.*

Teorema 4.2 *Sea $\omega \in V^*$. Entonces*

1. $\omega = 0$ *o $Ker(\omega)$ es un hiperplano de V.*
2. *Sea H un subespacio vectorial de un espacio V. Entonces H es un hiperplano si y sólo si es el núcleo de una forma lineal no nula de V.*
3. *Las formas lineales de $\mathbb{R}^n$ son de la forma $\omega(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots, a_nx_n$, para ciertos $a_i \in \mathbb{R}$.*
4. *Sean α, ω dos formas lineales no nulas de un espacio V. Entonces α es proporcional a ω si y sólo si sus núcleos coinciden.*

Demostración.

1. Si $\omega \neq 0$, entonces $Im(f) \neq \{0\}$, es decir, $dim(Im(f)) \geq 1$. Pero como $Im(f) \subset \mathbb{R}$, entonces $Im(f) = \mathbb{R}$, es decir, f es sobreyectiva. Por (1), $n(f) = dim(V) - 1$, es decir, Ker(f) es un subespacio de dimensión una menos que la de V, es decir, es un hiperplano.
2. Sólo hay que probar que si H es un hiperplano, entonces es el núcleo de una forma lineal no nula. Sea $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ una base de H, y ampliamos a una base B de V: $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Definimos $\omega : V \to \mathbb{R}$ como la única aplicación lineal (y por tanto, forma lineal) tal que $\omega(e_i) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$ y $\omega(e_n) = 1$. Entonces $\omega \neq 0$ por la última condición y $H \subset Ker(\omega)$. Ya que $\omega \neq 0$, $Ker(\omega) \neq V$, luego $n(\omega) \leq n-1$. Esto prueba que $H = Ker(\omega)$.
3. Es evidente que $\omega(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots, a_nx_n$ es lineal, pues $\omega(x) = Ax$, donde $A = (a_1 \quad a_n)$. Por otro lado, sea $\omega \in (\mathbb{R}^n)^*$ y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base usual de $\mathbb{R}^n$. Llamamos $a_i = \omega(e_i)$. Entonces
$$\omega(x) = \omega(x_1, \ldots, x_n) = \omega(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\omega(e_i) = a_1x_1 + \ldots, a_nx_n.$$
4. Es evidente que si $\alpha = a\omega$, con $a \neq 0$, entonces $Ker(\alpha) = Ker(\omega)$. Por otro lado, si sus núcleos coinciden, el cual es un hiperplano H de V, entonces tomamos una

base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V donde los primeros $n-1$ vectores son base de H. Sea $v \in V$ y $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Entonces

$$\alpha(v) = a_n \alpha(e_n),\ \omega(v) = a_n \omega(e_n).$$

Esto prueba inmediatamente que

$$\alpha = \frac{\alpha(e_n)}{\omega(e_n)} \omega.$$

$\square$

Sabemos que en general, $dim(L(V,V')) = dim(V)dim(V')$. Por tanto,

$$dim(V^*) = dim(V)dim(\mathbb{R}) = dim(V).$$

Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. Consideramos la base B^* de V^* determinada en el teorema 1.8, tomando en $\mathbb{R}$, $v_1' = \{1\}$. Allí se denotaba a los elementos de dicha base f_{ij}, pero como $j = 1$, sabemos que sólo hay n elementos. Denotamos $B^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, es decir, $\omega_i : V \to \mathbb{R}$ está definida mediante

$$\omega_i(e_j) = \delta_{ij},\ 1 \leq j \leq n.$$

La base B^* se llama la *base dual de B*.

Corolario 4.3 *En $\mathbb{R}^n$, sea $B_u = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B_u^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.*

1. *Sea $\omega \in (\mathbb{R}^n)^*$ de la forma $\omega(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots +_n x_n$. Entonces las coordenadas de ω respecto de B_u^* son $(a_1, \ldots, a_n)$, es decir, $M(\omega, B_u^*, \{1\}) = (a_1 \cdots a_n)$.*

2. *Si $\omega \in (\mathbb{R}^n)^*$, entonces*
$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega(e_i)\omega_i.$$

Demostración.

1. Si escribimos $\omega = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$, aplicamos a ambos lados e_j. Entonces

$$\omega(e_j) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i)(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j.$$

2. Es consecuencia del apartado anterior.

$\square$

Una cuestión que surge inmediatamente de la definición es ¿qué sucede si hacemos el dual de V^*, es decir, $V^{**} = L(V^*, \mathbb{R})$? ¿y si continuamos, es decir, V^{***}? La respuesta es que, cuando hacemos dos veces dual, es decir, si tomamos V^{**} volvemos, *en cierto sentido*, al espacio vectorial de partida, es decir, a V.

Teorema 4.4 *El espacio V^{**} es isomorfo de forma natural a V.*

Ya sabemos que $dim(V^{**}) = dim(V)$, y por tanto, V^{**} es isomorfo a V. Sin embargo no es éste el resultado del teorema anterior. Este teorema nos dice que podemos identificar de forma natural V^{**} con el espacio V.

Demostración. Se define la aplicación $\Phi : V \to V^{**}$ del siguiente modo. Sea $v \in V$ y $\Phi(v) : V^* \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por

$$\Phi(v)(\omega) = \omega(v), \forall \omega \in V^*.$$

Observemos que $\Phi(v)$ es una *aplicación lineal*. Para ello, hay que probar que $\Phi(v)(a\alpha + b\omega) = a\Phi(\alpha) + b\Phi(\omega)$, para $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \omega \in V^*$. Pero usando la definición de $\Phi(v)$ se tiene:

$$\Phi(v)(a\alpha + b\omega) = (a\alpha + b\omega)(v) = a\alpha(v) + b\omega(v) = a\Phi(v)(\alpha) + b\Phi(v)(\omega),$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la estructura vectorial de $L(V, \mathbb{R}) = V^*$.

Una vez probado que $\Phi(v)$ es lineal, y como el dominio es V^* y el codominio es $\mathbb{R}$, entonces $\Phi(v) \in V^{**}$. Esto permite definir sin problemas

$$\Phi : V \to V^{**}, v \mapsto \Phi(v).$$

Probamos que Φ es un isomorfismo.

1. Φ *es lineal*. Hay que probar que $\Phi(au + bv) = a\Phi(u) + b\Phi(v)$. Como el dominio de ambas aplicaciones es V^*, sea $\omega \in V^*$. Usando que ω es lineal,

$$\begin{aligned} \Phi(au + bv)(\omega) &= \omega(au + bv) = a\omega(u) + b\omega(v) = a\Phi(u)(\omega) + b\Phi(v)(\omega) \\ &= (a\Phi(u) + b\Phi(v))(\omega). \end{aligned}$$

2. Φ *es inyectiva*. Probamos que su núcleo es trivial. Para ello necesitamos un lema previo:

   Lema 4.5 *Sea $v \in V$ con la propiedad de que $\omega(v) = 0$, $\forall \omega \in V^*$. Entonces $v = 0$.*

   Demostración. Si $v \neq 0$, sea $B = \{v, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V. Si B^* es la base dual, entonces $\omega_1(v) = 1$: contradicción. □

   Sea $v \in Ker(\Phi)$, es decir, $\Phi(v) = 0$. Entonces para cada $\omega \in V^*$, se tiene $\Phi(v)(\omega) = \omega(v) = 0$. Por el lema, $v = 0$, probando la inyectividad de Φ.

3. Usamos ahora el corolario 2.10. Basta con darse cuenta que $dim(V^{**}) = dim(V^*) = dim(V)$.

□

En el teorema 4.2, se ha visto un hiperplano de un espacio vectorial como el núcleo de una forma lineal. Generalizamos este hecho al caso de un subespacio vectorial de cualquier dimensión.

Definición 4.6 *Sea $X \subset V$ un conjunto de vectores de V. Se llama el anulador de X a*

$$an(X) = \{\omega \in V^*; \omega(v) = 0, \forall v \in X\}.$$

El anulador tiene las siguientes propiedades.

Proposición 4.7

1. *El anulador de un conjunto es un subespacio vectorial de V^*.*
2. *Si $X \subset Y$, entonces $an(X) \supset an(Y)$.*
3. *Si U es un subespacio vectorial con $U =< e_1, \ldots, e_m >$, entonces $an(U) = an(\{e_1, \ldots, e_m\})$.*
4. *$an(\{0\}) = V^*$ y $an(V) = \{0\}$.*

Demostración.

1. Si $\alpha, \omega \in an(X)$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces para cada $v \in X$
$$(a\alpha + b\omega)(v) = a\alpha(v) + b\omega(v) = a0 + b0 = 0.$$
2. Evidente.

3. Del apartado anterior, $an(U) \subset an(\{e_1, \ldots, e_m\})$. Por otro lado, sea $\omega \in an(\{e_1, \ldots, e_m\})$. Dado $u \in U$, existen escalares λ_i tales que $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$. Por tanto,
$$\omega(u) = \omega(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i 0 = 0.$$
4. La inclusión $an(\{0\}) \subset V^*$ es evidente. La otra es consecuencia de que toda aplicación lineal lleva el elemento neutro en el neutro.

   La igualdad $\{0\} \subset an(V)$ es evidente. Para la otra, sea $\omega \in an(V)$. Si $\omega \neq 0$, entonces existe $v \in V$ tal que $\omega(v) \neq 0$: contradicción.

□

El último apartado tiene relación con el lema 4.5. Efectivamente, las hipótesis del lema eran que si $v \in V$ con la propiedad de que $\omega(v) = 0$, $\forall \omega \in V^*$, entonces $v = 0$. Con la identificación natural de V con V^{**}, $\omega(v) = \Phi(v)(\omega)$. Por tanto, la hipótesis se puede expresar ahora diciendo que $\Phi(v) \in an(V^*)$. Pero por el último apartado de la proposición $an(V^*) = \{0\}$, es decir, $\Phi(v) = 0$. Como Φ es un isomofirmo, entonces $v = 0$.

Relacionamos la dimensión del anulador con la del subespacio correspondiente.

Teorema 4.8 *Sea U un subespacio de un espacio vectorial V.*

1. $dim(an(U)) = n - dim(U)$.
2. *Si $dim(U) = m$, entonces existen $n - m$ formas lineales $\omega_1, \ldots, \omega_{n-m}$ linealmente independientes tales que*
$$U = \{v \in V; \omega_i(v) = 0, 1 \leq i \leq n - m\}$$
   y $an(U) =< \omega_1, \ldots, \omega_{n-m} >$.
3. *Identificando V^{**} de forma natural con V, $an(an(U)) = U$.*
4. *Sea W otro subespacio vectorial de V. Entonces $U = W$ si y sólo $an(U) = an(W)$.*

Demostración.

1. Sea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base de U y la ampliamos a una base de V, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Sea $B^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ su base dual. Probamos que $B' = \{\omega_{m+1}, \ldots, \omega_n\}$ es base de an(U), lo cual probaría la fórmula de la dimensión. Observemos primero que, efectivamente, $B' \subset an(U)$ ya que $an(U) = an(\{e_1, \ldots, e_m\})$ y para cada $m + 1 \leq k \leq n$ e $1 \leq i \leq m$, $\omega_k(e_i) = \delta_{ik} = 0$.

a) (Independencia lineal) Sea $\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \omega_i = 0$. Sea $k \in \{m+1, \ldots, n\}$. Entonces

$$0 = \Big(\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \omega_i \Big)(e_k) = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \omega_i(e_k) = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \delta_{ik} = \lambda_k,$$

como se quería probar.

b) (Sistema de generadores) Sea $\omega \in an(U)$. Como B^* es base de V^*, existen escalares λ_i tales que $\omega = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i$. Aplicando en esta igualdad el vector e_k, con $1 \leq k \leq m$, obtenemos

$$0 = \omega(e_k) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i)(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ik} = \lambda_k.$$

Por tanto, $\omega = \lambda_{m+1}\omega_{m+1} + \ldots + \lambda_n \omega_n$, como se quería probar.

2. De la demostración del apartado anterior, $an(U) =< \omega_{m+1}, \ldots, \omega_n >$ y es evidente que $U \subset \{v \in V : \omega_i(v) = 0, m+1 \leq i \leq n\}$. Para probar la igualdad, vemos que las dimensiones de los dos subespacios coinciden, y para ello, trabajamos con coordenadas. Tomamos en V la base B y en V' la base B^*. Obsérvese que $\omega_i(v) = \omega_i(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = x_i$. Entonces el subespacio de la izquierda se escribe

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0, m+1 \leq i \leq n\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\},$$

donde $r(A) = n - m$ (es una matriz escalonada reducida con $n - m$ pivotes). Por tanto, la dimensión del subespacio en $n - (n - m) = m$, es decir, la dimensión de U.

3. Veamos que $U \subset an(an(U))$ Sea $u \in U$ y $\omega \in an(U)$. Pero $u(\omega) = \Phi(u)(\omega) = \omega(u) = 0$. Y por otro lado, el primer apartado asegura que

$$dim(an(an(U))) = n - dim(an(U)) = n - (n - dim(U)) = dim(U).$$

4. Es evidente por el apartado anterior y la identificación $V^{**} = V$.

$\square$

Observemos que la demostración del apartado 1) del teorema nos da un método para:

1. Hallar una base del espacio anulador de un subespacio, sabiendo sus ecuaciones cartesianas.

2. Hallar las ecuaciones cartesianas de un subespacio, sabiendo una base del subespacio.

En el caso particular de que $V = \mathbb{R}^n$ todo lo anterior se ve fácilmente del siguiente modo. Consideramos B_u la base usual de $\mathbb{R}^n$ y B_u^* su base dual en $(\mathbb{R}^n)^*$.

1. Sea $U = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ un subespacio vectorial donde $A =\in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $dim(U) = m$, es decir, $Ax = 0$ son las ecuaciones cartesianas de U. Definimos $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-m}\}$ como las formas lineales de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas respecto de B_u^* son las filas de A, es decir,

$$\omega_1(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$\omega_2(x_1, \ldots, x_n) = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$\omega_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = a_{(n-m)1}x_1 + \ldots + a_{(n-m)n}x_n$$

   Ya que el rango de A es $n-m$, las $n-m$ filas son linealmente independientes como vectores de $\mathbb{R}^n$, y del mismo modo, $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-m}\}$ son linealmente independientes en $(\mathbb{R}^n)^*$. Por la forma que está definida A,

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega_i(x) = 0, 1 \leq i \leq n-m\}.$$

   Por tanto, $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-m}\} \subset an(U)$ y por tanto, $< \omega_1, \ldots, \omega_{n-m} > \subset an(U)$. Como $dim(an(U)) = n-m$ y $< \omega_1, \ldots, \omega_{n-m} >$ tiene dimensión $n-m$, ambos subespacios son iguales.

2. Supongamos que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m y $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base suya. Ampliamos a una base de $\mathbb{R}^n$: $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y sea $B^* = \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ su base dual. En particular

$$\alpha_i(e_j) = \delta_{ij} = 0, \;\; m+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

   Esto prueba que $\{\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\} \subset an(U)$ ya que anulan a una abse de U. Por tanto, $< \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n > \subset an(U)$ y como $\{\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\}$ son linealmente independientes (porque pertenecen a una base, B^*), entonces $< \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n >= an(U)$. Escribimos

$$\alpha_{m+1}(x_1, \ldots, x_n) = a_{(m+1)1}x_1 + \ldots + a_{(m+1)n}x_n$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n(x_1, \ldots, x_n) = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n$$

   Entonces

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_{m+1}(x) = 0, \ldots, \alpha_n(x) = 0\}.$$

   Si $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n-m\times n}(\mathbb{R})$, entonces $Ax = 0$ son las ecuaciones cartesianas de U.

Definición 4.9 *Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$ entre dos espacios vectoriales. Se llama traspuesta de f a la aplicación $f^t : V'^* \to V^*$ dada por*

$$f(\omega)(v) = \omega(f(v)).$$

Relacionamos la expresión matricial de f^t con la de f.

Proposición 4.10 *Con la notación anterior, sean B y B' bases de V y V' respectivamente. Entonces*

$$M(f^t, B'^*, B^*) = M(f, B, B')^t.$$

En particular, $r(f) = r(f^t)$.

Demostración. Introducimos la notación sobre las bases:

$$B = \{e_1, \ldots, e_n\},\ B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$$

$$B^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\},\ B'^* = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}.$$

Supongamos que $A = M(f, B, B')$, es decir,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i,\ \ 1 \leq j \leq n.$$

Hallamos ahora $C = M(f^t, B'^*, B^*)$. Sea $\alpha_k \in B'^*$. Entonces $f^t(\alpha_k) = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\omega_i$. Aplicando e_j en esta igualdad, para $1 \leq j \leq n$, se tiene:

$$f^t(\alpha_k)(e_j) = \alpha_k(f(e_j)) = \alpha_k(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\delta_{ik} = a_{kj}.$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} c_{ik}\omega_i\Big)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\delta_{ij} = c_{jk},$$

como se quería probar. □

Para finalizar, damos algunas propiedades de la traspuesta de una aplicación lineal.

Proposición 4.11 *Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$ entre dos espacios vectoriales.*

1. $(f^t)^t = f$.
2. $an(Im(f)) = Ker(f^t)$.

3. $an(Ker(f)) = Im(f^t)$.

Demostración.

1. Observemos que por la identificación $\Phi : V \to V^{**}$, $(f^t)^t : V \to V$. Nos interesa aquí trabajar con la aplicación Φ para saber en qué espacio vectorial estamos. Entonces hay que probar que $(f^t)^t(\Phi(v)) = \Phi'(f(v))$. Sea $\omega' \in V'^*$. Entonces

$$(f^t)^t(\Phi(v))(\omega') = \Phi(v)(f^t(\omega')) = f^t(\omega')(v) = \omega'(f(v)) = \Phi'(f(v))(\omega'), \forall \omega' \in V'^*,$$

luego se tiene la igualdad buscada.

2. La igualdad $an(Im(f)) = Ker(f^t)$ se hace por doble inclusión.

   a) $an(Im(f)) \subset Ker(f^t)$. Sea $\omega' \in an(Im(f))$. Entonces $\omega' \in Ker(f^t)$ si $f^t(\omega') = 0$, es decir, $\forall v \in V$, $f^t(\omega')(v) = 0$. Pero $f^t(\omega')(v) = \omega'(f(v)) = 0$.

   b) Sea $\omega' \in Ker(f^t)$. Hay que probar que $\omega' \in an(Im(f))$, es decir, que para todo $v \in V$, $\omega'(f(v)) = 0$. Pero por la definición de f^t, se tiene $\omega'(f(v)) = f^t(\omega')(v) = 0(v) = 0$.

   Observemos que otra forma de probar la igualdad es la siguiente. Primero probamos la primera inclusión y en vez de hacer la otra, probamos que las dimensiones de los dos subespacios son las mismas. Gracias al teorema 4.8 y (1), se tiene

$$dim(an(Im(f))) = dim(V') - dim(Im(f)).$$

$$dim(Ker(f^t)) = dim(V') - dim(Im(f^t)).$$

   Pero por la proposición 4.10, $dim(Im(f)) = r(f) = r(f^t) = dim(Im(f^t))$.

3. Por el último apartado del teorema 4.8, hay que probar que $Ker(f) = an(Im(f^t)))$. Por el primer apartado, $Ker(f) = Ker((f^t)^t)$ y ahora se aplica el apartado anterior de esta proposición.

□

Acabamos el tema con el siguiente comentario. Sabemos que la relación entre las expresiones matriciales de una aplicación lineal y de su traspuesta es que una es la traspuesta de la otra (*para adecuadas bases*). Sabemos por el tema 1, que los rangos de una matriz y de su traspuesta coinciden. En este momento se puede hacer otra demostración de este hecho.

Corolario 4.12 *Si* $A \in \mathscr{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$*, entonces* $r(A) = r(A^t)$.

Demostración. Dada una matriz A, consideramos $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal $f(x) = Ax$, escribiendo $x \in \mathbb{R}^m$ por columnas. En particular, $A = M(f, B_u, B'_u)$ y por la proposición 4.10, $A^t = M(f^t, (B'_u)^*, B^*_u)$. Sabemos que $r(A) = r(M(f, B_u, B'_u))$ y $r(A^t) = r(M(f^t, (B'_u)^*, B^*_u))$. De esta forma tenemos

$$r(A) = r(M(f, B_u, B'_u)) = r(f) = dim(Im(f)).$$

$$r(A^t) = r(M(f^t, (B'_u)^*, B^*_u)) = r(f^t) = dim(Im(f^t)).$$

Pero la propiedad 3) de la proposición anterior (que fue probada sin hacer uso de que el rango de una matriz es el rango de su traspuesta) y usando (1), concluimos

$$dim(Im(f^t)) = dim(V) - dim(Ker(f)) = dim(Im(f)).$$

□