Definición 0.1 Dado un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$ de dimensión n y una base ordenada B de V, el *tensor determinante* en la base B es la aplicación

$$\det_B \colon V \times \overset{n)}{\cdots} \times V \to \mathbb{K}, \quad \det_B(y_1, \ldots, y_n) = \det A,$$

donde A es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de $(y_1, \ldots, y_n)$ respecto a B.

$\det_B$ es lineal en cada variable por separado, así que $\det_B$ es n-lineal y por tanto es un tensor n-covariante. Además es antisimétrico: T cambia de signo si intercambiamos cualesquiera dos de sus variables.

Nuestro objetivo es probar que si B, B' son dos baser ordenadas de B, entonces

$$\det_B = \det M(1_V, B', B) \cdot \det_{B'}. \tag{1}$$

Llamaremos $\mathcal{A}_n(V)$ al espacio de tensores n-covariantes antisimétricos sobre V.

Lema 0.2 *Dado $T \in \mathcal{A}_n(V)$, se tiene $T = T(x_1, \ldots, x_n) \cdot \det_B$, donde $B = (x_1, \ldots, x_n)$. En particular,* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}_n(V) = 1$.

Demostración. Tomemos $T \in \mathcal{A}_n(V)$ y $y_1, \ldots, y_n \in V$.

$$\begin{aligned}
T(y_1, \ldots, y_n) &= T\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} x_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} x_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \ldots a_{i_n,n} T\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\right) \\
&\overset{(A)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n} T\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) \\
&\overset{(A)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n} \cdot (-1)^{[\sigma]} T\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\
&= T\left(x_1, \ldots, x_n\right) \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{[\sigma]} a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}\right) \\
&= T\left(x_1, \ldots, x_n\right) \det A \\
&= T\left(x_1, \ldots, x_n\right) \det_B(y_1, \ldots, y_n).
\end{aligned}$$

donde en (A) hemos usado que T es antisimétrico (S_n es el grupo de las permutaciones de n elementos y $(-1)^{[\sigma]}$ es la signatura de cada permitación $\sigma \in S_n$). Como lo anterior es cierto $\forall y_1, \ldots, y_n \in V$, tenemos $T = T(x_1, \ldots, x_n) \cdot \det_B$.

Finalmente, la fórmula $T = T(x_1, \ldots, x_n) \cdot \det_B$ nos dice que todo $T \in \mathcal{A}_n(V)$ es linealmente dependiente con $\det_B$. Como $\det_B(x_1, \ldots, x_n) = 1$, tenemos que $\det_B$ no es el tensor nulo. Por tanto, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}_n(V) = 1$. $\square$

Ya podemos probar la fórmula (1): Tomemos dos bases ordenadas $B = (x_1, \ldots, x_n), B' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ de V. Como $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}_n(V) = 1$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det_B = \lambda \det_{B'}$. Evaluando en $(x'_1, \ldots, x'_n)$ tenemos $\lambda = \det_B(x'_1 \ldots, x'_n) = \det M(1_V, B', B)$ y hemos terminado.