

# Superficies mínimas y de curvatura media constante en $\mathbb{R}^3$ .

Estas notas tuvieron su origen en un curso de doctorado desarrollado por Francisco Martín y Joaquín Pérez. Agradecemos la disposición del primero a que las mismas sean ahora adaptadas como material de la asignatura *Propiedades geométricas de las superficies de separación entre flúidos*.

## 1 Introducción histórica.

Antes de empezar con la materia propia de este curso, nos gustaría hacer un perfil histórico sobre la teoría de superficies mínimas en el espacio Euclídeo. Podríamos comenzar este recorrido histórico con Joseph Louis Lagrange (25 de enero de 1736, Turín - 10 de abril de 1813, París), quien en su memoria de 1762 *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales indefinies* [16], desarrolló un algoritmo para el cálculo de variaciones que dió lugar a lo que hoy conocemos como *ecuación diferencial de Euler-Lagrange*. En este trabajo trató entre otros el problema de encontrar una superficie con contorno prefijado y área mínima, y como consecuencia estableció la ecuación que satisfacen los grafos mínimos  $f(x, y)$ :

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0. \quad (1)$$

En rigor, este trabajo de Lagrange no fue el primero sobre superficies mínimas. En 1741, Leonhard Euler (15 de abril de 1707, Basilea, Suiza - 18 de septiembre de 1783, San Petersburgo, Rusia) había estudiado este problema en el caso particular de superficies de revolución, lo que simplificaba el problema al reducir la EDP (1) a una EDO:

**Teorema 1.1 (Euler)** *Sea  $f \in C^2([a, b])$  una función positiva y  $\Sigma_f$  la superficie de revolución generada por la gráfica  $\{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$  de  $f$  al rotar alrededor del eje  $x$ . Si  $\Sigma_f$  tiene área mínima entre las superficies de revolución  $\Sigma_h$  donde  $h \in C^2([a, b])$ ,  $h > 0$ , con  $h(a) = f(a)$  y  $h(b) = f(b)$ , entonces  $\Sigma_f$  está contenida en una catenoide<sup>1</sup>, i.e.,  $f(x) = \lambda \cosh\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)$ , donde  $\lambda > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Parametrizamos  $\Sigma_f$  mediante  $X(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta)$ . Así,  $\|X_x\|^2 = 1 + (f')^2$ ,  $\|X_\theta\|^2 = f^2$  y  $\langle X_x, X_\theta \rangle = 0$  de donde  $\frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}X_x, \frac{1}{f}X_\theta$  forma una base ortonormal del fibrado tangente de  $\Sigma_f$ . El elemento de área de  $\Sigma_f$  es  $dA = dA(\partial_x, \partial_\theta)dx \wedge d\theta = f\sqrt{1 + (f')^2} dx \wedge d\theta$  y por tanto

$$\text{Area}(\Sigma_f) = 2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + (f')^2} dx.$$

---

<sup>1</sup>Euler llamó a esta superficie la *alysseide*, pero Plateau la bautizó como catenoide con posterioridad.

Tomemos una función  $\xi \in C^2([a, b])$  con  $\xi(a) = \xi(b) = 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_0 \text{Area}(\Sigma_{f+t\xi}) &= 2\pi \int_a^b \frac{d}{dt} \Big|_0 \left[ (f+t\xi) \sqrt{1 + [(f+t\xi)']^2} \right] dx \\ &= 2\pi \int_a^b \xi \sqrt{1 + (f')^2} dx + 2\pi \int_a^b f \frac{f'\xi'}{\sqrt{1 + (f')^2}} dx. \end{aligned}$$

Alicando la regla de Barrow en el último sumando (notemos que  $\xi(a) = \xi(b) = 0$ ), queda

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 \text{Area}(\Sigma_{f+t\xi}) = 2\pi \int_a^b \xi \left[ \sqrt{1 + (f')^2} - \left( \frac{ff'}{\sqrt{1 + (f')^2}} \right)' \right] dx$$

Como  $t \mapsto \text{Area}(\Sigma_{f+t\xi})$  tiene un punto crítico en  $t = 0$ , lo anterior se anula, para toda función  $\xi \in C^2([a, b])$  con  $\xi(a) = \xi(b) = 0$ . Por densidad de estas funciones  $\xi$  en  $L^2[a, b]$ , deducimos que  $f$  satisface la EDO

$$\sqrt{1 + (f')^2} = \left( \frac{ff'}{\sqrt{1 + (f')^2}} \right)' \quad \text{en } [a, b]. \quad (2)$$

Veamos que  $f \sqrt{1 + (f')^2} - f' \frac{ff'}{\sqrt{1 + (f')^2}}$  es una integral primera de (2). Si  $f$  satisface (2), entonces

$$\begin{aligned} \left[ f \sqrt{1 + (f')^2} - f' \frac{ff'}{\sqrt{1 + (f')^2}} \right]' &= f' \sqrt{1 + (f')^2} + \frac{f}{\sqrt{1 + (f')^2}} f' f'' \\ -f'' \frac{ff'}{\sqrt{1 + (f')^2}} - f' \left( \frac{ff'}{\sqrt{1 + (f')^2}} \right)' &= f' \sqrt{1 + (f')^2} - f' \left( \frac{ff'}{\sqrt{1 + (f')^2}} \right)' = 0. \end{aligned}$$

Así, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $f \sqrt{1 + (f')^2} - f' \frac{ff'}{\sqrt{1 + (f')^2}} = \lambda$ . Quitando denominadores y simplificando, tenemos  $f = \lambda \sqrt{1 + (f')^2}$  (en particular,  $\lambda > 0$ ) luego  $f$  cumple la EDO

$$\frac{f^2}{\lambda^2} - 1 = (f')^2 \quad \text{en } [a, b]. \quad (3)$$

Derivando en (3) obtenemos  $\frac{ff'}{\lambda^2} = f' f''$ . Podemos descartar el caso  $f = \text{constante}$  (las constantes no cumplen (2)), luego  $f'$  no puede ser idénticamente nula. Trabajaremos en un entorno de un  $x_0 \in [a, b]$  donde  $f'$  no tenga ceros. Así,  $y = f(x)$  es invertible en ese entorno, y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'} \stackrel{(3)}{=} \frac{\lambda^2}{\sqrt{y^2 - \lambda^2}}$$

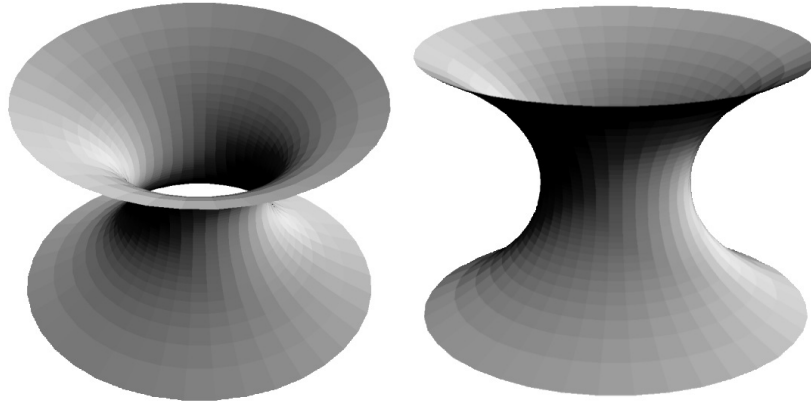


Figure 1: La catenoide, descubierta por L. Euler.

luego

$$x(y) = \lambda \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \lambda^2}} = \lambda \arg \cosh(y/\lambda) + \mu,$$

para algún  $\mu \in \mathbb{R}$ . Des haciendo el cambio  $x = x(y)$  en la última fórmula obtenemos  $y = y(x) = \lambda \cosh\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)$ , como buscábamos.  $\square$

La ecuación EDP casilineal elíptica de segundo orden (1) no fue escrita explícitamente por Lagrange<sup>2</sup>, quien se preocupó también por estudiar el mismo problema anterior para variaciones de volumen constante. Las soluciones para este nuevo problema son lo que conocemos como *superficies de curvatura media  $H = constante$*  ( $H = 0$  en el caso mínimo).

Los matemáticos de aquella época constataron la gran dificultad y diferentes posibilidades que planteaban aquellos problemas. Pensemos que no fue hasta 170 años después cuando Douglas y Radó dieron la primera respuesta satisfactoria a estas cuestiones, y aún hoy día permanecen abiertas diferentes líneas de investigación al respecto como comentaremos posteriormente.

Interesado más en cuestiones teóricas, Lagrange no se preocupó de encontrar soluciones concretas no triviales de la ecuación (1), sin notar siquiera que Euler había encontrado un ejemplo en la catenoide. En 1776, Jean Baptiste Meusnier (Tours, 1754 - Maguncia, Alemania, 1793) descubrió que la catenoide y otra superficie conocida en la época, el *helicoide*, satisfacen la ecuación (1), y además dió la siguiente una interpretación geométrica a la misma: (1) expresa la anulación de una cantidad geométrica asociada a la forma en que se curva la superficie en el espacio, cantidad que llamó la *curvatura media  $H$* , a sugerencia de Sophie Germain (París, 1 de abril de 1776 – 27 de junio de 1831). Es por eso por lo que históricamente se han llamado

<sup>2</sup>Fue Borda [2] quien la escribió por primera vez.

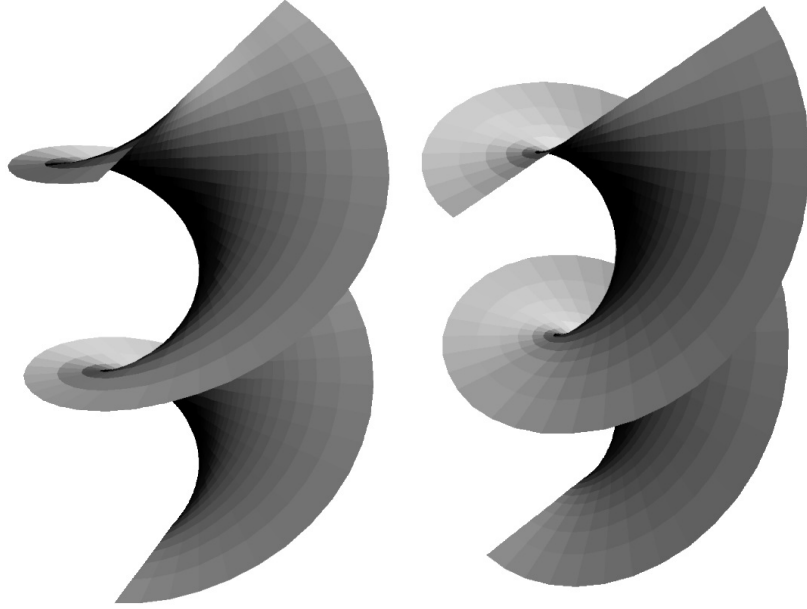


Figure 2: El helicoido.

*superficies mínimas a aquellas que tienen curvatura media cero*, sin tener en consideración que en la mayoría de los casos no representan un mínimo para el funcional área. Esta será también nuestra definición.

**Definición 1.2** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  se dice *mínima* si puede expresarse localmente como el grafo de una solución de la ecuación (1). Esta ecuación admite una versión de *tipo divergencia*,

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0.$$

Es bien conocida la fórmula

$$\Delta X = 2HN \tag{4}$$

válida para una inmersión isométrica  $X = (x_1, x_2, x_3): (M, ds^2) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de una superficie Riemanniana en el espacio Euclídeo, donde  $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$  denota el laplaciano usual (traza del hessiano),  $N$  es un normal unitario a  $X$  y  $H$  la curvatura media asociada a  $N$ . Cuando

escribimos  $X$  localmente como grafo de una función  $f$ , la curvatura media viene dada por

$$H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{[2(1 + \|\nabla f\|^2)]^{3/2}},$$

Con lo que tenemos la definición dada por Meusnier:

**Definición 1.3** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  se dice *mínima* si su curvatura media es idénticamente nula.

De (4) se tiene otra definición equivalente de minimalidad:

**Definición 1.4** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  se dice *mínima* si sus funciones coordenadas son armónicas.

Sea  $\Omega$  un subdominio con cierre compacto en una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Si perturbamos en la dirección normal la inclusión  $X$  en  $\Omega$  de la forma  $X + tuN$  donde  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , entonces  $X + tuN$  es de nuevo una inmersión para  $t$  suficientemente próximo a cero. La *primera fórmula de variación del área* nos da la primera derivada del funcional área  $A(t) = \text{Area}((X + tuN)(\Omega))$ :

$$A'(0) = -2 \int_{\Omega} uH dA, \quad (5)$$

donde  $dA$  representa el elemento de área de  $M$ . (5) nos lleva a una cuarta definición equivalente de minimalidad.

**Definición 1.5** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  se dice *mínima* si es un punto crítico para el funcional área asociado a cualquier variación normal con soporte compacto.

Ya hemos comentado que la palabra “mínima” no expresa realmente un mínimo del funcional área sino un punto crítico. A este respecto, debemos mencionar que una consecuencia de la *segunda variación del área* es que cualquier punto de una superficie mínima tiene un entorno que minimiza el área de entre todas aquellas superficies con su misma frontera. Esta propiedad local justifica la palabra “mínima” para esta clase de superficies<sup>3</sup>

**Definición 1.6** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es *mínima* se dice mínima si cada punto  $p \in M$  admite un entorno que minimiza el área de entre todas las superficie con su misma frontera.

Las definiciones 1.5 y 1.6 nos muestran a las superficies mínimas como el análogo bidimensional a las geodésicas en la geometría Riemanniana

---

<sup>3</sup>También debemos señalar que la minimización global de área (en cada subdominio relativamente compacto) es una condición muy restrictiva para una superficie. De hecho, la única superficie completa en  $\mathbb{R}^3$  que minimiza el área globalmente es el plano.

Además del funcional área  $A$ , otro funcional muy estudiado en el cálculo de variaciones es el funcional *energía de Dirichlet*,

$$E = \int_{\Omega} \|\nabla X\|^2 dA,$$

donde de nuevo  $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una inmersión isométrica y  $\Omega \subset M$  es un subdominio relativamente compacto. Los funcionales  $A, E$  están ligados por la desigualdad

$$2A \leq E \tag{6}$$

como se deduce de la desigualdad vectorial

$$\|u \times v\| \stackrel{(a)}{\leq} \|u\|\|v\| \stackrel{(b)}{\leq} \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2),$$

donde  $u, v \in \mathbb{R}^3$  (tomar  $u = X_t, v = X_s$  para una inmersión  $X = X(t, s)$  e integrar sobre  $\Omega$ ). Además, la igualdad en (a) se da si y sólo si  $u$  y  $v$  son perpendiculares, y la igualdad en (b) se da si y sólo si  $\|u\| = \|v\|$ . Es decir, la igualdad en (6) se da si y sólo si la inmersión es *conforme*. Esta última condición siempre puede conseguirse para una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$  (son las llamadas *coordenadas isotermas*), de donde tenemos otras dos definiciones equivalentes de minimalidad, en términos del funcional energía.

**Definición 1.7** Una inmersión conforme  $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es *mínima* si y sólo si es un punto crítico del funcional energía para todas las variaciones con soporte compacto, o equivalentemente, si todo punto  $p \in M$  admite un entorno con la menor área posible de entre todas las superficies con su misma frontera.

Desde un punto de vista físico, la función curvatura media de una la membrana que separa dos medios homogéneos es igual (salvo una constante multiplicativa no cero), a la diferencia entre las presiones en los dos lados de la superficie (ley de Laplace-Young). Cuando esta diferencia de presiones es cero, entonces la membrana tiene curvatura media cero. Por lo tanto, las películas de jabón en el espacio (no las burbujas) son realizaciones físicas del concepto ideal de una superficie mínima.

**Definición 1.8** Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es *mínima* si y sólo si cada punto  $p \in M$  admite un entorno  $D_p$  que es igual a la (única) película de jabón que se obtiene con la frontera  $\partial D_p$ .

Consideremos de nuevo la aplicación de Gauss  $N: M \rightarrow \mathbb{S}^2$  de nuestra superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Podemos identificar el plano tangente  $T_p M$  (es decir, el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$  obtenido trasladando paralelamente el plano tangente afín a  $M$  en  $p$ ) con el plano tangente  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$  a la esfera unidad en  $N(p)$ . De esta forma, la diferencial  $A_p = -dN_p$  es un endomorfismo de  $T_p M$ , llamado el *operador de Weingarten*.  $A_p$  es un endomorfismo autoadjunto, y se llaman

*direcciones principales* (resp. *curvaturas principales*) a una base ortonormal de vectores propios de  $A_p$  (resp. a los correspondientes valores propios). Como la curvatura media  $H$  es la media aritmética de las curvaturas principales, tenemos que la minimalidad se reduce a la expresión

$$A_p = -dN_p = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

En una base ortonormal de  $T_pM$ . Si ahora proyectamos  $N$  estereográficamente desde el polo norte de  $\mathbb{S}^2$  a  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , obtenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann (cambiadas de signo). Teniendo en cuenta que la proyección estereográfica invierte la orientación, obtenemos la última caracterización de minimalidad.

**Definición 1.9** una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es *mínima* si su aplicación de Gauss proyectada estereográficamente  $g: M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  es holomorfa con respecto a la estructura de superficie de Riemann subyacente a  $M$ .

Una vez explicada la relación de las superficies mínimas con la teoría de funciones holomorfas de una variable, podemos volver a nuestro repaso histórico. Gaspard Monge en 1784 [19, 20], luego Adrien-Marie Legendre en 1787 [17], y posteriormente Sylvestre François Lacroix y André-Marie Ampère entre otros, obtuvieron fórmulas de representación integrales para las funciones coordenadas de soluciones de la ecuación de Lagrange en términos de funciones analíticas, pero no dieron nuevos ejemplos. En 1816, Joseph Diaz Gergonne [8] formuló una serie de problemas concretos y dirigió la atención de los matemáticos al estudio de las superficies mínimas. A raíz de estos problemas, de 1831 a 1835, casi sesenta años después del descubrimiento de la catenoide y del helicoide, Heinrich F. Scherk mostró en [28, 29] ecuaciones explícitas para cinco nuevas superficies mínimas obtenidas usando la representación de Monge-Legendre. Su idea fundamental fue usar una técnica de separación de variables para integrar la ecuación (1).

La edad de oro clásica de las superficies mínimas fue aproximadamente la segunda mitad del siglo XIX, donde se sucedieron rápidamente nuevos descubrimientos y publicaciones. Entre 1842 y 1843, Eugène Charles Catalan probó que el helicoide es la única superficie mínima reglada, además del plano. Por este tiempo, el físico belga Joseph-Antoine Ferdinand Plateau observó que ciertas superficies mínimas (las que producen mínimos para el área con frontera compacta prescrita) se pueden realizar físicamente siguiendo la forma que adoptan las películas de jabón que se apoyan en un contorno de alambre fijo, motivando lo que hoy se conoce como *problema de Plateau*, es decir, la formulación matemática de la existencia o no de superficies que minimizan el área, o más generalmente de superficies mínimas, con frontera prefijada. Este planteamiento de Plateau ha sido uno de los focos con más influencia en el desarrollo de esta teoría, como iremos viendo más adelante. Posteriormente Pierre Ossian Bonnet investigó las líneas asintóticas, las de curvatura y las geodésicas sobre superficies mínimas.

En el año 1865 la teoría de superficies mínimas sufrió un importante empuje gracias a la obtención por Hermann Amandus Schwarz [26] de métodos para resolver el problema de Plateau

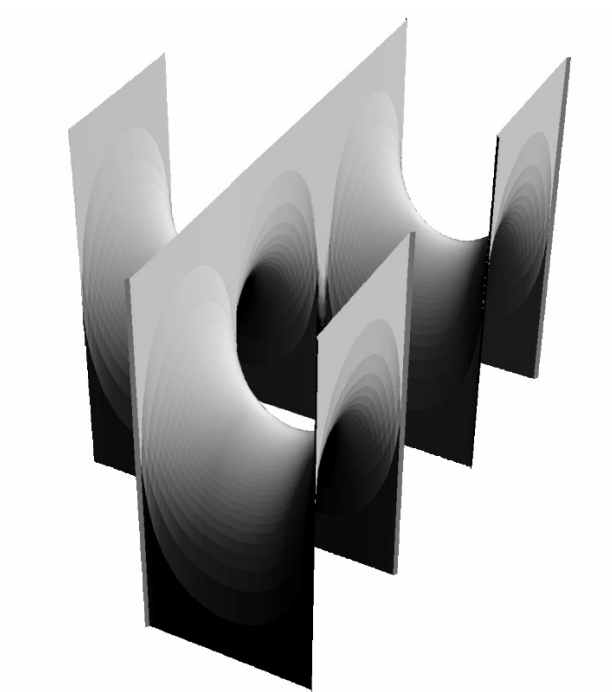


Figure 3: Una superficie de Scherk doblemente periódica.



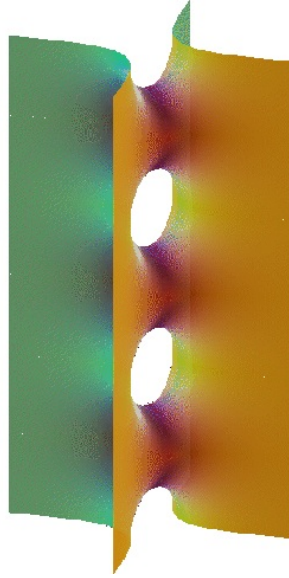


Figure 4: Una superficie de Scherk simplemente periódica.

con borde un cuadrilátero prefijado, cuya aplicación más inmediata fue el descubrimiento de un ejemplo triplemente periódico que hoy lleva su nombre. Estos trabajos están basados en las fórmulas de representación para superficies mínimas obtenidas por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, quien había expuesto dichas fórmulas en el Seminario matemático de la Universidad de Berlín en 1861 y las comunicó a la Academia de Berlín en 1866 (ver [33, 34]). Unas fórmulas de representación similares fueron establecidas por A. Enneper [6] en 1864 usando las líneas de curvatura como líneas de parámetros sobre la superficie. Como aplicación sencilla de dichas fórmulas, Enneper descubrió (ver de nuevo [6], pag. 108) un nuevo ejemplo de superficie mínima, que hoy conocemos como superficie de Enneper.

Otras fórmulas de representación fueron introducidas por Julius Weingarten (1863), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1866), A. Peterson (1866) y Eugenio Beltrami (1868).

Riemann contribuyó al desarrollo de esta teoría en varias facetas, y de especial forma con su trabajo póstumo publicado en 1867 [25]. En este trabajo Riemann trató el problema de Plateau para superficies mínimas bordeadas por una o varias líneas rectas. En concreto, él estudió los siguientes casos especiales de frontera: (i) Dos líneas rectas que se cruzan. (ii) Tres líneas rectas, dos de las cuales están en un plano  $P$  y se intersecan, y la tercera está en un plano  $P'$  paralelo a  $P$ . (iii) Tres líneas rectas que se cortan. (iv) Un cuadrilátero. (v) Dos círculos arbitrarios en planos paralelos.

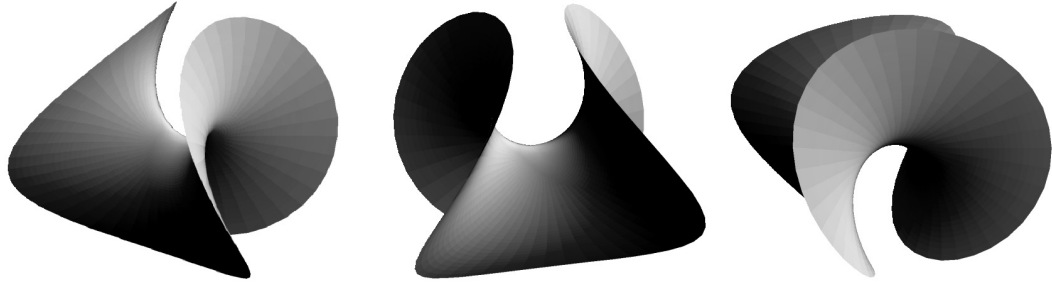


Figure 5: La superficie de Enneper.

Este último caso da lugar a una familia uno-paramétrica de superficies mínimas foliadas por líneas y círculos en planos paralelos. Estas superficies junto con la catenoide fueron caracterizadas por el propio Riemann como las únicas fibradas por círculos en planos paralelos y son conocidas como los ejemplos de Riemann. Con el paso del tiempo se descubrió la importancia del Análisis Complejo y la teoría de Superficies de Riemann dentro del campo de las superficies mínimas, por lo que los trabajos fundacionales en esta línea de Riemann han supuesto una aportación directa de extraordinario valor.

Otro hecho interesante fue el descubrimiento de la primera superficie mínima no orientable, debido a L. Henneberg en el año 1875 (ver [9, 10]). La superficie de Henneberg fue estudiada por A. Herzog y C. Schilling, el último de los cuales obtuvo un dibujo estereoscópico de la misma.

Otros grandes geómetras que en este tiempo contribuyeron al desarrollo de esta teoría fueron: J. A. Serret [27], A. Ribaucour, G. Darboux, L. Bianchi, S. Lie y A. Schoenflies, entre otros.

Veinte años después de que Riemann fundara la Geometría Riemanniana (10 de Junio de 1854) R. Lipschitz [18] propuso una generalización de la idea de Meusnier acerca del concepto de curvatura media definiendo el vector curvatura media asociado a una subvariedad. Lipschitz probó que una subvariedad es crítica para el funcional volumen si y sólo si su vector curvatura media es nulo y, en consecuencia, extendió la teoría de superficies mínimas a ambientes de dimensión arbitraria.

Durante los primeros años del siglo XX no hubo progresos significativos en la teoría de las superficies mínimas aparte de un trabajo de E. R. Neovius sobre superficies mínimas periódicas que es una continuación de sus primeros trabajos llevados a cabo en la década de 1880 a 1890.

Una contribución esencial indirecta al estudio de las superficies mínimas fue el nacimiento y posterior desarrollo de la poderosa teoría de integración y medida, debida a E. Lebesgue. De gran importancia fueron también los métodos directos de Hilbert, Lebesgue, Courant y Tonelli, y la teoría del Análisis Funcional fundada por Hilbert, F. Riesz, E. Schmidt, R. Fréchet, Hahn

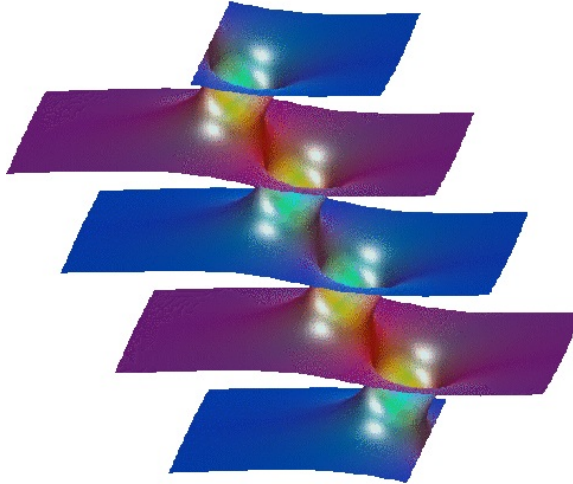


Figure 6: Un ejemplo de Riemann.

y Banach. Además las técnicas básicas de la teoría de ecuaciones elípticas, los teoremas de regularidad y las estimaciones a priori, allanaron el camino para una resolución satisfactoria del problema de Plateau. El resultado más brillante en las primeras décadas del nuevo siglo XX fue el Teorema de Bernstein [1], uno de los más fascinantes resultados en la teoría de ecuaciones elípticas no lineales. Este teorema afirma que el único grafo mínimo definido en todo el plano es el determinado por una función afín. Tal resultado fue generalizado, bajo ciertas hipótesis adicionales, a dimensión y codimensión arbitraria por Hildebrandt, Jost y Widman.

Entre 1925 y 1950 la teoría de superficies mínimas cobró nuevo empuje. Uno de los aspectos que sufrió un mayor desarrollo fue el problema de Plateau. La primera prueba de existencia general para el problema de Plateau no paramétrico fue dada por Haar en 1927 con importantes aportaciones de Radó acerca de la regularidad y minimalidad de la solución. La contribución de Haar y Radó supuso un gran avance; por primera vez el programa elaborado por Hilbert en sus problemas 19 y 20 fue llevado a cabo usando técnicas de cálculo de variaciones aplicadas a ecuaciones de Euler no lineales. Garnier publicó una primera solución al problema de Plateau con un contorno general en 1928, aunque un resultado más completo y convincente fue obtenido por Douglas [4, 5] y Radó en 1930.

En la década de los sesenta, De Giorgi, Fleming, Federer y Reifenberg desarrollaron la potente teoría geométrica de la medida que se ha convertido en una herramienta cada vez más influyente en el estudio de las superficies mínimas y de curvatura media constante.

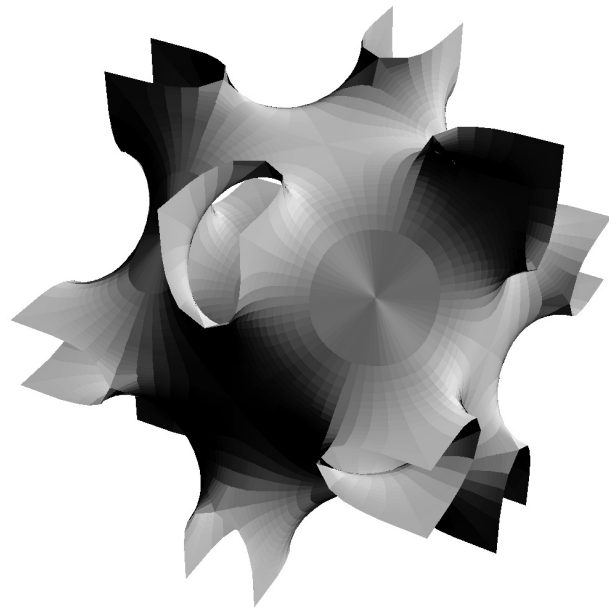


Figure 7: Una pieza fundamental de la superficie de Neovius.

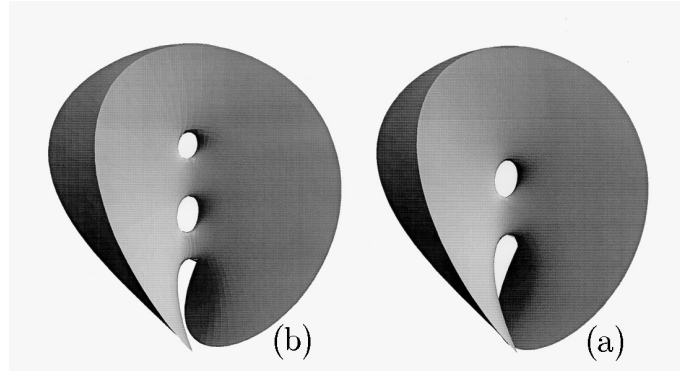


Figure 8: (a) La superficie de Chen y Gackstatter de género 1. (b) La superficie de Chen y Gackstatter de género 2.

En los últimos 30 años, el interés se ha centrado sobre una clase de superficies que están, conceptualmente, bastante lejos del término original de superficie mínima: son aquellas superficies que careciendo de frontera, se extienden indefinidamente en el espacio; en otras palabras, *superficies mínimas completas*. Esto se debe sobre todo a los trabajos de Robert Osserman, quien recuperó la olvidada teoría de Enneper y Weierstrass mostrando su utilidad e importancia en el estudio de las superficies mínimas completas. La principal aportación de Osserman consistió en conectar la teoría de superficies mínimas completas con el Análisis Complejo y la teoría de Superficies de Riemann clásicos. Así pudo obtener resultados acerca de la aplicación de Gauss de superficies mínimas (que puede interpretarse como una función meromorfa) y la geometría de las superficies mínimas completas de curvatura total finita en  $\mathbb{R}^3$ . Estos trabajos de Osserman (que pueden verse en [21, 23]), han sido el detonante de una extraordinaria expansión de la teoría de superficies mínimas en la segunda mitad del siglo XX, que continúa en nuestros días.

A comienzos de los años 80, aprovechando las técnicas introducidas por Osserman, C. C. Chen y F. Gackstatter construyeron los dos primeros ejemplos orientables con topología no trivial. Estos ejemplos tienen género uno y dos, respectivamente, y un único final. Ambas pueden verse como el resultado de unirle una o dos asas a la superficie de Enneper, tal como ilustra la figura 8.

El descubrimiento por parte de Celso J. Costa de la superficie que desde entonces lleva su nombre, supuso el punto de partida para el estudio de la familia de las superficies mínimas propiamente embebidas. La superficie de Costa es un toro propiamente embebido en  $\mathbb{R}^3$  con tres finales, uno de ellos es asintótico a un plano y los otros dos son asintóticos a dos medias catenoides (véase la figura 9). Llegados a este punto es referencia obligada el trabajo de David Hoffman y William H. Meeks III [13], donde éstos construyen superficies mínimas propiamente embebidas con tres finales y género arbitrario, a partir de la superficie de Costa.

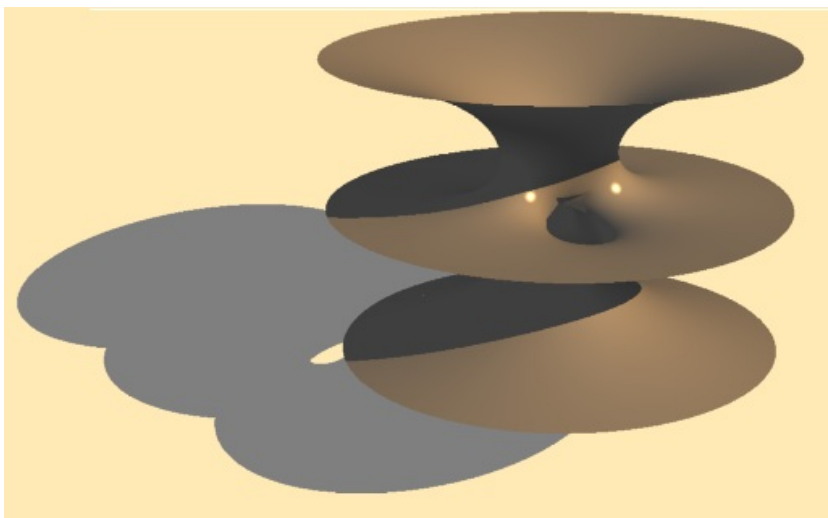


Figure 9: La superficie de Costa.

En la actualidad son muchos los nuevos ejemplos de superficies mínimas completas, de curvatura total finita, tanto inmersas como embebidas en  $\mathbb{R}^3$ . Para ello, hemos asistido a un prodigioso desarrollo de nuevas técnicas que complementan y superan las fórmulas de representación de Osserman-Enneper-Weierstrass. En esa nueva línea citamos los trabajos de Nikolaos Kapouleas [15], Martin Traizet [30] y Matthias Weber y Michael Wolf [31, 32].

Con esta breve incursión en la historia de las superficies mínimas queremos poner de manifiesto que estamos ante un tema de investigación con una larga tradición, en el que han efectuado aportaciones significativas algunos de los más grandes matemáticos de las últimas tres centurias. A pesar de esto, las superficies mínimas siguen siendo una fuente continua de nuevos desafíos y resultados que las mantienen en la primera línea dentro de la investigación actual en Geometría Diferencial.

## 2 Objetivos.

Desde luego, por razones de tiempo y espacio hemos de escoger algunas de las vertientes de la teoría de superficies mínimas en  $\mathbb{R}^3$  para desarrollar en el curso, aunque ello suponga dejar de lado otras muchas no menos interesantes. Para esta elección nos hemos basado en primar resultados que estén basados (o se relacionen en cierta medida) en una de las herramientas más poderosas y útiles en esta teoría: el principio del máximo. Pero aún así hemos querido tocar, aunque sólo sea de paso, varios de los problemas principales en la teoría de superficies mínimas.

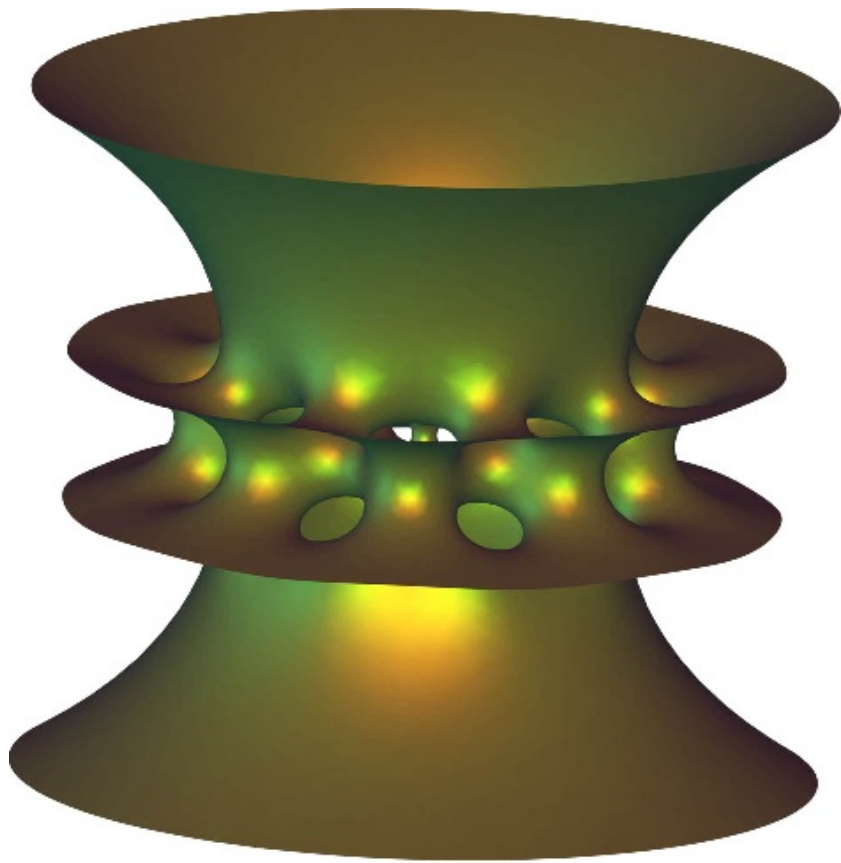


Figure 10: Uno de los ejemplos construidos por Kapouleas.

Empezaremos con la Sección 3 de preliminares, donde presentaremos la mayoría de las definiciones y ejemplos con los que luego trabajaremos, así como los resultados de comparación elementales entre dos superficies atendiendo a sus segundas formas fundamentales. Tales resultados de comparación serán suficientes para probar en la Sección 4 la equivalencia entre la no positividad de la curvatura de Gauss de una superficie y satisfacer la *propiedad de la envolvente convexa* (Teorema 4.2). En particular, esta propiedad será satisfecha por cualquier superficie mínima compacta y con borde. En la Sección 5 daremos un giro hacia el Análisis para estudiar el principio del máximo para un operador lineal elíptico de 2º orden, y deduciremos de éste las formulaciones de los principios del máximo en el interior y en la frontera para el operador curvatura media de una superficie (Corolarios 5.9 y 5.11), la piedra angular sobre la que edificar las demostraciones de futuros teoremas. Como primera aplicación del principio del máximo probaremos en la Sección 6 el *Teorema fuerte del semiespacio* (Teorema 6.2), un reciente resultado enmarcado dentro de la teoría de las superficies mínimas propiamente embebidas. La Sección 7 estará dedicada a otros de los problemas centrales en la teoría de las superficies mínimas: el *Problema de Plateau*. Dentro de éste, evitaremos los principales resultados de existencia para concentrarnos en situaciones donde obtengamos unicidad de solución, como el Teorema de Radó (Teorema 7.4). En la Sección 8 veremos algunos resultados relacionados con la desigualdad isoperimétrica en superficies mínimas (Teoremas 8.1 y 8.4), donde de nuevo el principio del máximo será determinante para descartar situaciones en que una superficie mínima tiene dos componentes frontera demasiado alejadas en cierto sentido. Por último, hemos querido terminar con una incursión en el mundo de las superficies de curvatura media constante no cero, dedicando la Sección 9 a una de las más famosas aplicaciones del principio del máximo, el *método de reflexión de Alexandrov*, que culmina con su celebrada caracterización de la esfera (Teorema 9.1).

Como decíamos arriba, han quedado muchos temas sin tocar, entre ellos la representación de Weiersatras, algunos invariantes integrales de las superficies mínimas como el flujo, la teoría de las superficies mínimas periódicas o de las inmersas, el problema de períodos y la producción de ejemplos, y un largo etcétera. Creemos sin embargo, que los temas escogidos, además de tener un hilo conductor en el principio del máximo, dan una idea de la belleza de los resultados que pueden encontrarse dentro de esta teoría, y quizás susciten un interés que a buen seguro podrá saciarse en textos más especializados.



### 3 Preliminares.

Pasaremos ahora a establecer los conceptos básicos para desarrollar el curso.

#### 3.1 Superficies embebidas.

Sea  $(M, g)$  una superficie Riemanniana. Una *inmersión isométrica*  $\psi : (M, g) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es una aplicación diferenciable tal que para cualquier  $p \in M$ , la diferencial  $d\psi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$  cumple

$$g_p(u, v) = \langle d\psi_p(u), d\psi_p(v) \rangle, \quad \forall u, v \in T_p M.$$

Diremos que  $\psi$  es un *embebimiento* cuando  $\psi : M \rightarrow \psi(M)$  sea un homeomorfismo. En el caso de un embebimiento, es usual identificar  $M$  con  $\psi(M)$  (esto es, veremos  $M$  como subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ ) y  $T_p M$  con el subespacio vectorial  $d\psi_p(T_p M) \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\forall p \in M$ . Si  $\psi$  es sólo inmersión isométrica, la segunda identificación sigue siendo válida pero la primera sólo lo es localmente.

**Nota 3.1** Toda inmersión  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  puede verse una inmersión isométrica sin más que considerar en  $M$  la métrica pullback  $g = \psi^* \langle \cdot, \cdot \rangle$  dada por  $[\psi^* \langle \cdot, \cdot \rangle]_p(v, w) = \langle d\psi_p(v), d\psi_p(w) \rangle$ ,  $\forall v, w \in T_p M$ .

**Ejemplo 3.2** EL PLANO.

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}, \quad \text{donde } (a, b, c) \neq (0, 0, 0), d \in \mathbb{R}.$$

**Ejemplo 3.3** LA ESFERA.

$$\mathbb{S}_{p_0}^2(r) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p - p_0\| = r\}, \quad \text{donde } p_0 \in \mathbb{R}^3, r > 0.$$

**Ejemplo 3.4** Sea  $h : O \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, donde  $O$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $a \in \mathbb{R}$  un valor regular de  $h$  (i.e.  $(\nabla h)_p \neq 0$  para todo  $p \in h^{-1}(\{a\})$ ). Entonces,  $M = h^{-1}(\{a\})$  es una superficie embebida en  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejemplo 3.5** LA CATENOIDE.

La superficie  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - \cosh^2 z = 0\}$  obtenida al revolucionar la catenaria de ecuación  $y = \cosh z$  alrededor del eje  $z$  es una superficie embebida en  $\mathbb{R}^3$ , llamada *Catenoide* (ver figura 1 en la introducción).

**Ejemplo 3.6** LAS SUPERFICIES DE SCHERK SIMPLE Y DOBLEMENTE PERIÓDICAS.

Otras superficies embebidas en  $\mathbb{R}^3$  son  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin z = \sin hx \sinh y\}$  y  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \cos xe^z - \cos y = 0\}$ .  $S_1$  es invariante por el grupo cíclico de traslaciones

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

mientras que  $S_2$  es invariante por el grupo de traslaciones de rango 2, generado por

$$(x, y, z) \mapsto (x + 2\pi, y, z), \quad (x, y, z) \mapsto (x, y + 2\pi, z).$$

Por esta periodicidad,  $S_1$  recibe el nombre de *superficie de Scherk simplemente periódica* (ver figura 4 en la introducción) mientras que  $S_2$  se conoce como la *superficie de Scherk doblemente periódica* (figura 3). Además, nótese que  $S_2$  contiene una familia infinita de rectas verticales,

$$R_{n,m} = \left\{n\pi + \frac{\pi}{2}\right\} \times \left\{m\pi + \frac{\pi}{2}\right\} \times \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

### 3.2 Aplicación de Gauss y curvaturas.

Dada una inmersión isométrica  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , llamaremos *aplicación de Gauss de  $M$*  a una asignación diferenciable de un normal unitario a  $T_p M$  en  $\mathbb{R}^3$  para cada  $p \in M$ , i.e.  $N \in C^\infty(M, \mathbb{S}^2(1))$  tal que  $\langle N(p) \rangle = T_p^\perp M$ ,  $\forall p \in M$ .

**Nota 3.7** Siempre es posible construir una aplicación de Gauss local: dada una carta  $(U, \phi = (u, v))$  sobre  $M$ , podemos definir  $N^U : U \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$  mediante

$$N^U = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\|}.$$

Sin embargo, la existencia de una aplicación de Gauss global no siempre está garantizada.

**Definición 3.8** En la situación anterior,  $M$  se dice *orientable* si existe una aplicación de Gauss global  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$ .

Nótese que toda superficie orientable admite exactamente dos aplicaciones de Gauss, siendo éstas opuestas.

**Definición 3.9** Sea  $M$  una superficie, inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^3$ . Usando una aplicación de Gauss (local)  $N$ , podemos definir la *segunda forma fundamental*

$$\sigma_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \mid \sigma_p(v, w) = -\langle v, dN_p(w) \rangle,$$

para cualquier  $p \in M$ .  $\sigma_p$  es una forma bilineal simétrica sobre  $T_p M$  ( $dN_p$  es un endomorfismo autoadjunto de  $(T_p M, g_p)$ ), y por tanto es ortogonalmente diagonalizable. Los valores propios  $k_1(p), k_2(p)$  de  $\sigma_p$  se llaman las *curvaturas principales de  $M$  en  $p$  respecto a  $N$* , y las *direcciones principales en  $p$*  son las direcciones propias asociadas a las curvaturas. Siempre podremos tomar una bases ortonormal de  $T_p M$  de direcciones principales en  $p$ .

Nótese que las curvaturas principales son los opuestos de los valores propios de  $dN$ , y por tanto cambian de signo al cambiar  $N$  por  $-N$ , pero las direcciones principales siguen siendo las mismas.

**Definición 3.10** Se definen la *curvatura de Gauss* y *curvatura media* de  $M$  en  $p$  como

$$K(p) = k_1(p)k_2(p), \quad H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)).$$

De nuevo,  $H$  cambia de signo al cambiar  $N$  por  $-N$ , pero  $K$  permanece invariante. Tanto  $K$  como  $H$  son funciones diferenciables sobre  $M$ .

**Definición 3.11** Una superficie se dice *mínima* si su curvatura media se anula idénticamente.

**Ejemplo 3.12** Sea  $\Pi$  un plano en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, su aplicación de Gauss es constante, luego  $K = H = 0$  en  $\Pi$ . De hecho, estas dos propiedades caracterizan al plano:

*Sea  $M$  una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces,  $H = K = 0$  en  $M$  si y sólo si  $M$  es un abierto de un plano.*

**Ejemplo 3.13** En el caso de la esfera  $\mathbb{S}_{p_0}^2(r)$ , la aplicación de Gauss puede tomarse como  $N(p) = -\frac{1}{r}(p - p_0)$ , luego  $dN_p = -\frac{1}{2}\text{Id}_{T_p\mathbb{S}_{p_0}^2(r)}$ , y la segunda forma fundamental es  $\sigma_p = \frac{1}{r}\langle \cdot, \cdot \rangle$ . De aquí se tienen  $H = \frac{1}{r}$  y  $K = \frac{1}{r^2}$ .

**Ejemplo 3.14** Si  $M$  viene dada por  $M = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid f(p) = a\}$  donde  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  y  $a$  es valor regular de  $f$ , entonces podemos tomar como aplicación de Gauss a

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} : M \rightarrow \mathbb{S}^2(1).$$

Usando esto, es un buen ejercicio calcular la curvatura de Gauss y la curvatura media de la Catenoide y las superficies de Scherk simple y doblemente periódicas, y comprobar que  $H = 0$  en ellas, i.e. son superficies mínimas.

**Ejemplo 3.15** EL HELICOIDE.

El Helicoide es la superficie de  $\mathbb{R}^3$  obtenida como imagen del embebimiento (ver figura 2 en la introducción)

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

También tiene curvatura media idénticamente nula. De hecho, ésta es junto al plano la única superficie mínima reglada y completa.

**Ejemplo 3.16** LA SUPERFICIE DE ENNEPER.

La superficie de Enneper es también una inmersión mínima del plano en  $\mathbb{R}^3$ , dada por

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \psi(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

Sin embargo, en este caso  $\psi$  no es un embebimiento (en la figura 5 de la introducción pueden verse representaciones de trozos de la superficie de Enneper sin autointersecciones, pero esta propiedad se pierde si representáramos partes mayores de la superficie).

### 3.3 Comparación de superficies mediante sus curvaturas.

Sea  $M$  una superficie inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^3$ . Dado  $p \in M$ , es posible expresar localmente  $M$  como grafo de una función  $u$  definida en un entorno de 0 en  $T_pM$ . Salvo una rotación, podemos suponer  $T_pM = \{x_3 = 0\}$  luego  $(\nabla u)(0) = 0$ . En esta situación, la segunda forma fundamental de  $M$  en  $p$  es igual al *hessiano* de  $u$  en 0:

$$\sigma_p = (\nabla^2 u)_0 = \begin{pmatrix} u_{xx}(0) & u_{xy}(0) \\ u_{xy}(0) & u_{yy}(0) \end{pmatrix}.$$

Si ahora tenemos dos superficies  $M_1$  y  $M_2$  que son tangentes en un punto común  $p \in M_1 \cap M_2$ , podremos expresar ambas superficies localmente como grafos sobre el mismo abierto de  $T_pM_1 = T_pM_2 = \{x_3 = 0\}$  alrededor del origen. Sean  $u_1, u_2$  las funciones tales que  $M_1 = \text{grafo}(u_1)$  y  $M_2 = \text{grafo}(u_2)$  (localmente). Consideraremos sobre  $M_1$  y  $M_2$  la misma orientación, i.e.  $N_1(p) = N_2(p)$ . Llamemos  $u = u_2 - u_1$ . Entonces, se tienen

$$u(0) = 0, \quad (\nabla u)_0 = 0, \quad (\nabla^2 u)_0 = (\sigma_2)_p - (\sigma_1)_p,$$

donde  $\sigma_1, \sigma_2$  son las segundas formas fundamentales de  $M_1$  y  $M_2$  respecto a  $N_1$  y  $N_2$ , respectivamente.

**Definición 3.17** En la situación anterior, diremos que  $M_1 \leq M_2$  en  $p$  ( $M_1$  está por debajo de  $M_2$  en  $p$ ) si  $u \geq 0$ , i.e.  $u_1 \leq u_2$  en un entorno de 0. Nótese que se exige  $N_1(p) = N_2(p)$  para comparar ambas superficies.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del comportamiento local del hessiano en un mínimo de una función diferenciable.

**Lema 3.18** *En la situación anterior,*

1. Si  $(\sigma_2)_p > (\sigma_1)_p$ , entonces  $M_2 \geq M_1$  en  $p$ .
2. Si  $M_2 \geq M_1$  en  $p$ , entonces  $(\sigma_2)_p \geq (\sigma_1)_p$ . En particular,  $H_2(p) \geq H_1(p)$ .

**Lema 3.19** *Sea  $M$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  y  $p \in M$ . Entonces,  $K(p) > 0$  si y sólo si existe una esfera  $\mathbb{S}_{p_0}^2(r)$  tangente a  $M$  en  $p$  tal que  $M \cap \overline{B}_{p_0}(r)$  es un entorno de  $p$  en  $M$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $K(p) > 0$ . Tras posiblemente cambiar la aplicación de Gauss  $N$  por su opuesta, podemos suponer que las curvaturas principales en  $p$  respecto a  $N$  cumplen  $k_1(p), k_2(p) > 0$ . Dado  $r > 0$ , llamemos  $p_r = p + rN_p$  y consideremos la esfera  $\mathbb{S}_{p_r}^2(r)$ . Es claro que  $\mathbb{S}_{p_r}^2(r)$  y  $M$  son tangentes en  $p$ , y que  $N_p$  coincide con el normal interior a  $\mathbb{S}_{p_r}^2(r)$  en  $p$ . Si ahora tomamos  $r > 0$  tal que  $\frac{1}{r} < k_i(p)$  para  $i = 1, 2$ , entonces la segunda forma fundamental  $\sigma_p$  respecto de  $N$  verificará  $\sigma_p > \frac{1}{r}\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Pero el miembro de la derecha de esta

desigualdad es la segunda forma fundamental de  $\mathbb{S}_{p_r}^2(r)$  respecto del normal interior a  $\mathbb{S}_{p_r}^2(r)$ , luego podemos usar el apartado 1 del Lema 3.18 para concluir que  $M \geq \mathbb{S}_{p_r}^2(r)$  en  $p$ . De aquí se deduce directamente que  $M \cap \overline{B}_{p_r}(r)$  es un entorno de  $p$  en  $M$ .

Recíprocamente, supongamos que existe una esfera  $\mathbb{S}_{p_0}^2(r)$  tal que  $M \cap \overline{B}_{p_0}(r)$  es un entorno de  $p$  en  $M$ . Esto implica que  $M \geq \mathbb{S}_{p_0}^2(r)$ , luego por el apartado 2 del Lema 3.18 tenemos  $\sigma_p \geq \frac{1}{2}\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Como esta última es una forma definida positiva, también lo es  $\sigma_p$  luego  $K(p) > 0$ .  
 $\square$

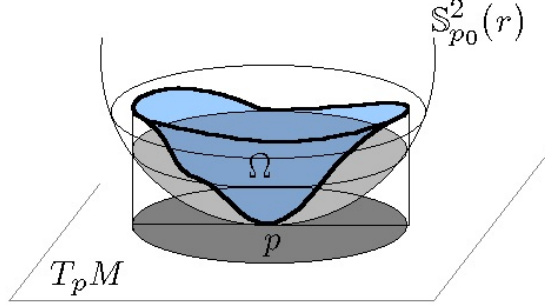


Figure 11: Alrededor de  $p$ ,  $M$  está por encima de  $\mathbb{S}^2_{p_0}(r)$ .

## 4 La propiedad de la envolvente convexa.

Dado  $A \subset \mathbb{R}^3$  no vacío, llamaremos *envolvente convexa de  $A$*  al menor convexo  $\mathcal{E}(A)$  de  $\mathbb{R}^3$  que contenga a  $A$ , esto es, la intersección de todos los convexos conteniendo a  $A$ . Si  $A$  es compacto, podemos calcular  $\mathcal{E}(A)$  como

$$\mathcal{E}(A) = \bigcap_{\substack{H \text{ semiespacio} \\ A \subseteq H}} H.$$

**Definición 4.1** Diremos que una superficie embebida  $M \subset \mathbb{R}^3$  satisface la *propiedad de la envolvente convexa* si todo dominio relativamente compacto  $\Omega \subset M$  cumple  $\Omega \subseteq \mathcal{E}(\partial\Omega)$ .

El resultado principal de esta Sección es

**Teorema 4.2 (Osserman [22])** *Una superficie  $M$  embebida en  $\mathbb{R}^3$  satisface la propiedad de la envolvente convexa si y sólo si su curvatura de Gauss es no positiva.*

*Demostración.* Supongamos primero que  $M$  satisface la propiedad de la envolvente convexa. Por reducción al absurdo, tomemos un punto  $p \in M$  donde  $K(p) > 0$ . Por el Lema 3.19, existe una esfera  $\mathbb{S}^2_{p_0}(r)$  tal que  $M \geq \mathbb{S}^2_{p_0}(r)$ . Tras una rotación en  $\mathbb{R}^3$ , podemos suponer que  $T_p M$  es horizontal y que la situación en un entorno  $\Omega$  de  $p$  en  $M$  es la mostrada en la figura 11.

En particular, podemos tomar  $\Omega$  relativamente compacto en  $M$  y enteramente por encima de  $\mathbb{S}^2_{p_0}(r)$ . Como  $\partial\Omega$  es compacto y está por encima de  $\mathbb{S}^2_{p_0}(r)$ , es posible separar  $p$  de  $\partial\Omega$  mediante un plano horizontal  $\Pi_0$ , i.e.  $p \in \Pi_0^- = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 < x_3(\Pi_0)\}$  y  $\partial\Omega \subset \Pi_0^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > x_3(\Pi_0)\}$ . Esto contradice que  $p$  esté en la envolvente convexa de  $\partial\Omega$ , y la condición necesaria está probada.

Supongamos ahora que  $K \leq 0$  en  $M$ . De nuevo por reducción al absurdo, supongamos que existe un subdominio relativamente compacto  $\Omega \subset M$  tal que  $\Omega \not\subseteq \mathcal{E}(\partial\Omega)$ . Así, existirá

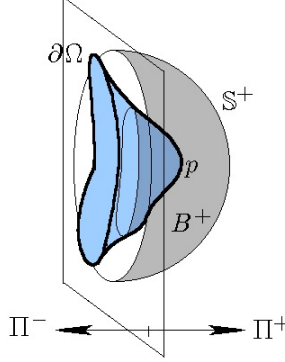


Figure 12: La semiesfera  $\mathbb{S}^+$  no corta a la superficie  $\Omega$ .

un plano  $\Pi$  y un punto  $p \in \Omega$  tales que  $\partial\Omega \subset \Pi^-$  y  $p \in \Pi^+$  (con las definiciones obvias para estos semiespacios abiertos). Tomemos una esfera  $\mathbb{S}$  centrada en un punto de  $\Pi$ , de forma que si llamamos  $\mathbb{S}^+$  a  $\mathbb{S} \cap \Pi^+$ , se tenga  $\Omega \cap \mathbb{S}^+ = \emptyset$ . Sea  $B$  la bola cerrada cuya frontera es  $\mathbb{S}$  y  $B^+ = B \cap \Pi^+$ , véase la figura 12.

Consideremos ahora la familia 1-paramétrica de esferas  $\mathbb{S}_r$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) que pasa por  $\Pi \cap \mathbb{S}$ . Como esta familia da una foliación de  $B^+$ , existirá un primer punto de contacto  $q$  entre  $\Omega$  y una de estas esferas, a la que llamaremos  $\mathbb{S}_{r_0}$  (nótese que  $q$  no tiene porqué coincidir con  $p$ ). Alrededor de  $q$  se tiene  $\Omega \geq \mathbb{S}_{r_0}$ , luego el apartado 2 del Lema 3.19 asegura que  $\sigma_q \geq \tilde{\sigma}_q$ , siendo esta última la segunda forma fundamental de  $\mathbb{S}_{r_0}$  en  $q$ . Como  $\tilde{\sigma}_q$  es definida positiva,  $\sigma_q$  también lo será luego  $K(q) > 0$ , contradicción.  $\square$

Como en una superficie mínima de  $\mathbb{R}^3$  las curvaturas principales son opuestas, la curvatura de Gauss es siempre no positiva. Por tanto,

**Corolario 4.3** *Toda superficie mínima embebida en  $\mathbb{R}^3$  satisface la propiedad de la envolvente convexa.*

Otra consecuencia del Teorema 4.2 es el siguiente principio del máximo:

**Corolario 4.4** *Sea  $\Omega$  un dominio relativamente compacto de  $\mathbb{R}^2$  y  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ . Si  $\det(\nabla^2 u) \leq 0$  en  $\Omega$ , entonces*

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u \leq \max_{\partial\Omega} u. \quad (7)$$

*Demostración.* Llamemos  $M$  a la superficie obtenida como grafo de  $u$ . La curvatura de Gauss de  $M$  viene dada por

$$K = \frac{\det(\nabla^2 u)}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}},$$

luego nuestra hipótesis implica que  $K \leq 0$  en  $M$ . Por el Teorema 4.2,  $M$  satisfará la condición de la envolvente convexa. Como  $\Omega$  es relativamente compacto en  $\mathbb{R}^2$ ,  $M \subset \mathcal{E}(\partial M)$ . En particular,  $M$  está contenida en la menor banda horizontal cerrada que contiene a  $\partial M$  y (7) se cumple.  $\square$



## 5 El principio del máximo.

Toda superficie en  $\mathbb{R}^3$  se escribe localmente como grafo de una función  $u$ . La curvatura media de este grafo es (salvo un signo)

$$H(u) = \frac{1}{2(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \left( (1 + u_2^2)u_{11} - 2u_1u_2u_{12} + (1 + u_1^2)u_{22} \right), \quad (8)$$

luego la minimalidad del grafo equivale a que  $u$  cumpla la siguiente ecuación semilineal elíptica de segundo orden:

$$(1 + u_2^2)u_{11} - 2u_1u_2u_{12} + (1 + u_1^2)u_{22} = 0.$$

La naturaleza de esta ecuación diferencial nos permitirá disponer de un principio del máximo, una de las herramientas más útiles en el desarrollo que la teoría de superficies mínimas.

### 5.1 Generalidades sobre operadores lineales de tipo elíptico.

Sea  $\Omega$  un dominio regular del plano (i.e.  $\partial\Omega$  es una unión finita de curvas regulares en  $\mathbb{R}^2$ ): Consideremos un operador diferencial lineal del tipo  $L : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$  dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}u_{ij} + \sum_{i=1}^2 b_iu_i \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

donde  $a_{ij}, b_i \in C^\infty(\bar{\Omega})$  siendo la matriz  $A = (a_{ij})_{i,j}$  simétrica y definida positiva (esto último hace que  $L$  se diga *elíptico*), y hemos usado la notación  $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Una forma alternativa de escribir  $L$  es

$$Lu = \langle A, \nabla^2 u \rangle + \langle b, \nabla u \rangle, \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

donde  $b = (b_1, b_2)$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar usual en el espacio de matrices simétricas ( $\langle A, B \rangle = \text{Traza}(AB)$ ) o en  $\mathbb{R}^2$ , según corresponda.

Por ser simétrica, la matriz  $A$  es ortogonalmente diagonalizable (en cada punto de  $\Omega$ ). Sean  $\lambda_1, \lambda_n$  sus valores propios y  $\{e_1, e_2\}$  una base ortonormal de valores propios. Un sencillo cambio de base nos lleva a

$$\langle A, \nabla^2 u \rangle = \sum_{i=1}^2 \lambda_i (\nabla^2 u)(e_i, e_i).$$

**Lema 5.1** *En la situación anterior,*

1. Si  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  cumple  $Lu > 0$  en  $\Omega$ , entonces  $u$  no puede alcanzar un máximo local en ningún punto de  $\Omega$ .

2. PRINCIPIO DEL MÁXIMO DÉBIL: Si  $\Omega$  es acotado y  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  cumple  $Lu > 0$  en  $\Omega$ , entonces  $u \leq \max_{\partial\Omega} u$ .

3. Si  $\Omega$  es acotado y  $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$  cumplen  $Lu \geq 0$ ,  $Lv < 0$  en  $\Omega$ , entonces

$$u \leq v \text{ en } \partial\Omega \Rightarrow u \leq v \text{ en } \Omega.$$

*Demostración.* Supongamos primero que  $x_0$  es un máximo local de  $u$  en  $\Omega$ . Así,  $(\nabla u)_{x_0} = 0$  y  $(\nabla^2 u)_{x_0}$  es semidefinido negativo, luego

$$(Lu)(x_0) = \langle A(x_0), (\nabla^2 u)_{x_0} \rangle = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(x_0) (\nabla^2 u)_{x_0}(e_i, e_i).$$

Como  $\lambda_1, \lambda_2$  son positivos obtenemos  $(Lu)(x_0) \leq 0$ , contradicción. Esto prueba 1. 2 es consecuencia inmediata de 1, y 3 se deduce de aplicar 2 a  $u - v$ .  $\square$

**Lema 5.2** *Dados  $0 < r_1 < r_2$ , sea  $A(r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid r_1 < |x| < r_2\}$ . Consideremos sobre  $C^\infty(\overline{A(r_1, r_2)})$  un operador lineal elíptico  $L$  como antes. Entonces, existe  $v \in C^\infty(\overline{A(r_1, r_2)})$  tal que*

1.  $v = 0$  en  $|x| = r_2$ ,
2.  $v|_{|x|=r}$  es constante,  $\forall r \in [r_1, r_2]$  (i.e.  $v$  es una función radial),
3.  $\frac{dv}{dr} > 0$  en  $[r_1, r_2]$  (en particular,  $v < 0$  en  $[r_1, r_2]$ ),
4.  $Lv < 0$ .

*Demostración.* Consideremos la función  $v(x) = e^{-\alpha r_2^2} - e^{-\alpha|x|^2}$ , para un número positivo  $\alpha$  a determinar. Para esta función, 1 y 2 son evidentes. Además,  $\frac{dv}{dr} = 2\alpha r e^{-\alpha r^2} > 0$ , luego 3 también se cumple. En cuanto a 4, notemos que  $v = f \circ r$ , donde  $r(x) = |x|$  y  $f(r) = e^{-\alpha r_2^2} - e^{-\alpha r^2}$ , luego

$$\nabla v = f'(r) \nabla r, \quad (\nabla^2 v)(X, Y) = (f'' \circ r) \langle \nabla r, X \rangle \langle \nabla r, Y \rangle + (f' \circ r) (\nabla^2 r)(X, Y),$$

para cualesquiera  $X, Y \in \mathbb{R}^2$ . Como

$$f'(r) = 2\alpha r e^{-\alpha r^2}, \quad f''(r) = 2\alpha e^{-\alpha r^2} - 4\alpha^2 r^2 e^{-\alpha r^2}$$

y

$$\nabla r = \frac{x}{r}, \quad \nabla^2 r = \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix},$$

un cálculo directo nos da que

$$\nabla v = 2\alpha e^{-\alpha r^2} x, \quad \nabla^2 v = 2\alpha e^{-\alpha r^2} \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha x_1^2 & -2\alpha x_1 x_2 \\ -2\alpha x_1 x_2 & 1 - 2\alpha x_2^2 \end{pmatrix},$$

luego

$$Lv = \langle A, \nabla^2 v \rangle + \langle b, \nabla v \rangle = 2\alpha e^{-\alpha r^2} (\text{Traza}(A) - 2\alpha x^t A x + \langle b, x \rangle),$$

donde  $x^t$  es la traspuesta de  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Por otro lado, como  $A$  es definida positiva y  $\overline{A(r_1, r_2)}$  es compacto, existirá una constante  $\mu > 0$  tal que  $x^t A x \geq \mu |x|^2$  en  $A(r_1, r_2)$ . Así,

$$Lv \leq 2\alpha e^{-\alpha r^2} (\text{Traza}(A) - 2\alpha \mu |x|^2 + \langle b, x \rangle) \leq 2\alpha e^{-\alpha r^2} (\text{Traza}(A) - 2\alpha \mu r_1^2 + \langle b, x \rangle).$$

Como  $\text{Traza}(A)$ ,  $\langle b, x \rangle$  está acotadas en  $A(r_1, r_2)$ , podemos tomar  $\alpha > 0$  suficientemente grande como para que el miembro de la derecha de la última desigualdad sea estrictamente negativo en  $A(r_1, r_2)$ . Esto termina de probar el Lema.  $\square$

Dado un dominio regular  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\partial\Omega$  es unión de curvas regulares luego podemos definir el *campo conormal unitario exterior a  $\Omega$  a lo largo de  $\partial\Omega$*  como el campo diferenciable  $\eta : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$  que cumple  $\eta \perp \partial\Omega$  y  $x + t\eta(x) \in \Omega$ ,  $\forall t \in (-\varepsilon, 0)$ ,  $\forall x \in \partial\Omega$  (para cierto  $\varepsilon > 0$  dependiendo de  $x$ ).

El apartado 2 del Lema 5.1 implica que si  $\Omega$  es acotado,  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ,  $u < 0$  y  $Lu > 0$  en  $\Omega$ , entonces  $u \leq \max_{\partial\Omega} u \leq 0$ . Si además existe  $x_0 \in \partial\Omega$  con  $u(x_0) = 0$ , es claro que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \langle (\nabla u)_{x_0}, \eta(x_0) \rangle \geq 0. \quad (9)$$

Veamos que además, la igualdad no puede darse en (9). De hecho, podemos debilitar la hipótesis  $Lu > 0$  a  $Lu \geq 0$ :

**Lema 5.3** *Sea  $\Omega$  un dominio regular de  $\mathbb{R}^2$ ,  $L$  un operador lineal elíptico en  $\Omega$  y  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  tal que  $u < 0$  y  $Lu \geq 0$  en  $\Omega$ . Si existe  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que  $u(x_0) = 0$ , entonces  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$ .*

*Demostración.* Por ser  $\Omega$  un dominio regular, existe un disco  $D \subset \Omega$  de forma que  $\partial D$  y  $\partial\Omega$  son tangentes en  $x_0$ . Es claro que podemos reducirnos a probar el Lema sobre  $\Omega = D$ . Tampoco perdemos generalidad suponiendo que  $D$  está centrado en el origen. Sea  $r > 0$  el radio de  $D$ . Aplicando el Lema 5.2, existe una función radial  $v \in C^\infty(\overline{A(r/2, r)})$  tal que  $v = 0$  en  $|x| = r$ ,  $v < 0$  en  $[r/2, r)$ ,  $\frac{dv}{dr} > 0$  en  $[r/2, r]$  y  $Lv < 0$ . Por otro lado, como  $\{|x| = r/2\}$  es compacto y  $u < 0$  en  $D$ , tenemos  $u|_{|x|=r/2} \leq \max_{|x|=r/2} u < 0$ , luego existe  $\varepsilon > 0$  pequeño tal que  $\max_{|x|=r/2} u \leq \varepsilon v(r/2)$ , y por tanto  $u|_{|x|=r/2} \leq \varepsilon v(r/2)$ . Sobre la otra componente frontera de  $A(r/2, r)$  tenemos  $u \leq 0 = v(r)$  luego también  $u \leq \varepsilon v$  en  $\partial A(r/2, r)$ . Como  $Lu \geq 0$ ,  $L(\varepsilon v) < 0$  en  $A(r/2, r)$  podemos aplicar el apartado 3 del Lema 5.1 a  $u$  y  $\varepsilon v$ , concluyendo que  $u \leq \varepsilon v$  en  $A(r/2, r)$  (figura 13).

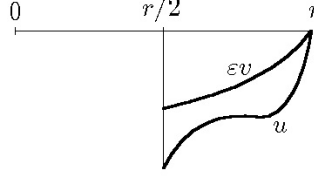


Figure 13:  $u$  está por debajo de  $\varepsilon v$  en  $A(r/2, r)$ .

Comparando las derivadas en la dirección de  $\eta(x_0)$  tendremos  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geq \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = \varepsilon \frac{dv}{dr}(r) > 0$ , lo que termina de probar el Lema.  $\square$

**Teorema 5.4** (PRINCIPIO DEL MÁXIMO FUERTE)

Sea  $\Omega$  un dominio regular de  $\mathbb{R}^2$  y  $L$  un operador lineal elíptico en  $\Omega$ . Si  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  cumple  $u \leq 0$  y  $Lu \geq 0$  en  $\Omega$ , entonces  $u < 0$  en  $\Omega$  o bien  $u = 0$  en  $\Omega$ .

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que  $u \not\equiv 0$  y que  $u$  se anula en algún punto de  $\Omega$  (nótese que aunque  $u$  alcanza un máximo local en cualquiera de sus ceros, no podemos aplicar el apartado 1 del Lema 5.1 porque allí se exigía  $Lu > 0$ ). Sea  $X = \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}$ . Así,  $X \neq \Omega$  y  $X \neq \emptyset$ . Como  $X$  es cerrado y  $\Omega$  es conexo,  $X$  no puede ser abierto luego existe  $x \in X - \text{Int}(X)$ . Como  $\Omega$  es abierto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $D(x, 2\varepsilon) \subseteq \Omega$ . Como  $x \notin \text{Int}(X)$ , ningún entorno de  $x$  puede estar contenido en  $X$ . En particular, podemos tomar un punto  $y \in D(x, \varepsilon) - X$ , luego  $d(y, \partial\Omega) > \varepsilon$ , y definiendo  $\delta := d(y, X)$  tenemos  $\delta \leq d(y, x) < \varepsilon$ . Además  $\delta > 0$  porque  $X$  es cerrado e  $y \notin X$ .

Sea  $\Omega' = D(y, \delta)$ , que está contenido en  $\Omega$  porque  $\delta < \varepsilon < d(y, \partial\Omega)$ . Como  $\Omega' \subseteq \Omega - X$ ,  $u$  ha de ser estrictamente negativa en  $\Omega'$ . Además, por definición de  $d(y, X)$  debe existir un punto  $x_0 \in \partial\Omega' \cap X$ , luego  $u(x_0) = 0$ . En particular,  $x_0 \in \Omega$  y  $u$  alcanza un máximo en  $x_0$ , luego  $(\nabla u)(x_0) = 0$ . Aplicando el Lema 5.3 a  $u$  en  $\Omega'$  deducimos que  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$ , donde  $\eta$  es el conormal unitario exterior a  $\Omega'$  a lo largo de  $\partial\Omega'$ , lo que contradice que el gradiente de  $u$  en  $x_0$  se anule.  $\square$

## 5.2 El operador curvatura media.

El Teorema 5.4 no puede aplicarse directamente a grafos mínimos, ya que el operador curvatura media  $H(u)$  dado en (8) no es lineal. Pero podemos escribirlo como

$$H(u) = \frac{1}{2(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 + u_2^2 & -u_1 u_2 \\ -u_1 u_2 & 1 + u_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = \langle A(\nabla u), \nabla^2 u \rangle,$$

donde  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2(\mathbb{R}) = \{ \text{matrices simétricas reales de orden 2} \}$  viene dada por

$$A(y_1, y_2) = \frac{1}{2(1 + |y|^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 + y_2^2 & -y_1 y_2 \\ -y_1 y_2 & 1 + y_1^2 \end{pmatrix}, \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Nótese que  $A(y_1, y_2)$  es definida positiva en cada  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ .

**Definición 5.5** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regular. Una aplicación  $Q : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$  se dice un *operador cuasilineal elíptico* si tiene la forma

$$Q(u) = \langle A(\nabla u), \nabla^2 u \rangle + \langle b(\nabla u), \nabla u \rangle, \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

donde  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  y  $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  son aplicaciones diferenciables y  $A(y)$  es definida positiva para todo  $y \in \mathbb{R}^2$ .

De lo anterior deducimos que *el operador curvatura media es un operador cuasilineal elíptico*.

El resultado clave que relaciona operadores lineales elípticos y operadores cuasilineales elípticos es el siguiente:

**Proposición 5.6** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regular,  $Q : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$  un operador cuasilineal elíptico y  $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ . Entonces, existe un operador lineal elíptico  $L$  (que depende de  $u_1, u_2$ ) tal que  $Q(u_1) - Q(u_2) = L(u_1 - u_2)$ .

*Demostración.* Sea  $u_t = tu_1 + (1 - t)u_2$ , con  $t \in [0, 1]$ . Así,  $\frac{du_t}{dt} = u_1 - u_2$  y por la regla de Barrow,

$$\begin{aligned} Q(u_1) - Q(u_2) &= \int_0^1 \left[ \frac{d}{dt} Q(u_t) \right] dt = \int_0^1 \left[ \frac{d}{dt} \langle A(\nabla u_t), \nabla^2 u_t \rangle + \frac{d}{dt} \langle b(\nabla u_t), \nabla u_t \rangle \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial A}{\partial y_i}(\nabla u_t), \nabla^2 u_t \right\rangle \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x_i} \right] dt + \int_0^1 \langle A(\nabla u_t), \nabla^2(u_1 - u_2) \rangle dt \\ &\quad + \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial b}{\partial y_i}(\nabla u_t), \nabla u_t \right\rangle \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x_i} \right] dt + \int_0^1 \langle b(\nabla u_t), \nabla(u_1 - u_2) \rangle dt. \end{aligned}$$

El segundo sumando puede escribirse como

$$\int_0^1 \langle A(\nabla u_t), \nabla^2(u_1 - u_2) \rangle dt = \langle \bar{A}, \nabla^2(u_1 - u_2) \rangle$$

donde  $\bar{A} = \int_0^1 A(\nabla u_t) dt$ , y los sumandos primero, tercero y cuarto pueden agruparse en  $\langle \bar{b}, \nabla(u_1 - u_2) \rangle$  donde

$$\bar{b} = \left( \int_0^1 \left[ \left\langle \frac{\partial A}{\partial y_i}(\nabla u_t), \nabla^2 u_t \right\rangle + \left\langle \frac{\partial b}{\partial y_i}(\nabla u_t), \nabla u_t \right\rangle \right] dt \right)_{i=1,2} + \int_0^1 b(\nabla u_t) dt.$$

Así,  $Q(u_1) - Q(u_2) = L(u_1 - u_2)$ , donde  $Lv = \langle \bar{A}, \nabla^2 v \rangle + \langle \bar{b}, \nabla v \rangle$ . Que la matriz  $\bar{A}$  es simétrica y definida positiva en cada punto de  $\Omega$  es consecuencia de que  $A$  es simétrica y definida positiva en todo punto de  $\mathbb{R}^2$ . Por tanto,  $L$  es un operador lineal elíptico.  $\square$

**Teorema 5.7** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regular,  $Q : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$  un operador cuasilíneo elíptico y  $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$  tales que  $Q(u_1) \geq Q(u_2)$  en  $\Omega$ .*

1. *Si  $u_1 - u_2$  alcanza su máximo en  $\Omega$ , entonces  $u_1 - u_2$  es constante.*
2. *Si  $u_1 - u_2$  alcanza su máximo en  $x_0 \in \partial\Omega$ , entonces  $u_1 - u_2$  es constante o bien  $\frac{\partial u_1}{\partial \eta}(x_0) > \frac{\partial u_2}{\partial \eta}(x_0)$ , donde  $\eta$  es el conormal unitario exterior a  $\Omega$  a lo largo de  $\partial\Omega$ .*
3. *Supongamos que  $\Omega$  es acotado. Si  $u_1 \leq u_2$  en  $\partial\Omega$ , entonces  $u_1 \leq u_2$  en  $\Omega$ .*
4. *Supongamos que  $\Omega$  es acotado, que  $Q(u_1) = Q(u_2)$  en  $\Omega$  y que  $u_1 = u_2$  en  $\partial\Omega$ . Entonces,  $u_1 = u_2$  en  $\Omega$ .*

*Demostración.* Aplicando la Proposición 5.6, existe un operador lineal elíptico  $L$  tal que  $Q(u_1) - Q(u_2) = L(u_1 - u_2)$ . Supongamos primero que existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u_1 - u_2$  alcanza su máximo en  $c = (u_1 - u_2)(x_0)$ . Así,  $u := u_1 - u_2 - c \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $u \leq 0$  y  $Lu = L(u_1 - u_2) - Lc = L(u_1 - u_2) \geq 0$  en  $\Omega$ . Por el principio del máximo fuerte (Teorema 5.4),  $u < 0$  o bien  $u = 0$  en  $\Omega$ . Como lo primero no puede darse en  $x_0$ , deducimos que  $u_1 - u_2$  es constante, y 1 está probado.

2 es consecuencia de un razonamiento similar al anterior, usando el Lema 5.3 en vez del Teorema 5.4. 3 se deduce directamente del apartado 1 anterior. Por último, 4 es consecuencia de aplicar 3 a  $u_1, u_2$  dos veces, para obtener las dos desigualdades  $u_1 \leq u_2$  y  $u_2 \leq u_1$  en  $\Omega$ .  $\square$

El último apartado del Teorema 5.7 implica lo siguiente:

**Corolario 5.8** *Sea  $\Omega$  un dominio regular y acotado de  $\mathbb{R}^2$ ,  $c \in \mathbb{R}$  y  $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ . Entonces, el problema*

$$\left. \begin{array}{l} H(u) = c \quad \text{en } \Omega \\ u = \varphi \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

*tiene, a lo sumo, una solución.*

Ya estamos en condiciones de enunciar el primer principio del máximo para el operador curvatura media, válido para superficies con un primer punto de contacto interior.

**Corolario 5.9** (PRINCIPIO DEL MÁXIMO INTERIOR)

*Sean  $M_1, M_2$  superficies en  $\mathbb{R}^3$  con curvaturas medias  $H_1, H_2$  respectivamente. Supongamos que  $H_1 \geq H_2$  y que existe un punto  $p \in M_1 \cap M_2$  tal que  $M_1 \leq M_2$  en  $p^4$ . Entonces, existe un entorno  $O$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $M_1 \cap O = M_2 \cap O$ .*

<sup>4</sup>Recordemos que esto exigía que los normales a  $M_1$  y  $M_2$  en  $p$  coincidieran. La desigualdad  $H_1 \geq H_2$  se exige respecto de tales aplicaciones de Gauss.

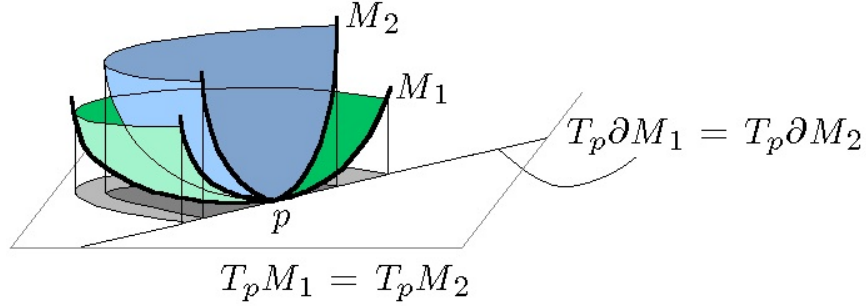


Figure 14:  $M_2$  está por encima de  $M_1$  alrededor de  $p$ .

*Demostración.* Localmente alrededor de  $p$ , podemos expresar ambas superficies como grafos de sendas funciones  $u_1, u_2$  definidas en un entorno  $\Omega$  de 0 en el plano tangente común  $T_p M_1 = T_p M_2$ . Como  $M_1 \leq M_2$  en  $p$ , tendremos  $u_1 \leq u_2$  en un entorno de 0 en  $\Omega$  (podemos suponer que este entorno es el propio  $\Omega$ ), con igualdad en 0. Así,  $u_1 - u_2$  alcanza un máximo interior en 0. Como  $H(u_1) \geq H(u_2)$  en  $\Omega$ , el apartado 1 del Teorema 5.7 termina de probar el corolario.  $\square$

Nuestro próximo objetivo es el principio del máximo en la frontera. Necesitamos para ello saber qué sentido tiene que una superficie esté por encima de otra alrededor de un punto frontera común.

**Definición 5.10** Sean  $M_1, M_2$  dos superficies con borde y  $p \in \partial M_1 \cap \partial M_2$ . Decimos que  $M_1$  y  $M_2$  son tangentes en  $p$  si  $T_p M_1 = T_p M_2$  y  $T_p \partial M_1 = T_p \partial M_2$ , ambas igualdades entendidas entre espacios vectoriales orientados<sup>5</sup>. Si ahora expresamos ambas superficies localmente alrededor de  $p$  como grafos  $u_i : \overline{\Omega}_i \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $\overline{\Omega}_i \subset T_p M_i$ ,  $i = 1, 2$ , diremos que  $M_1 \leq M_2$  en  $p$  ( $M_2$  está por encima de  $M_1$  en  $p$ ) si  $u_2 \geq u_1$  en  $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$ , ver figura 14.

**Corolario 5.11** (PRINCIPIO DEL MÁXIMO EN LA FRONTERA)

Sean  $M_1, M_2$  superficies con borde en  $\mathbb{R}^3$ , con curvaturas medias  $H_1, H_2$  respectivamente. Supongamos que  $H_1 \geq H_2$  y que existe un punto  $p \in \partial M_1 \cap \partial M_2$  tal que  $M_1 \leq M_2$  en  $p$ <sup>6</sup>. Entonces,  $M_1$  y  $M_2$  coinciden en un entorno de  $p$ .

*Demostración.* Como en la última demostración, expresemos localmente ambas superficies alrededor de  $p$  como grafos de funciones  $u_1, u_2$  definidas en un entorno  $\Omega$  de 0 en uno de los semiplanos cerrados determinados por  $T_p \partial M_1 = T_p \partial M_2$  dentro de  $T_p M_1 = T_p M_2$ . Como  $M_1 \leq M_2$  en  $p$ ,

<sup>5</sup>En el sentido de que las aplicaciones de Gauss de  $M_1$  y  $M_2$  coincidan en  $p$ , y los conormales unitarios exteriores a  $M_1$  y a  $M_2$  a lo largo de sus fronteras coincidan en  $p$ .

<sup>6</sup>Ahora estamos exigiendo que las curvaturas medias  $H_1, H_2$  de  $M_1, M_2$  respecto a las aplicaciones de Gauss  $N_1, N_2$  tales que  $N_1(p) = N_2(p)$ , cumplan  $H_1 \geq H_2$  en un entorno de  $p$ .

tenemos  $u_1 \leq u_2$  en  $\Omega$  con igualdad en  $0$ , luego  $u_1 - u_2$  tiene un máximo en  $0 \in \partial\Omega$ . Como  $H_1(u) \geq H_2(u)$ , el apartado 2 del Teorema 5.7 implica que  $u_1 - u_2$  es constante en  $\Omega$  o bien  $\frac{\partial u_1}{\partial \eta}(0) > \frac{\partial u_2}{\partial \eta}(0)$ , donde  $\eta$  es el conormal unitario exterior a  $\Omega$  a lo largo de  $\partial\Omega$ . La última opción contradice que  $T_p M_1 = T_p M_2$ , y se obtiene lo deseado.  $\square$



## 6 El Teorema fuerte del semiespacio.

Los ejemplos que aparecen representados en la introducción se extienden indefinidamente en  $\mathbb{R}^3$  dando lugar a superficies completas y sin frontera. En todas ellas, se da la propiedad de que no existe una función coordenada acotada inferior ni superiormente. Dicho de otra forma, ninguna de estas superficies está incluida en un semiespacio de  $\mathbb{R}^3$ . Ya Calabi se dió cuenta de esta propiedad en los ejemplos conocidos en su época, y formuló el llamado

PROBLEMA DE CALABI: *¿Existen superficies mínimas completas contenidas en un semiespacio de  $\mathbb{R}^3$ , además de un plano paralelo a la frontera de dicho semiespacio?*

En 1984, F. Xavier [35] probó la siguiente respuesta parcial:

**Teorema 6.1** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie mínima completa y no llana, con curvatura de Gauss acotada. Entonces,  $\mathcal{E}(M) = \mathbb{R}^3$ .*

En particular, resolvió afirmativamente el problema de Calabi para superficies mínimas completas con curvatura acotada. La mejor respuesta al problema hasta ahora fue dada por Hoffman y Meeks en 1990, en una bella aplicación del principio del máximo:

**Teorema 6.2 (Teorema fuerte del semiespacio, Hoffman y Meeks [12])** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie mínima embebida, conexa, propia<sup>7</sup> y no llana. Entonces,  $M$  no puede estar contenida en un semiespacio.*

*Demostración.* Supongamos que el Teorema no es cierto. Así, existe una superficie mínima  $M \subset \mathbb{R}^3$  embebida, conexa, propia y no llana, contenida en un semiespacio  $A$  de  $\mathbb{R}^3$ . Salvo giro, podemos suponer  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq c\}$  para cierto  $c \in \mathbb{R}$ . Notemos primero que  $M \subset \text{Int}(A)$ , ya que en caso contrario encontraríamos un punto  $p \in M$  donde  $M$  y  $\partial A$  son tangentes, siendo  $M \leq \partial A$  en  $p$ . Aplicando el principio del máximo interior,  $M$  y  $\partial A$  coincidirían en un entorno alrededor de  $p$ . A partir de aquí no es difícil concluir que  $M_1 = \partial A$ , contradicción con que  $M$  se supone no llana (ver Ejercicio 6.1 al final de esta demostración).

Por otro lado, es claro que  $M$  no puede estar estrictamente por debajo de todos los planos horizontales de  $\mathbb{R}^3$ , luego existe  $c_0 = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid M \subset \{z < c\}\}$ . Por definición de ínfimo,  $M$  no puede tener puntos estrictamente por encima de  $\{z = c_0\}$ , luego  $M \subset \{z \leq c_0\}$  y por el párrafo anterior,  $M \subset \{z < c_0\}$ . Salvo una traslación, podemos suponer que  $c_0 = 0$ .

---

<sup>7</sup>Esta hipótesis quiere decir que la intersección de  $M$  con cualquier bola cerrada de  $\mathbb{R}^3$  es un compacto de la superficie. Para superficies arbitrarias, la condición *ser propia* implica completitud, pero el recíproco no es cierto. También debemos mencionar que una superficie mínima completa, embebida y con curvatura de Gauss acotada es siempre propia, luego el Teorema 6.2 generaliza el resultado de Xavier que enunciábamos arriba. Otra observación interesante es que si sustituimos la hipótesis *propia* por *completa* y admitimos superficies con autointersecciones, el Teorema deja de ser cierto, como prueban unos ejemplos debidos a Jorge y Xavier [14] de superficies mínimas inmersas contenidas en la banda delimitada por dos planos paralelos.

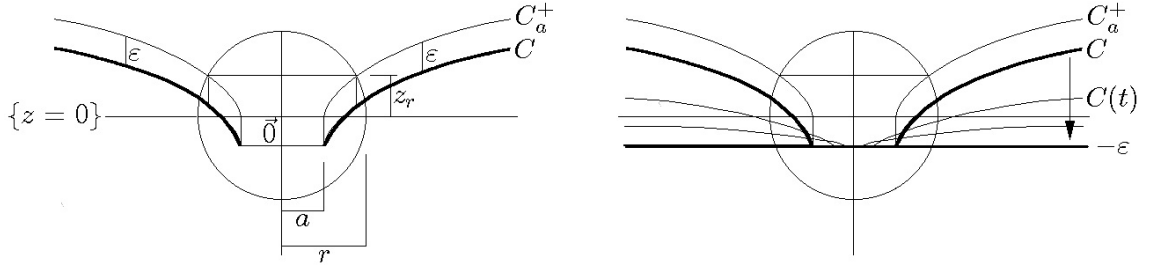


Figure 15: Izqda: Trasladamos  $C_a^+$  hasta llegar a  $C$ . Dcha: Tomamos límite en  $C(t)$  cuando  $t \rightarrow 0$ .

Consideremos ahora el punto  $\vec{0} = (0, 0, 0)$ . Como  $M \cap \{z = 0\} = \emptyset$  y  $M$  es propia,  $\vec{0}$  no puede ser punto de acumulación de  $M$ , luego existe una bola  $B(\vec{0}, r)$  centrada en  $\vec{0}$  y de radio  $r > 0$  que es disjunta de  $M$ .

Dado  $a > 0$ , consideremos la catenoides vertical  $C_a$  obtenida rotando la catenaria  $y = \cosh(z/a)$  alrededor del eje  $z$ , esto es,

$$C_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2(z/a)\}.$$

Nótese que  $C_a$  está foliada por circunferencias horizontales centradas en puntos del eje  $z$ , siendo la de menor radio  $C_a \cap \{z = 0\}$  (llamada el *cuello* de la catenoides), cuyo radio es exactamente  $a$ . Sea  $C_a^+ = C_a \cap \{z \geq 0\}$ . Tomando  $a \in (0, r)$  tendremos  $C_a^+ \cap \{z = 0\} \subseteq B(\vec{0}, r) \cap \{z = 0\}$ .

$C_a^+ \cap B(\vec{0}, r)$  es un compacto de  $C_a^+$ , unión de circunferencias horizontales a alturas  $z \in [0, z_r]$  (aquí  $z_r$  es la solución positiva de  $z_r^2 + a^2 \cosh^2(z_r/a) = r^2$ ), cuyos radios crecen desde  $a$  a altura cero hasta  $a \cosh(z_r/a)$ . Por tanto, existe  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño de forma que la traslación vertical de altura  $\varepsilon$  hacia abajo de  $C_a^+$  está contenida en  $B(\vec{0}, r) \cup \{z \geq 0\}$ . Llamemos  $C = C_a^+ - \varepsilon(0, 0, 1)$  a dicha traslación vertical, ver figura 15 (izquierda).

Para cada  $t \in (0, 1]$ , sea  $C(t)$  la homotecia de  $C$  centradas en  $(0, 0, -\varepsilon)$  de razón  $t$ . Cuando  $t \rightarrow 0$ ,  $C(t)$  converge sobre compactos al plano horizontal  $\{z = -\varepsilon\}$  (salvo en el punto  $(0, 0, -\varepsilon)$ , ver figura 15 derecha). Como  $M$  tiene puntos por encima de  $\{z = -\varepsilon\}$ ,  $C = C(1)$  es disjunta de  $M$  y  $C(t)$  depende continuamente de  $t$ , existirá un primer punto de contacto  $p_0$  entre  $M$  y una de las semicatenoides  $C(t_0)$ ,  $t_0 \in (0, 1)$ . Además,  $M \leq C(t_0)$  en  $p_0 \in M \cap C(t_0)$ . Como  $\partial C(t_0) \subset B(\vec{0}, r)$ ,  $p_0$  no puede estar en  $\partial C(t_0)$ . Por tanto,  $p_0$  es un punto de contacto interior a  $M$  y a  $C(t_0)$ , lo que contradice el principio del máximo interior. Esto prueba el Teorema.  $\square$

**Ejercicio 6.1** Sean  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$  dos superficies mínimas cerradas, conexas (posiblemente con frontera) tales que  $M_1 \cap M_2$  contiene un conjunto con interior no vacío en la topología inducida. Demostrar que  $M_1 \cup M_2$  es una superficie mínima.

**Ejercicio 6.2** Sean  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$  dos superficies mínimas propiamente embebidas, sin frontera y disjuntas. Si existen  $p_1 \in M_1, p_2 \in M_2$  tales que  $d(M_1, M_2) = d(p_1, p_2)$ , entonces  $M_1, M_2$  son planos paralelos.

## 7 El Problema de Plateau.

En esta Sección nos interesaremos por los siguientes enunciados:

PROBLEMA DE PLATEAU (I): *Dada una curva de Jordan  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ , ¿existe alguna superficie que minimize el área de entre todas las superficies con topología prescrita cuya frontera es  $\Gamma$ ?*

PROBLEMAS DE PLATEAU (II): *Dada una curva de Jordan  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ , ¿existe alguna superficie mínima con topología prescrita cuya frontera es  $\Gamma$ ?*

El problema de Plateau en su sentido clásico es el problema I anterior, aunque aquí consideraremos ambas versiones. Desde luego, una solución al problema I lo es también al problema II (el recíproco en general no se cumple). Como se dijo en la introducción, la primera respuesta general al problema I fue dada por Douglas y Radó entre 1929 y 1933.

**Teorema 7.1 (Douglas, Radó)** *Toda curva de Jordan rectificable<sup>8</sup> es la frontera de un disco que minimiza el área de entre todos los discos con su misma frontera.*

Tenemos pues, existencia asegurada de soluciones de los problemas de Plateau I y II (con la topología más sencilla posible). Es natural preguntarse ahora

*¿Cuántas superficies mínimas/(mínimos para el área) tienen por borde a una curva de Jordan dada en  $\mathbb{R}^3$ ? ¿Y si sólo nos preguntamos por discos?*

La respuesta general a los dos problemas de unicidad anteriores es desconocida en la actualidad. La figura 16 muestra que existen curvas de Jordan diferenciables con más de una solución a los problemas de Plateau I (en su versión de mínimos locales) y II.

En esta Sección estudiaremos algunos resultados parciales que implican existencia y unicidad de la solución del problema de Plateau, siendo en todos ellos la solución un disco. Empezaremos por un resultado modesto:

**Proposición 7.2** *Sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan plana y regular. Entonces, el dominio plano acotado por  $\Gamma$  es la única solución al problema de Plateau con borde  $\Gamma$ .*

*Demostración.* Obviamente, se trata sólo de probar la unicidad de solución. Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie mínima con  $\partial M = \Gamma$ . Por el Teorema de Osserman (Teorema 4.2),  $M$  satisface la propiedad de la envolvente convexa, luego  $M$  estará contenida en el dominio plano determinado por  $\Gamma$ , y por tanto coincide con éste.  $\square$

Para una curva plana no compacta, el resultado anterior deja de ser cierto: para ver esto, consideremos una catenoide vertical  $C$  y un plano vertical  $\Pi$  como en la figura 17.  $\Pi$  corta a  $C$  en dos componentes conexas  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , ambas curvas planas regulares y no compactas.  $C - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$

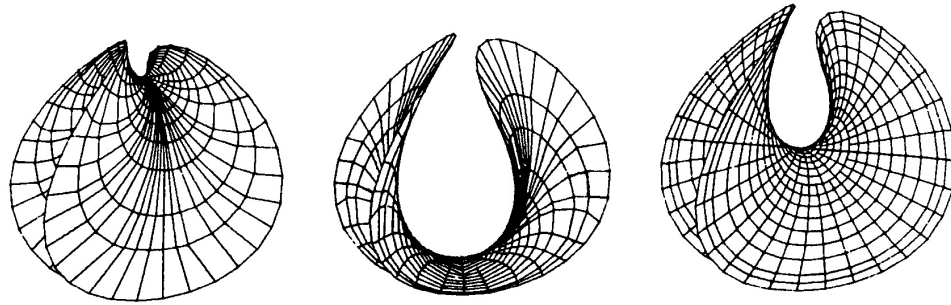


Figure 16: Tres superficies mínimas con la misma frontera. Las superficies de la izquierda y centro minimizan localmente el área.

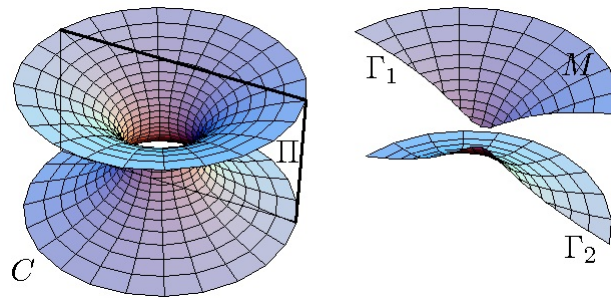


Figure 17: Un grafo mínimo no llano con frontera una curva plana no compacta.

consta de tres componentes conexas. Sea  $M$  la componente de  $C - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  cuyo borde es  $\Gamma_1$ . Esta superficie es el contraejemplo buscado.

La curva plana  $\Gamma_1$  del contraejemplo anterior está contenida en un semiplano, pero no en ningún sector plano de ángulo estrictamente menor que  $\pi$ . De hecho, esta limitación es necesaria para grafos mínimos: si  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  es una solución de  $H(u) = 0$  con  $u|_{\partial\Omega} = 0$  en un dominio simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  contenido en un sector plano de ángulo estrictamente menor que  $\pi$ , entonces  $u = 0$  en  $\Omega$  (Collin [3]). Como aplicación del principio del máximo, demostraremos este resultado en el caso que el sector es de ángulo  $\pi/2$ :

**Teorema 7.3 (Collin [3])** *Sea  $\Omega \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$  un dominio regular, y  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  un grafo mínimo con  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Entonces,  $u = 0$  en  $\Omega$ .*

*Demostración.* Consideremos la superficie de Scherk doblemente periódica  $S_2$  dada en el Ejemplo 3.6,  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \cos xe^z - \cos y = 0\}$ .  $S_2$  contiene una familia infinita de rectas verticales,

$$R_{n,m} = \{n\pi + \frac{\pi}{2}\} \times \{m\pi + \frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

y familias infinitas de rectas horizontales que se cortan en ángulos rectos,

$$V_n^+ = \{(y + 2n\pi, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad V_m^- = \{(-y + 2m\pi, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Consideremos un dominio fundamental  $D$  de  $S_2$ , que sea un grafo sobre el cuadrado  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Sea  $S$  un cuarto de este dominio fundamental, acotado por las rectas  $R_{0,0}, R_{-1,0}, V_0^+$  y  $V_0^-$  (figura 18, izquierda). Rotemos  $S$  alrededor del eje  $z$  un ángulo de  $\pi/4$  de forma que los segmentos horizontales en la frontera de  $S$  coincidan con parte de los ejes coordenados. Traslademos además  $\Omega$  horizontalmente en la dirección de la diagonal, de forma que  $\Omega$  no toque el triángulo  $T$  sobre el que  $S$  es grafo.

Como  $T \cap \Omega = \emptyset$ , necesariamente  $S$  es disjunta del grafo  $G$  de  $u$ . Dado  $t \geq 1$ , sea  $tS$  la imagen expandida de  $S$  por la homotecia de razón  $t$  centrada en el origen (que es el vértice de  $S$ ). Para cada  $t \geq 1$ ,  $tS$  es un grafo mínimo sobre el triángulo  $tT$  obtenido al expandir análogamente  $T$ , y  $tS$  tiene por frontera a los dos lados de  $tT$  que confluyen en el origen. Nótese que estos dos lados nunca tocan a  $\partial\Omega$ , ya que estamos suponiendo que  $\Omega$  está contenido en el cuadrante abierto  $\{x > 0, y > 0\}$ . Por otro lado,  $tS$  converge cuando  $t \rightarrow \infty$  al cuadrante cerrado  $\{x \geq 0, y \geq 0\}$  (porque el espacio tangente a  $S$  en el origen es horizontal), luego si existe algún punto  $x \in \Omega$  tal que  $u(x) > 0$  podremos encontrar un primer punto de contacto  $p_0$  entre  $G$  y una superficie  $t_0S$  para algún  $t_0 > 1$ . Este punto de contacto es necesariamente interior a ambas superficies, ya que  $\partial(t_0S) \subset \{xy = 0\}$  y  $\partial G \subset \{z = 0\}$ , luego el principio del máximo interior implica que  $t_0S \subset G$  o bien  $G \subset t_0S$ , y ambas cosas son imposibles. Si existe algún punto  $x \in \Omega$  tal que  $u(x) < 0$  razonaríamos de igual forma con cuadrantes de superficies de Scherk por debajo del plano  $z = 0$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

---

<sup>8</sup>Esto quiere decir que  $\Gamma$  admite una parametrización lipschitziana.

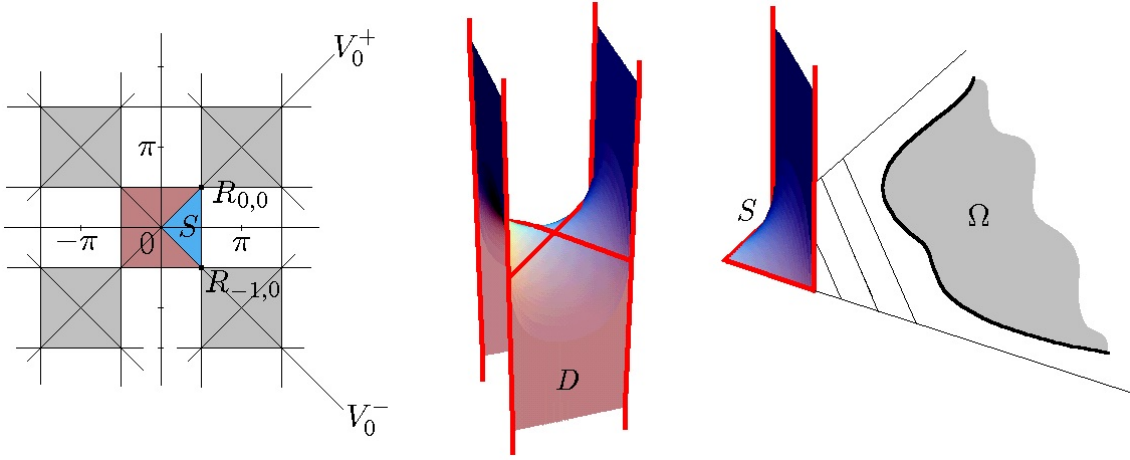


Figure 18: Izqda:  $D$  es grafo sobre el cuadrado coloreado centrado en el origen. Centro: Vista de  $D$  en  $\mathbb{R}^3$ . Dcha: El cuadrante  $S$  es grafo sobre un triángulo  $T$  que no corta a  $\Omega$ .

**Teorema 7.4 (Radó [24])** *Sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  una curva de Jordan regular que admite una proyección inyectiva sobre una curva plana convexa y regular  $\Gamma'$ . Entonces, existe una única solución  $M$  de los problemas de Plateau I,II para  $\Gamma$  (en particular, la solución es común a ambos problemas). Además,  $M$  es un grafo diferenciable sobre el dominio plano y convexo acotado por  $\Gamma'$ .*

*Demostración.* (Antonio Ros, Gaceta de la RSME, 2000).

Supongamos que existe una superficie mínima  $M \subset \mathbb{R}^3$  con  $\partial M = \Gamma$  (nótese que sólo suponemos que  $M$  sea solución del problema de Plateau II, y probaremos que es solución del problema I; la existencia de  $M$  es consecuencia del Teorema 7.1, que incluso asegura que podemos tomar  $M$  solución del Problema de Plateau I). Tomemos entonces. Salvo un giro, podemos suponer que  $\Gamma' \subset \{z = 0\}$ . Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  el dominio encerrado por  $\gamma'$ . Como  $\Omega$  es convexo,  $\Omega \times \mathbb{R}$  también lo es. Por la propiedad de la envolvente convexa (Teorema 4.2),  $M \subset \mathcal{E}(\Gamma) \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ .

Veamos que  $M - \Gamma \subset \Omega \times \mathbb{R}$ : En caso contrario, existirá un punto  $p \in (M - \Gamma) \cap (\Gamma' \times \mathbb{R})$ : Nótese que  $\Gamma \times \mathbb{R}$  es una superficie, pues  $\Gamma'$  es regular. Además, como  $\Gamma \times \mathbb{R} = \partial(\Omega \times \mathbb{R})$  y  $M \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ , debe darse  $T_p M = T_p(\Gamma' \times \mathbb{R})$ . Por tanto,  $p$  será un punto de contacto interior entre las superficies mínimas  $M$  y  $T_p M$  (véase la figura 19). Por el principio del máximo interior,  $M \subset T_p M$ , imposible.

Veamos que  $M - \Gamma$  es un grafo sobre  $\Omega$ : por reducción al absurdo, supongamos que existen puntos  $p, q \in M - \Gamma$  con la misma proyección vertical sobre  $\Omega$ , siendo  $x_3(p) < x_3(q)$ . Traslademos  $M$  verticalmente hacia arriba una hasta que  $M(t_0) = (M + t_0(0, 0, 1)) \cap M = \emptyset$ , para algún  $t_0 > 0$  (este  $t_0$  existe porque  $M$  es compacta). Como  $p + t_0(0, 0, 1) \in M(t_0)$  está estrictamente por encima de  $q \in M$ , el primer punto de contacto entre una trasladada  $M(t)$  y  $M$  ocurrirá para

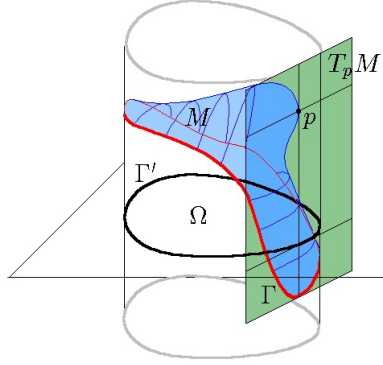


Figure 19:  $M - \Gamma$  ha de estar contenida en el cilindro abierto  $\Omega \times \mathbb{R}$ .

algún  $t_1 \in ]0, t_0[$ . Este primer punto de contacto no puede ocurrir en la frontera de ninguna de las dos superficies, ya que  $M - \Gamma \subset \Omega \times \mathbb{R}$ , y tanto  $\partial M = \Gamma$  como  $\partial M(t_1) = \Gamma + t_1(0, 0, 1)$  son grafos sobre  $\Gamma'$ . Así, hemos encontrado un primer punto de contacto interior, en contradicción con el principio del máximo interior. Por tanto, no hay dos puntos en  $M$  con la misma proyección vertical sobre  $\Omega$ . Para que  $M$  sea el grafo de una función diferenciable sobre  $\Omega$ , necesitamos que el espacio tangente a  $M$  en puntos interiores nunca sea vertical. Por reducción al absurdo, supongamos que existe  $p \in M - \Gamma$  tal que  $T_p M$  es vertical. Sea  $\Pi$  el plano horizontal que pasa por  $p$ . Tomando un entorno abierto  $U$  de  $p$  en  $M$  suficientemente pequeño,  $\Pi$  divide a  $U$  en dos componentes conexas  $U_1, U_2$ , ambas superficies con frontera común una curva en  $\Pi$  que pasa por  $p$ . Si llamamos  $U_1^*$  a la reflexión de  $U_1$  respecto de  $\Pi$ , entonces  $U_1^*$  y  $U_2$  están al mismo lado de  $\Pi$  y no pueden cortarse más que a lo largo de su frontera común en  $\Pi$  (porque en caso contrario habrían puntos en  $U_1 - \Pi$  y en  $U_2 - \Pi$  con la misma proyección vertical, imposible). Por tanto,  $U_1^*$  se queda a un lado de  $U_2$  alrededor de  $p$ . Como  $T_p U_1 = T_p U_2$  y  $T_p(\partial U_1) = T_p(\partial U_2)$ , encontramos una contradicción con el principio del máximo en la frontera. Esto prueba que  $M$  es el grafo de una función diferenciable  $u$  sobre  $\Omega$ .

Como también  $\Gamma = \partial M$  es grafo de una función diferenciable  $\varphi$  sobre  $\Gamma' = \partial\Omega$ , podremos aplicar el Corolario 5.8 y concluir que  $M$  es única.

Por último, veamos que  $M$  es solución del problema de Plateau I. Sean

$$\mathcal{A} = \{\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3 \text{ superficie} \mid \partial\widetilde{M} = \Gamma\}, \quad \mathcal{A}_0 = \{\widetilde{M} \in \mathcal{A} \mid K_{\widetilde{M}} \leq 0\},$$

donde  $K_{\widetilde{M}}$  denota la curvatura de Gauss de  $\widetilde{M}$ . Como  $M$  es mínima, se tiene  $M \in \mathcal{A}_0$ . Queremos probar que  $A(M) = \inf_{\mathcal{A}} A(\widetilde{M})$ , donde  $A(\widetilde{M}) = \text{área}(\widetilde{M})$ . Primero veamos que

$$\inf_{\mathcal{A}} A(\widetilde{M}) = \inf_{\mathcal{A}_0} A(\widetilde{M}). \quad (10)$$



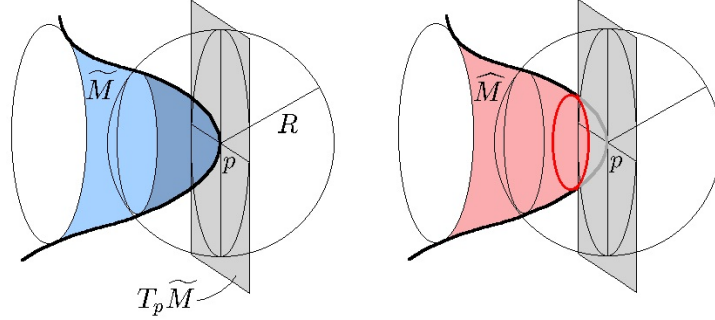


Figure 20: Si  $K_{\widetilde{M}}(p) > 0$ , podemos modificar  $\widetilde{M} \cap B(p, R)$  para decrecer su área manteniendo su frontera.

Para probar (10) es suficiente demostrar que si  $\widetilde{M} \in \mathcal{A}$  tiene un punto  $p$  con  $K_{\widetilde{M}}(p) > 0$ , entonces podemos encontrar otra superficie  $\widehat{M} \in \mathcal{A}$  con  $A(\widehat{M}) < A(\widetilde{M})$ . Como  $K_{\widetilde{M}}(p) > 0$ , existe una bola  $B(p, R) \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $B(p, R) \cap [\widetilde{M} - \{p\}]$  está estrictamente a un lado de  $T_p \widetilde{M}$  y  $B(p, R) \cap \Gamma = \emptyset$ . A continuación modificaremos  $\widetilde{M}$  en  $B(p, R)$  cortándola con un plano  $\Pi$  paralelo a  $T_p \widetilde{M}$  suficientemente próximo a  $p$ , y sustituyendo la parte de  $\widetilde{M}$  en la banda entre  $\Pi$  y  $T_p \widetilde{M}$  por el dominio plano que determina  $\widetilde{M} \cap \Pi$  en  $\Pi$ , y luego suavizaremos el borde creado a lo largo de  $\widetilde{M} \cap \Pi$ ; de esta forma conseguiremos una nueva superficie  $\widehat{M}$  con  $\partial[\widehat{M} \cap B(p, R)] = \partial[\widetilde{M} \cap B(p, R)]$ ,  $\widehat{M} - B(p, R) = \widetilde{M} - B(p, R)$  y  $A(\widehat{M}) < A(\widetilde{M})$  (ver figura 20). Por tanto, (10) se cumple.

Finalmente, veamos que dada  $\widetilde{M} \in \mathcal{A}_0$ , se tiene  $A(M) \leq A(\widetilde{M})$ . Lo que sigue es una aplicación de la *teoría de calibraciones*, para saber si una superficie dada es un mínimo global para el área con su misma frontera. Primeramente, notemos que la propiedad de la envolvente convexa es válida para  $\widetilde{M}$ , y por tanto  $\widetilde{M} \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ . A continuación consideramos la 2-forma diferenciable

$$\alpha_x(u, v) = \det(u, v, N_{p(x)}), \forall u, v \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

donde  $p(x)$  es el único punto de  $M$  cuya proyección horizontal coincide con la proyección de  $x$ . El hecho de que  $M$  sea una superficie mínima hace que  $\alpha$  sea una 2-forma cerrada ( $d\alpha = 0$  siendo  $d$  la diferencial exterior, ejercicio 7.1). Además,  $\alpha$  cumple

1.  $\alpha_x(u, v) \leq 1$  para todo  $x \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$  y cualesquiera  $u, v \in \mathbb{R}^3$  ortogonales y unitarios.
2.  $\alpha_p(u, v) = 1$  siempre que  $p \in M$  y  $\{u, v\}$  es una base ortonormal positiva de  $T_p M$ .

( $\alpha$  es lo que se conoce como una *calibración*, y  $M$  es una *superficie calibrada para  $\alpha$* ). Como  $\widetilde{M}$  tiene la misma frontera que  $M$ ,  $M \cup \widetilde{M}$  será el borde de una región  $R$  relativamente compacta

de  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  (posiblemente no conexa). Como  $\partial R = M \cup \widetilde{M}$  es diferenciable a trozos, el teorema de Stokes implica que

$$0 = \int_R d\alpha = \int_{\partial R} \alpha = \int_M \alpha - \int_{\widetilde{M}} \alpha.$$

Por la condición 2 anterior,  $\alpha|_M$  coincide con el elemento de área de  $M$  luego  $\int_M \alpha = A(M)$ . Análogamente, la condición 1 implica que  $\int_{\widetilde{M}} \alpha \leq A(\widetilde{M})$ , de donde  $A(M) \leq A(\widetilde{M})$ .  $\square$

**Ejercicio 7.1** Probar que la 2-forma  $\alpha$  que aparece en la demostración del Teorema 7.4 es cerrada.

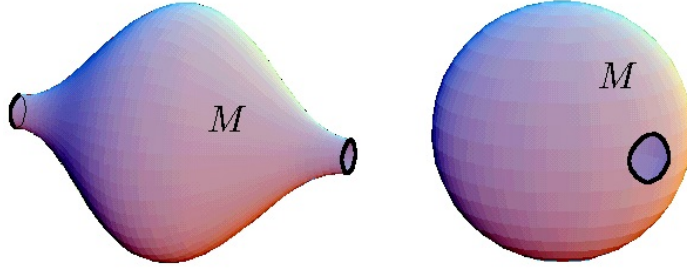


Figure 21: Superficies donde  $4\pi A(M) \leq L(\partial M)^2$  no es cierto ( $\partial M$  puede ser no conexa).

## 8 La desigualdad isoperimétrica para superficies mínimas.

La desigualdad isoperimétrica clásica en el plano asegura que de todas las curvas de Jordan planas con longitud fija, la que encierra mayor área es la circunferencia. En otras palabras,

*Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regular relativamente compacto con área  $A$ . Entonces,  $4\pi A(\Omega) \leq L(\partial\Omega)^2$  y la igualdad es cierta si y sólo si  $\Omega$  es un disco redondo.*

(Aquí  $A(\Omega)$ ,  $L(\partial\Omega)$  denotan área de  $\Omega$  y longitud de  $\partial\Omega$ , respectivamente). Esta desigualdad no es válida si sustituímos el plano por una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  arbitraria: existen superficies cuya frontera tiene longitud muy pequeña con respecto al área de la superficie, como ocurre con las siguientes figuras.

Sin embargo, la minimalidad de la superficie obliga a que la desigualdad se cumpla, al menos cuando la frontera es conexa:

**Teorema 8.1** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie mínima compacta, siendo  $\partial M$  conexa y regular. Entonces,  $4\pi A(M) \leq L(\partial M)^2$  y la igualdad se da si y sólo si  $M$  es un disco en un plano.*

Antes de probar el Teorema 8.1, veamos que éste implica la desigualdad isoperimétrica del plano: Sea  $\Omega$  un dominio regular relativamente compacto en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\partial\Omega$  es conexa, no tenemos nada por probar. Supongamos entonces que  $\Omega$  tiene varias componentes conexas (cada una de ellas homeomorfa a una circunferencia). Sea  $C$  la componente exterior de  $\partial\Omega$ , es decir, aquella que bordea un dominio acotado  $\Omega'$  que contiene a  $\Omega$ . Así,

$$4\pi A(\Omega) \leq 4\pi A(\Omega') \stackrel{(*)}{\leq} L(\partial\Omega')^2 \leq L(\partial\Omega)^2$$

donde hemos usado el Teorema 8.1 en  $(*)$ . Y si la igualdad se diera en los extremos de la cadena anterior, entonces también se daría en cada una de las desigualdades que la componen. En tal caso, de  $(*)$  se deducirá que  $\Omega'$  es un disco plano, y de las otras dos igualdades que  $\Omega' = \Omega$ .

Para demostrar el Teorema 8.1 necesitaremos dos lemas. El primero es una desigualdad clásica del Cálculo de Variaciones.

**Lema 8.2 (Desigualdades de Wirtinger)**

1. Sea  $f \in C^\infty([0, \pi])$  tal que  $f(0) = f(\pi) = 0$ . Entonces,

$$\int_0^\pi f^2 dt \leq \int_0^\pi (f')^2 dt,$$

y la igualdad es cierta si y sólo si  $f(t) = a \sin t$  para algún  $a \in \mathbb{R}$ .

2. Sea  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  una función  $2\pi$ -periódica tal que  $\int_0^{2\pi} f dt = 0$ . Entonces,

$$\int_0^{2\pi} f^2 dt \leq \int_0^{2\pi} (f')^2 dt,$$

con igualdad si y sólo si  $f(t) = a \sin t + b \cos t$  para  $a, b \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Sea  $f$  en las condiciones de 1. La función  $\varphi(t) = \frac{f(t)}{\sin t}$  tiene sentido y es de clase  $C^\infty$  en  $]0, \pi[$ . Desarrollando en serie de Taylor en  $t = 0$  (por la derecha) numerador y denominador,

$$\frac{f(t)}{\sin t} = \frac{tf'(0) + t^2 f_1(t)}{t + t^3 h(t)} = \frac{f'(0) + t f_1(t)}{1 + t^2 h(t)}, \quad (11)$$

donde  $f_1, h$  son ciertas funciones derivables en cero por la derecha. En particular, existe  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t)$  y vale  $f'(0)$ . Derivando el miembro de la derecha de (11), se obtiene

$$\frac{f_1(t) + t f_1'(t)}{1 + t^2 h(t)} - \frac{(f'(0) + t f_1(t))(2th(t) + t^2 h'(t))}{(1 + t^2 h(t))^2},$$

que tiene límite  $f_1(0)$  cuando  $t \rightarrow 0^+$ . En particular,  $\varphi$  es de clase  $C^1$  en  $[0, \pi[$ . El comportamiento de  $\varphi$  en  $\pi$  por la izquierda se estudia análogamente, y concluimos que  $\varphi \in C^1([0, \pi])$  (en realidad, sólo se ha usado que  $f \in C^2([0, \pi])$ ). Veamos ya la desigualdad de Wirtinger:

$$\int_0^\pi ((f')^2 - f^2) dt = \int_0^\pi ((\varphi')^2 \sin^2 t + \varphi^2 \cos^2 t + \varphi \varphi' \sin 2t - \varphi^2 \sin^2 t) dt.$$

Integrando por partes,

$$\int_0^\pi \varphi \varphi' \sin 2t dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\varphi^2)' \sin 2t dt = - \int_0^\pi \varphi^2 \cos 2t dt$$

luego

$$\int_0^\pi ((f')^2 - f^2) dt = \int_0^\pi (\varphi')^2 \sin^2 t dt \geq 0.$$

Además, de lo anterior se deduce que  $\int_0^\pi f^2 dt = \int_0^\pi (f')^2 dt$  equivale a que  $\varphi' = 0$  en  $[0, \pi]$ , esto es, a que  $\varphi$  sea constante. Ahora 1 está demostrado.

En cuanto a 2, la  $2\pi$ -periodicidad de  $f$  junto con el que tenga media nula en  $[0, 2\pi]$  hacen que

$$\int_0^{2\pi} (f(t) + f(t + \pi)) dt = 0.$$

Por tanto, existirá al menos un  $t_0 \in [0, 2\pi]$  tal que  $f(t_0) + f(t_0 + \pi) = 0$ . No perdemos generalidad suponiendo que  $t_0 = 0$  (en otro caso, consideraremos la función  $\tilde{f}(t) = f(t + t_0)$  que está en las mismas condiciones que  $f$ , y probar la desigualdad 2 para  $f$  equivale a probarla para  $\tilde{f}$ ). Así,  $f(0) = -f(\pi)$ . Definimos  $h(t) = f(t) - f(0) \cos t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Claramente,  $h(0) = h(\pi) = h(2\pi) = 0$ . Usando 1 para  $h$  en  $[0, \pi]$  y en  $[0, 2\pi]$ , tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{2\pi} ((h')^2 - h^2) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((f')^2 - f^2) dt - f(0)^2 \int_0^{2\pi} \cos 2t dt + 2f(0) \int_0^{2\pi} (f' \sin t + f \cos t) dt. \end{aligned}$$

Como las dos últimas integrales se anulan, tenemos la desigualdad que queríamos. Si se da la igualdad en 2 también se dará la igualdad en  $[0, \pi]$  y en  $[\pi, 2\pi]$  para  $h$ , luego  $h(t) = a \sin t$  en  $[0, \pi]$  y  $h(t) = \tilde{a} \sin t$  en  $[\pi, 2\pi]$  para ciertos  $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}$ . Por tanto,  $f(t) = a \sin t + f(0) \cos t$  en  $[0, \pi]$  y  $f(t) = \tilde{a} \sin t + f(0) \cos t$  en  $[\pi, 2\pi]$ . Derivando y evaluando en  $\pi$  obtenemos  $a = -f'(\pi^-) = -f'(\pi^+) = \tilde{a}$ , lo que termina de probar el Lema.  $\square$

El segundo resultado previo para demostrar el Teorema 8.1 es el conocido Teorema de la divergencia. Dado un campo diferenciable de vectores  $X$  sobre una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$ , se define la *divergencia* de  $X$  como la función sobre  $M$  que a cada  $p \in M$  le asigna

$$\operatorname{div}(X)(p) = \sum_{i=1}^2 \langle dX_p(e_i), e_i \rangle \in \mathbb{R},$$

donde  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal de  $T_p M$ .

**Lema 8.3** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie compacta y con frontera. Dado un campo diferenciable  $X$  sobre  $M$ , se tiene*

$$\int_M \operatorname{div}(X) dA = \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle ds,$$

donde  $\eta$  es el conormal unitario exterior a  $M$  a lo largo de su frontera.

Por ejemplo, si tomamos  $X_p = p^T = p - \langle p, N_p \rangle N_p$  (parte tangente a  $M$  del vector de posición), entonces

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^2 \langle e_i - e_i(\langle \cdot, N \rangle)N - \langle p, N \rangle dN(e_i), e_i \rangle = 2 - \langle p, N \rangle \operatorname{Traza}(dN) = 2 + 2\langle p, N \rangle H.$$

*Demostración del Teorema 8.1.* Salvo una homotecia (que cambia el área y la longitud al cuadrado con el mismo coeficiente) y una traslación, podemos suponer que

$$L(\partial M) = 2\pi \quad \text{y} \quad \int_{\partial M} p \, ds = 0.$$

(En particular, la desigualdad a probar es  $A(M) \leq \pi$ ). Como  $M$  es mínima, la divergencia de  $X = p^T$  es 2 y el Lema 8.3 nos dice que si  $\eta$  es el conormal unitario exterior a  $M$  a lo largo de  $\partial M$ , entonces

$$2A(M) = \int_M \operatorname{div}(p^T) \, dA = \int_{\partial M} \langle p^T, \eta \rangle \, ds \leq \int_{\partial M} \|p\| \, ds \stackrel{(*)}{\leq} (2\pi)^{1/2} \left( \int_{\partial M} \|p\|^2 \, ds \right)^{1/2},$$

donde hemos usado la desigualdad Schwarz en  $(*)$ .

Por otro lado, la conexión de  $\partial M$  nos permite parametrizarla por el arco mediante  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , siendo  $x, y, z$  funciones  $2\pi$ -periódicas. Aplicando el apartado 2 del Lema 8.2 (para esto necesitamos que  $\int_{\partial M} p \, ds = 0$ ) tenemos

$$\left( \int_{\partial M} \|p\|^2 \right)^{1/2} = \left( \int_{\partial M} \|\gamma'\|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \int_0^{2\pi} \|\gamma'\|^2 \, dt \right)^{1/2} = (2\pi)^{1/2}.$$

Por tanto,  $A(M) \leq \pi$  y se tiene la desigualdad deseada.

Si se da la igualdad, entonces el Lema 8.2 implica que existen  $A, B \in \mathbb{R}^3$  tales que  $\gamma(t) = A \cos t + B \sin t$ . Como  $\|\gamma'\| = 1$ , obtenemos

$$\|A\|^2 \sin^2 t + \|B\|^2 \cos^2 t - 2\langle A, B \rangle \sin t \cos t = 1, \quad \forall t \in [0, 2\pi]. \quad (12)$$

Evaluando en  $t = 0$  obtendremos  $\|B\| = 1$ ; evaluando en  $t = \pi/2$ , sale  $\|A\| = 1$ . Sustituyendo esto en (12), deducimos que  $\langle A, B \rangle \sin t \cos t = 0$  para todo  $t \in [0, 2\pi]$ , luego  $\langle A, B \rangle = 0$ . En consecuencia,  $\gamma$  es una circunferencia en  $\mathbb{R}^3$ . Por la Proposición 7.2,  $M$  será un disco plano.  $\square$

Veamos qué ocurre si en el Teorema 7.1 aumentamos en una las componentes frontera de  $M$ :

**Teorema 8.4** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie mínima compacta y conexa. Si  $\partial M$  es regular y tiene dos componentes conexas, entonces  $4\pi A(M) < L(\partial M)^2$ .*

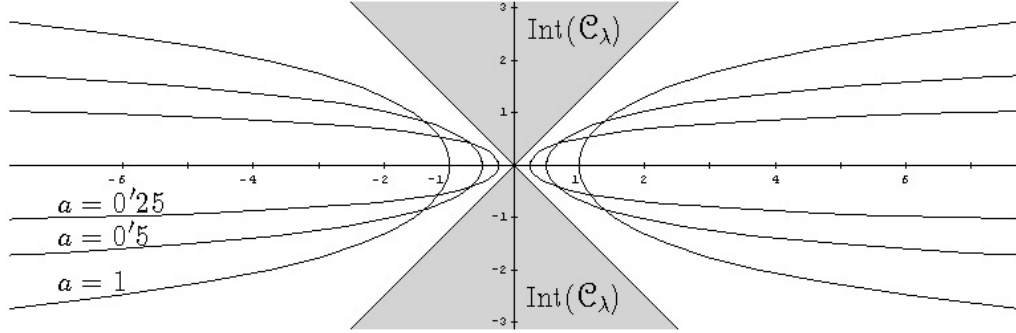


Figure 22: Distintas catenoides  $C_a$  para  $a = 1, 0.5$  y  $0.25$ .

Para probar el Teorema 8.4 seguiremos, hasta donde sea posible, la demostración del Teorema 8.1. Podemos suponer que  $L(\partial M) = 2\pi$  y  $\int_{\partial M} p ds = 0$ , luego debemos probar que  $A(M) < \pi$ . Aplicando el Teorema de la divergencia a  $X = p^T$ , tenemos

$$2A(M) \leq (2\pi)^{1/2} \left( \int_{\partial M} \|p\|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Sin embargo, como ahora  $\partial M$  no es conexa, no podemos parametrizarla globalmente por una curva p.p.a. a la que aplicarle la desigualdad de Wirtinger (Lema 8.2). En lugar de ello usaremos una serie de resultados, que tienen interés por sí mismos. Empezaremos introduciendo algo de notación.

**Definición 8.5** Dado el cono vertical  $\mathcal{C}_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2\}$  con  $\lambda > 0$ , denotaremos por

$$\text{Int}(\mathcal{C}_\lambda) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < \lambda^2 z^2\}, \quad \text{Ext}(\mathcal{C}_\lambda) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > \lambda^2 z^2\}.$$

**Lema 8.6** Existe un cono  $\mathcal{C}_\lambda$  disjunto de todas las catenoides verticales  $C_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2(z/a)\}$ ,  $\forall a > 0$ .

*Demostración.* Tanto  $\mathcal{C}_\lambda$  como  $C_a$  son superficies de revolución alrededor del eje  $z$ , podemos considerar sólo las curvas generatrices. Así, el problema se reduce a encontrar una línea recta  $y = (\sinh \tau_0)z$  ( $\tau_0 > 0$  constante a determinar) que nunca corte a ninguno de los grafos  $y = a \cosh(z/a)$ ,  $a > 0$ , véase la figura 22.

Esto equivale a encontrar  $\tau_0 > 0$  tal que  $a \cosh(z/a) - (\sinh \tau_0)z \geq 0$  para todos  $z \in \mathbb{R}$  y  $a > 0$  (hemos cambiado  $> 0$  por  $\geq 0$ , pero esto es suficiente ya que basta elevar un poco más la

pendiente de la recta  $y = (\sinh z_0)z$ . Consideremos la función  $f(z) = a \cosh(z/a) - (\sinh \tau_0)z$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Así,

$$f'(z) = \sinh(z/a) - \sinh \tau_0, \quad f''(z) = \frac{1}{a} \cosh(z/a) > 0.$$

Luego el único punto crítico de  $f$  es  $z = a\tau_0$ , y éste es un mínimo de  $f$ . Si encontramos un  $\tau_0 > 0$  tal que  $f(a\tau_0) = 0$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ , entonces será  $f(z) \geq 0 \forall z \in \mathbb{R}, \forall a > 0$ . Pero  $f(a\tau_0) = a \cosh \tau_0 - a\tau_0 \sinh \tau_0$ , que se anula  $\forall a > 0$  si y sólo si la función  $g(\tau) = \cosh \tau - \tau \sinh \tau$  se anula en  $\tau_0$ . Pero

$$g(1) = \cosh 1 = e^{-1} > 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} g(\tau) = -\infty, \quad g'(\tau) = -\tau \cosh \tau < 0 \quad (\text{para } \tau > 0).$$

Estas tres propiedades implican que existe un único  $\tau_0 > 1$  tal que  $g(\tau_0) = 0$ . □

**Nota 8.7** Con la notación del Lema 8.6,  $\mathcal{C}_\lambda$  contiene dos octantes opuestos del espacio, con vértice en el origen y dispuestos de forma que la dirección suma de las aristas de cada octante sea la vertical: esto ocurre porque el ángulo que la generatriz  $y = (\sinh \tau_0)z$  forma con el eje  $z$  de revolución es  $\beta$  cumpliendo  $\tan \beta = \sinh \tau_0$ . Calculando numéricamente  $\tau_0$  con Mathematica, obtenemos  $\tau_0 \sim 1.9967864$  luego  $\sinh \tau_0 \sim 1.5088796$ . Por otro lado, el ángulo  $\theta$  formado por cualquiera de las tres aristas del octante y la semirrecta suma de esas tres aristas cumple  $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$ , luego  $\tan \theta = \sqrt{2} \sim 1.4142136$ . En particular,  $\tan \theta < \tan \beta$  luego  $\mathcal{C}_\lambda$  contiene dos octantes opuestos.

**Teorema 8.8 (Teorema del cono, Hildebrandt [11])** *Sea  $\mathcal{C}_\lambda$  el cono obtenido en el Lema 8.6. Entonces, no existe ninguna superficie mínima conexa y compacta  $M$  tal que  $\partial M \subset \text{Int}(\mathcal{C})$ ,  $\partial M \cap \text{Int}(\mathcal{C})^+ \neq \emptyset$ ,  $\partial M \cap \text{Int}(\mathcal{C})^- \neq \emptyset$  (aquí  $^+, ^-$  significan la parte del conjunto por encima o por debajo del plano  $\{z = 0\}$ ).*

Dejamos la demostración como ejercicio para el lector.

El siguiente paso en nuestra prueba del Teorema 8.4 consistirá en estudiar condiciones bajo las cuales dos curvas de Jordan disjuntas  $C_1, C_2$  entran en octantes opuestos respecto de cierto sistema de referencia ortonormal<sup>9</sup> en  $\mathbb{R}^3$ . Gracias al Teorema 8.8, en esas condiciones  $C_1, C_2$  no podrán ser la frontera de una superficie mínima conexa y compacta.

**Lema 8.9** *Sean  $C_1, C_2$  dos curvas de Jordan disjuntas para las que no existe ningún sistema de referencia ortonormal tal que  $C_1$  y  $C_2$  cortan a los tres planos coordenados. Entonces, existe un plano afín de  $\mathbb{R}^3$  que separa estrictamente a  $C_1$  de  $C_2$ . Equivalentemente, existe una recta afín  $L \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $p_L(C_1) \cap p_L(C_2) = \emptyset$ , donde  $p_L$  representa la proyección ortogonal sobre  $L$ .*

---

<sup>9</sup>Un sistema de referencia ortonormal es una lista  $(p_0; u_1, u_2, u_3)$  donde  $p_0 \in \mathbb{R}$  y  $\{u_1, u_2, u_3\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual. A los planos  $p_0 + u_i^\perp$ ,  $i = 1, 2, 3$ , se les llama *planos coordenados del sistema de referencia*.



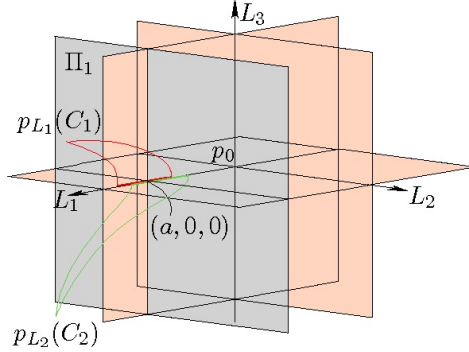


Figure 23: El plano  $\Pi_1$  corta a  $C_1$  y a  $C_2$ .

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que para toda recta afín  $L \subset \mathbb{R}^3$  se tiene  $p_L(C_1) \cap p_L(C_2) \neq \emptyset$ . Tomemos tres rectas afines  $L_1, L_2, L_3$  ortogonales dos a dos, que se corten en un punto  $p_0$ . Trabajaremos en coordenadas respecto al sistema de referencia  $(p_0; \vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3)$ . Como  $p_{L_1}(C_1) \cap p_{L_1}(C_2) \neq \emptyset$ , existe un punto del tipo  $(a, 0, 0)$  en  $p_{L_1}(C_1) \cap p_{L_1}(C_2)$ . Esto quiere decir que el plano afín  $\Pi_1 = (a, 0, 0) + \vec{L}_1^\perp$  corta a  $C_1$  y a  $C_2$ , ver figura 23.

Razonando análogamente, existen planos  $\Pi_2, \Pi_3$  ortogonales a  $\vec{L}_2, \vec{L}_3$ , cada uno de ellos cortando a  $C_1$  y a  $C_2$ . Por tanto, el sistema de referencia ortonormal dado por  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  contradice la hipótesis de nuestro Lema.  $\square$

**Lema 8.10** *En las hipótesis del Lema 8.9, existe un plano afín  $\Pi$  que separa a  $C_1$  y a  $C_2$  (i.e. cada  $C_i$  cae en uno de los semiespacios cerrados con frontera  $\Pi$ ) y tal que  $\Pi \cap C_i \neq \emptyset$ ,  $i = 1, 2$ .*

*Demostración.* Por el Lema 8.9, existe un plano afín  $\Pi_0$  que separa estrictamente a  $C_1, C_2$ . Intuitivamente, la idea para encontrar el plano  $\Pi$  es la siguiente: la condición de que un plano afín separe estrictamente a  $C_1, C_2$  es abierta, luego podemos mover ligeramente  $\Pi_0$  y seguirá separando estrictamente a  $C_1, C_2$ . Pero existen planos afines que cortan a ambas curvas, luego no podemos mover indefinidamente  $\Pi_0$  manteniendo a la vez la propiedad de separar estrictamente a  $C_1, C_2$ . La primera vez que la propiedad deje de cumplirse tendremos un plano  $\Pi$  como el que buscamos. Pasamos a formalizar esta idea: empecemos considerando un punto  $0$  en el plano  $\Pi_0$ . Del haz de planos afines que pasan por  $0$ , sea  $\tilde{\Pi}$  un plano que corte a  $C_1$  y a  $C_2$ , y que al menos corte a  $C_1$  transversalmente en algún punto. Salvo un giro, podemos situar  $\tilde{\Pi}$  horizontalmente, y la situación es la representada en la figura 24.

Como  $C_1 \cup C_2$  es un compacto, existe  $r > 0$  tal que la bola cerrada  $\overline{B(0, r)}$  contiene a  $C_1 \cup C_2$ . Consideremos el conjunto

$$U = \{v \in \mathbb{S}^2(1) \mid p + v^\perp \text{ separa estrictamente a } C_1, C_2, \text{ para algún } p \in \overline{B(0, r)}\}.$$

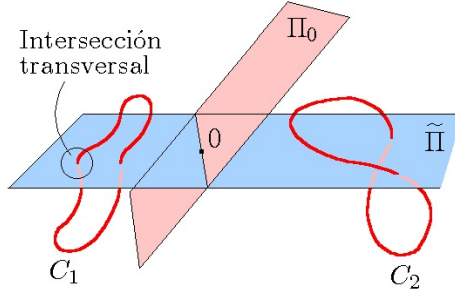


Figure 24: Los planos  $\Pi_0$  y  $\tilde{\Pi}$ .

- $U \neq \emptyset$ , ya que  $\Pi_0$  separa estrictamente a  $C_1, C_2$ .
- $U$  es abierto, ya que  $C_1, C_2$  son compactos y la condición de separación es estricta en la definición de  $U$ .

La función  $v \in U \mapsto \langle v, e_3 \rangle$  es menor o igual que 1, luego  $\exists h = \sup\{\langle v, e_3 \rangle \mid v \in U\}$ . Tomemos una sucesión  $\{v_n\}_n \subset U$  tal que  $\langle v_n, e_3 \rangle$  converge a  $h$ . Cada  $v_n$  llevará asociado un punto  $p_n \in \overline{B(0, r)}$  tal que  $p_n + v_n^\perp$  separa estrictamente a  $C_1, C_2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Como  $\mathbb{S}^2(1), \overline{B(0, r)}$  son compactos, tras pasar a una parcial podemos suponer que  $v_n$  converge a un vector  $v_\infty \in \mathbb{S}^2(1)$  y que  $p_n$  converge a un punto  $p_\infty \in \overline{B(0, r)}$ . Llamemos  $\Pi = p_\infty + v_\infty^\perp$ .

- $\Pi$  separa a  $C_1$  y  $C_2$  (no necesariamente de forma estricta), ya que cada  $p_n + v_n^\perp$  separa estrictamente a ambas curvas.
- $\Pi$  no puede ser horizontal, ya que en ese caso  $\Pi$  sería paralelo a  $\tilde{\Pi}$  luego o bien  $\Pi \neq \tilde{\Pi}$  y se contradice que  $\tilde{\Pi}$  corta a  $C_1, C_2$  mientras que  $\Pi$  las separa, o bien  $\Pi = \tilde{\Pi}$ , y se contradice que existen puntos de  $C_1$  a ambos lados de  $\tilde{\Pi}$  porque este plano corta transversalmente a  $C_1$  en al menos un punto.
- $v_\infty \notin U$ , ya que si  $v_\infty$  estuviera en  $U$  entonces un entorno de  $v_\infty$  en  $\mathbb{S}^2(1)$  estaría contenido en  $U$ , pero como  $v_\infty \neq e_3$ , la función  $v \in U \mapsto \langle v, e_3 \rangle$  no podría tener su supremo en  $\langle v_\infty, e_3 \rangle$ , contradicción.

Por tanto,  $\Pi$  no puede separar estrictamente a  $C_1, C_2$ . Como sabemos que  $\Pi$  separa a  $C_1, C_2$  deducimos que  $\Pi$  corta al menos a una de estas curvas. Sin pérdida de generalidad podemos suponer  $\Pi \cap C_1 \neq \emptyset$ . Veamos que  $\Pi \cap C_2 \neq \emptyset$  y habremos terminado: Por reducción al absurdo, supongamos  $d = \text{dist}(\Pi, C_2) > 0$ . Sea  $\Pi_s$  el plano afín obtenido trasladando paralelamente  $\Pi$  en la dirección que lo acerca a  $C_2$  a distancia  $s \in ]0, d[$ . Como  $\Pi$  separa a  $C_1, C_2$ , necesariamente  $\Pi_s$  separará estrictamente a  $C_1, C_2$  para todo  $s \in ]0, d[$ . Por otro lado, la bola cerrada  $\overline{B(0, R)}$  no puede quedar en el semiespacio cerrado determinado por  $\Pi$  que contiene a  $C_1$  (porque en ese

caso  $C_2$  no estaría contenida en  $\overline{B(0, R)}$ , contradicción), y como  $\Pi$  corta a  $\overline{B(0, R)}$  deducimos que  $\Pi$  ha de cortar a la bola abierta  $B(0, R)$ , luego existe  $\varepsilon \in ]0, d[$  tal que el plano afín  $\Pi_\varepsilon$  corta a  $\overline{B(0, r)}$  y separa estrictamente a  $C_1, C_2$ , de donde el normal unitario a  $\Pi_\varepsilon$  estará en  $U$ . Pero este normal no es otro que el de  $\Pi$ , luego  $v_\infty \in U$ , contradicción. Esto termina la demostración del Lema.  $\square$

En la situación anterior, llamaremos  $\Pi_1$  al plano afín que aparece en la tesis del Lema 8.10. Así,  $\Pi_1$  separa a  $C_1, C_2$  y corta a cada una de estas dos curvas.

**Lema 8.11** *En las hipótesis del Lema 8.9, existe un plano afín  $\Pi_2$  ortogonal a  $\Pi_1$  que separa a  $C_1, C_2$  y corta a ambas curvas.*

*Demostración.* El razonamiento es parecido al de los Lemas 8.9 y 8.10.

Primero veamos que existe un plano afín  $\Pi'$  ortogonal a  $\Pi_1$  y que separa estrictamente a  $C_1$  de  $C_2$ : si esto no es cierto, tomaremos dos planos  $\Pi_2, \Pi_3$  ortogonales a  $\Pi_1$  y ortogonales entre sí, tales que  $\Pi_i \cap C_j \neq \emptyset \forall i = 2, 3, \forall j = 1, 2$ . Así,  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  forman un sistema de referencia ortonormal cuyos planos coordenados todos cortan a  $C_1, C_2$ , contradicción con lo supuesto en el Lema 8.9.

Una vez que sabemos que existe un plano afín  $\Pi'$  ortogonal a  $\Pi_1$  que separa estrictamente a  $C_1$  de  $C_2$ , razonaremos de forma similar a en la demostración del Lema 8.9 pero usando sólo planos ortogonales a  $\Pi_1$  (ahora hay que maximizar la función  $v \mapsto \langle v, v_0 \rangle$ , donde  $v_0$  es el vector ortogonal a cierto plano auxiliar  $\Pi'$  ortogonal a  $\Pi_1$ , que corte a  $C_1$  y a  $C_2$ , y que al menos corte a  $C_1$  transversalmente en algún punto). De esta forma, produciremos un plano afín  $\Pi_2$  ortogonal a  $\Pi_1$  que separa a  $C_1, C_2$  pero corta a ambas curvas (ejercicio 8.1).  $\square$

**Ejercicio 8.1** Probar detalladamente el Lema 8.11.

**Lema 8.12** *En las hipótesis del Lema 8.9, existe un plano afín  $\Pi_3$  ortogonal a  $\Pi_1$  y a  $\Pi_2$  que separa estrictamente a  $C_1$  de  $C_2$ .*

*Demostración.* Sea  $L_3 := \Pi_1 \cap \Pi_2$ . Si fuera  $p_{L_3}(C_1) \cap p_{L_3}(C_2) \neq \emptyset$ , encontraríamos un plano  $\Pi'_3$  ortogonal a  $L_3$  (y por tanto, también a  $\Pi_1$  y a  $\Pi_2$ ) que corta a  $C_1, C_2$ , y volvemos a contradecir las hipótesis del Lema 8.9. Por tanto,  $p_{L_3}(C_1) \cap p_{L_3}(C_2) = \emptyset$  luego existe un plano  $\Pi_3$  ortogonal a  $L_3$  que separa estrictamente  $C_1$  de  $C_2$ .  $\square$

**Proposición 8.13** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie mínima conexa y con borde formado por dos curvas de Jordan  $C_1, C_2$ . Entonces, existe un sistema de referencia ortonormal tal que  $C_1$  y  $C_2$  cortan a los tres planos coordenados.*

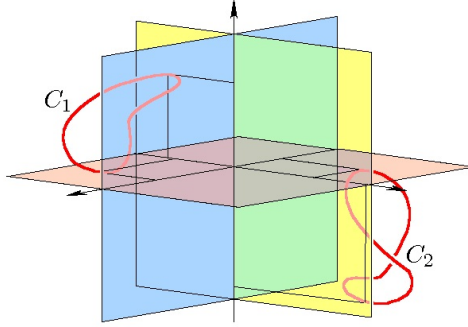


Figure 25:  $C_1, C_2$  están en octantes opuestos.

*Demostración.* Supongamos que la Proposición no es cierta. Usando los Lemas 8.9,8.10,8.11 y 8.12 concluimos que existen tres planos  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  ortogonales dos a dos tales que  $\Pi_1, \Pi_2$  cortan cada uno a  $C_1$  y  $C_2$ , y  $\Pi_3$  separa estrictamente  $C_1$  de  $C_2$ . Por tanto,  $C_1, C_2$  están contenidos en octantes opuestos de  $\mathbb{R}^3 - (\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3)$  (véase la figura 25). Esto contradice el Teorema del Cono (ver también la Nota 8.7).  $\square$

*Demostración del Teorema 8.4.*

Recordemos que podíamos suponer  $L(\partial M) = 2\pi$  y  $\int_{\partial M} p ds = 0$ , y que habíamos probado que  $2A(M) \leq (2\pi)^{1/2} (\int_{\partial M} \|p\|^2 ds)^{1/2}$ .

Por la Proposición 8.13, podemos tomar un sistema de referencia ortonormal tal que  $C_1, C_2$  cortan a los tres planos coordenados. Sean  $L_x, L_y, L_z$  los ejes coordenados de este sistema de referencia, y

$$p_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow L_x, \quad p_y : \mathbb{R}^3 \rightarrow L_y, \quad p_z : \mathbb{R}^3 \rightarrow L_z$$

las correspondientes proyecciones ortogonales. Como el plano coordenado ortogonal a  $L_x$  corta a  $C_1$  y a  $C_2$ , deducimos que  $p_x(\partial M)$  es conexo. Análogamente,  $p_y(\partial M), p_z(\partial M)$  son conexos.

Por otro lado, para  $i = 1, 2$  sea  $L(C_i)$  la longitud de  $C_i$  y  $\gamma_i : [0, L(C_i)] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización por el arco de  $C_i$ ,  $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ . Como en  $C_1, C_2$  hay puntos que se proyectan vía  $p_x$  sobre el mismo punto de  $p_x(\partial M)$ , existirán  $t_1 \in [0, L(C_1)], t_2 \in [0, L(C_2)]$  tales que  $x_1(t_1) = x_2(t_2)$ . Salvo un traslado de parámetro en cada  $C_i$ , podemos suponer que  $x_1(0) = x_2(0)$ .

Definimos la función  $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{si } 0 \leq t \leq L(C_1), \\ x_2(t - L(C_1)) & \text{si } L(C_1) \leq t \leq L(C_1) + L(C_2) = 2\pi. \end{cases}$$

Como  $x_1(L(C_1)) = x_1(0) = x_2(0)$ ,  $x$  es continua en  $t = L(C_1)$ . Como  $x_i$  es derivable en  $[0, L(C_i)]$ , concluimos que  $x$  es diferenciable a trozos en  $[0, 2\pi]$ . Si aplicamos un razonamiento

similar a los pares  $y_1, y_2$  y  $z_1, z_2$  obtendremos funciones análogas  $y, z : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Además,

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \|p\|^2 ds &= \sum_{i=1}^2 \int_0^{L(C_i)} (x_i(t)^2 + y_i(t)^2 + z_i(t)^2) dt \\ &= \int_0^{L(C_1)} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) dt + \int_{L(C_1)}^{2\pi} (x_2(s - L(C_1))^2 + y_2(s - L(C_1))^2 + z_2(s - L(C_1))^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} (x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2) dt. \end{aligned}$$

Nótese que cada una de las funciones  $x, y, z$  pueden verse como funciones  $2\pi$ -periódicas definidas sobre  $\mathbb{R}$ , diferenciables a trozos y con media nula sobre  $[0, 2\pi]$  (esto último se deduce de  $\int_{\partial M} p ds = 0$ ). Además, el Lema de Wirtinger sigue siendo válido para funciones diferenciables a trozos, luego

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2) dt &\leq \int_0^{2\pi} (x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2) dt \quad (13) \\ &= \int_0^{L(C_1)} (x_1'(t)^2 + y_1'(t)^2 + z_1'(t)^2) dt \\ &+ \int_{L(C_1)}^{2\pi} (x_2'(t - L(C_1))^2 + y_2'(t - L(C_1))^2 + z_2'(t - L(C_1))^2) dt = L(C_1) + L(C_2) = 2\pi. \end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que

$$2A(M) \leq (2\pi)^{1/2} \left( \int_{\partial M} \|p\|^2 \right)^{1/2} \leq 2\pi.$$

Pero queremos demostrar la desigualdad estricta. Por reducción al absurdo, supongamos que se da la igualdad. (13) junto con la desigualdad de Wirtinger implican que existen  $A, B \in \mathbb{R}^3$  tales que

$$(x(t), y(t), z(t)) = A \cos t + B \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

En particular,  $x(t) = A_1 \cos t + B_1 \sin t$  donde  $A_1, B_1 \in \mathbb{R}$ . Pero esta función tiene exactamente dos puntos críticos en  $[0, 2\pi[$ , lo cual es imposible: como  $x_1$  es la primera coordenada de la parametrización de  $C_1$  y ésta es una curva cerrada,  $t \mapsto x_1(t)$  tiene al menos dos puntos críticos en  $[0, L(C_1)]$ . Análogamente,  $t \mapsto x_2(t - L(C_1))$  tiene al menos dos puntos críticos en  $[L(C_1), 2\pi]$ . Por tanto, luego  $x$  tiene al menos tres puntos críticos en  $[0, 2\pi]$  (podríamos perder uno si  $L(C_1)$  es punto crítico común de  $x_1(t)$  y de  $x_2(t - L(C_1))$ ). Esta contradicción muestra que  $A(M) < \pi$  y el Teorema está probado.  $\square$

## 9 El método de reflexión de Alexandrov.

En 1956, Alexandrov aplicó de forma geométrica el principio del máximo para dar una de las caracterizaciones más famosas de la esfera:

**Teorema 9.1 (Alexandrov)** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie conexa, compacta, embebida y con curvatura media constante. Entonces,  $M$  es una esfera.*

Este Teorema sigue siendo válido para hipersuperficies de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . Actualmente se conocen demostraciones distintas de la original, que no usan el principio del máximo sino que se basan en geometría integral. De hecho, estas demostraciones alternativas permiten generalizar el Teorema a cualquier *curvatura media generalizada*, entendiendo por ello cualquier polinomio homogéneo simétrico en las curvaturas principales de la hipersuperficie. Sin embargo, el método de demostración empleado por Alexandrov ha trascendido la mera aplicación del mismo a esta situación, llegando a constituir una poderosa e intuitiva herramienta válida en otros contextos para concluir la existencia de simetrías en una hipersuperficie de curvatura media constante. Este procedimiento ha adquirido el nombre de *método de reflexión de Alexandrov*, que desarrollaremos a continuación en el caso más sencillo posible.

### 9.1 Caracterizaciones de la esfera.

En esta Subsección repasaremos algunas caracterizaciones sencillas de la esfera, que nos serán útiles para probar el Teorema 9.1. En toda la Subsección,  $M$  siempre será una superficie conexa, compacta y embebida en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Omega$  el dominio interior a  $M$  y  $N$  la aplicación de Gauss de  $M$  que apunta a  $\Omega$ , esto es,  $\forall p \in M \exists \varepsilon > 0$  tal que  $p + tN(p) \in \Omega$  siempre que  $0 < t < \varepsilon$ .

**Lema 9.2** *Si todas las rectas normales a  $M$  pasan por un mismo punto  $q \in \mathbb{R}^3$ , entonces  $M$  es una esfera centrada en  $q$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe  $q \in \mathbb{R}^3$  tal que  $q \in p + \langle N(p) \rangle$ ,  $\forall p \in M$ . Consideremos la función  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$p + \lambda(p)N(p) = q, \quad \forall p \in M. \quad (14)$$

Como  $\lambda(p) = \|p - q\|$ , concluimos que  $\lambda$  es diferenciable en  $M - \{q\}$ . Derivando (14) en  $p \in M - \{q\}$  en la dirección de  $v \in T_p M$ , tenemos  $[v + \lambda(p)dN_p(v)] + d\lambda_p(v)N(p) = 0$ , luego  $d\lambda_p(v) = 0$ . Como  $v$  es arbitrario en  $T_p M$  y  $M - \{q\}$  es conexa,  $\lambda$  ha de ser constante en  $M - \{q\}$  y por tanto también en  $M$ . Como  $M$  no puede reducirse a  $\{q\}$  tenemos  $\lambda > 0$ , y la igualdad  $\|p - q\| \equiv \lambda$  nos dice que  $M$  está contenida en una esfera centrada en  $q$  y de radio  $\lambda$ , luego es un abierto de ésta. Por ser  $M$  compacta,  $M$  es cerrada en la esfera, luego coincide con ella.  $\square$

**Lema 9.3** Si  $M$  es simétrica respecto de todos los planos que pasan por un punto  $q \in \mathbb{R}^3$ , entonces  $M$  es una esfera centrada en  $q$ .

*Demostración.* Salvo una traslación, podemos suponer que  $q = 0 \in \mathbb{R}^3$ .

Tomemos un punto  $p \in M - \{0\}$  y sea  $\mathcal{H}_p$  el haz de planos con base la recta vectorial  $\langle \vec{0p} \rangle$ . Veamos que todos los planos de  $\mathcal{H}_p$  son ortogonales a  $T_pM$ : en efecto, fijemos  $\Pi \in \mathcal{H}_p$  y sea  $S$  la simetría respecto a  $\Pi$ . Como  $\Pi$  pasa por  $0$ ,  $M$  ha de ser invariante por  $S$ , luego pasando a diferenciales  $S(T_pM) = T_pM$ . De aquí deducimos que  $T_pM = \Pi$  o bien  $T_pM \perp \Pi$ . Lo primero no puede darse ( $M$  no puede ser localmente un grafo sobre  $\Pi$  siendo simétrica respecto de éste, a menos que  $M$  esté contenida en  $\Pi$ , imposible), luego se da lo segundo. Variando  $\Pi$  en  $\mathcal{H}_p$ , tenemos que todos los planos de  $\mathcal{H}_p$  son ortogonales a  $T_pM$  y por tanto todos (salvo traslación) contienen a  $N(p)$ . Esto implica que  $\langle N(p) \rangle$  ha de coincidir con la recta base del haz,  $\langle N(p) \rangle = \langle \vec{0p} \rangle$  luego la recta normal a  $M$  en  $p$  pasa por el origen.

Como lo último es cierto para todo punto de  $M - \{0\}$ , el Lema 9.2 (allí se suponían que TODAS las rectas normales a  $M$  pasan por un mismo punto, pero la misma demostración es válida si concurren en un punto las rectas normales salvo en una cantidad finita de puntos de  $M$ ) asegura que  $M$  es una esfera.  $\square$

**Definición 9.4** El *centro de masa* de  $M$  es el vector

$$c(M) = \frac{1}{A(M)} \int_M p dA \in \mathbb{R}^3,$$

donde  $A(M) = \int_M dA$  es el área de  $M$ .

**Lema 9.5** Sea  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una isometría de  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, el centro de masa de la superficie  $\phi(M)$  es  $c(\phi(M)) = \phi(c(M))$ . En particular, si  $M$  es invariante por  $\phi$  entonces su centro de masa es un punto fijo de  $\phi$ .

*Demostración.* Usando la definición de centro de masa y la fórmula de cambio de variable,

$$c(\phi(M)) = \frac{1}{A(\phi(M))} \int_{\phi(M)} q dA = \frac{1}{A(\phi(M))} \int_M \phi(p) |\text{Jac}(\phi)| dA,$$

donde  $|\text{Jac}(\phi)|$  es el valor absoluto del Jacobiano de  $\phi$ , que vale 1 porque  $\phi$  es una isometría. Usando que  $\phi$  también conserva el área y escribiendo  $\phi(x) = Bx + b$  para ciertos  $B \in O(3, \mathbb{R})$  y  $b \in \mathbb{R}^3$ , lo último es igual a

$$\begin{aligned} \frac{1}{A(M)} \int_M \phi(p) dA &= \frac{1}{A(M)} \int_M (Bp + b) dA = \frac{1}{A(M)} \int_M Bp dA + b \\ &= B \frac{1}{A(M)} \int_M p dA + b = Bc(M) + b = \phi(c(M)). \end{aligned}$$

$\square$

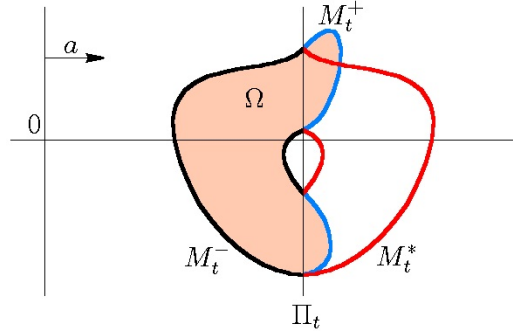


Figure 26:  $M_t^-$  y  $M_t^+$  son las partes de  $M$  a la izquierda y a la derecha de  $\Pi_t$ , respectivamente.  $M_t^*$  es la imagen reflejada de  $M_t^-$  mediante  $S_t$  y  $\Omega$  es la región sombreada.

**Lema 9.6** *Si para toda dirección de  $\mathbb{R}^3$  existe un plano afín ortogonal a esa dirección tal que  $M$  es simétrica respecto a dicho plano, entonces  $M$  es una esfera.*

*Demostración.* Según el Lema 9.3, basta probar que existe un punto de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $M$  es simétrica respecto de todos los planos que pasan por ese punto. Este punto será el centro de masa  $c$  de  $M$ : tomemos un plano afín  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  que pase por  $c$ . Por hipótesis, existe un plano  $\Pi'$  paralelo a  $\Pi$  tal que  $M$  es simétrica respecto a  $\Pi'$ . Por el Lema 9.5,  $c$  ha de ser fijo por la reflexión en  $\Pi'$ , luego  $c \in \Pi'$  y por tanto  $\Pi = \Pi'$ . En particular,  $M$  es simétrica por la reflexión en  $\Pi$ .  $\square$

## 9.2 Producción de simetrías por reflexión.

En esta Subsección usaremos el principio del máximo para obtener una simetría de nuestra superficie  $M$  en las hipótesis del Teorema 9.1. Fijemos una dirección  $a \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|a\| = 1$ . Dado  $t \in \mathbb{R}$ , sea  $\Pi_t = ta + \langle a \rangle^\perp$  y sea  $S_t$  la simetría respecto a  $\Pi_t$ , que viene dada por

$$S_t(x) = x - 2(\langle x, a \rangle - t)a, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Definimos los conjuntos (véase la figura 26)

$$M_t^- = \{p \in M \mid \langle p, a \rangle < t\}, \quad M_t^+ = \{p \in M \mid \langle p, a \rangle > t\}, \quad M_t^* = S_t(M_t^-).$$

Por ser  $M$  compacta, el conjunto  $\{t \in \mathbb{R} \mid M = M_t^+\}$  es no vacío y está acotado superiormente, luego existe  $t_0 = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid M = M_t^+\} \in \mathbb{R}$ . Salvo una traslación, podemos suponer  $t_0 = 0$ .

**Lema 9.7** *En la situación anterior,  $M \cap \Pi_0 \neq \emptyset$  y  $\forall p \in M \cap \Pi_0$  se tiene  $N(p) = a$ .*



*Demostración.* Sea  $h = \langle p, a \rangle$  la función altura respecto a  $a$ . Para cada  $t < 0$  se tiene  $h > t$  en  $M$ , luego pasando al límite  $h \geq 0$  en  $M$ . Y si fuera  $h > 0$  en  $M$ , entonces por compacidad existiría  $t' > 0$  tal que  $h > t'$  en  $M$ , luego  $\sup\{t \in \mathbb{R} \mid M = M_t^+\} \geq t' > 0$ , contradicción. Por lo tanto, existe  $p \in M$  tal que  $h(p) = 0$ , luego  $M \cap \Pi_0 \neq \emptyset$ .

Sea ahora  $p \in M \cap \Pi_0$ . Siguiendo la notación anterior,  $h$  tiene un mínimo en  $p$ , luego  $T_p M$  es paralelo a  $\Pi_0$  o equivalentemente,  $N(p) = \pm a$ . Como  $M$  está contenida en el semiespacio cerrado  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid h(x) \geq 0\}$ , este semiespacio también contendrá al dominio interior  $\Omega$  a  $M$ . Como  $N(p)$  apunta a  $\Omega$  y  $a$  apunta al interior de dicho semiespacio, necesariamente se tiene  $N(p) = a$ .  $\square$

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{A} = \{t > 0 \mid \langle N, a \rangle > 0 \text{ en } M_t^- \text{ y } M_s^* \subset \Omega \forall s \in ]0, t[\}$$

**Lema 9.8** *Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $]0, \varepsilon[ \subset \mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}$  es un intervalo.*

*Demostración.* Es obvio que si  $\mathcal{A}$  es no vacío, entonces ha de ser un intervalo. Veamos primero que  $\exists \varepsilon_1 > 0$  tal que  $\langle N, a \rangle > 0$  en  $M_t^-$ ,  $\forall t \in ]0, \varepsilon_1[$ : en caso contrario, encontraremos una sucesión  $\{t_n\}_n \searrow 0$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $p_n \in M_{t_n}^-$  siendo  $\langle N(p_n), a \rangle \leq 0$ . Pasando a una parcial,  $\{p_n\}_n$  converge a un punto  $p_\infty \in M \cap \Pi_0$ . Tomando límites tenemos  $\langle N(p_\infty), a \rangle \leq 0$ , lo que contradice el Lema 9.7. Por tanto,  $\exists \varepsilon_1 > 0$  tal que  $\langle N, a \rangle > 0$  en  $M_t^-$ ,  $t \in ]0, \varepsilon_1[$ .

Ahora veamos que para  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_1[$  suficientemente pequeño, podemos conseguir  $M_s^* \subset \Omega$  siempre que  $0 < s < \varepsilon$  (y esto probará el Lema): por reducción al absurdo, supongamos que existe una sucesión  $\{s_n\}_n \subset ]0, \varepsilon_1[$ ,  $s_n \searrow 0$ , tal que  $M_{s_n}^* \not\subset \Omega$  para todo  $n$ . En particular, existirá  $p_n \in M_{s_n}^-$  tal que  $p_n^* \notin \Omega$ , donde  $p_n^* = S_{s_n}(p_n)$ , y todo esto puede hacerse para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Ahora consideremos el segmento

$$[p_n, p_n^*] = \{(1-t)p_n + tp_n^* \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Como  $p_n \in M_{s_n}^-$  y  $s_n \in ]0, \varepsilon_1[$ , tendremos  $\langle N(p_n), a \rangle > 0$  y por tanto, saliendo de  $p_n$  a lo largo de  $[p_n, p_n^*]$  encontramos puntos de  $\Omega$  tan próximos como queramos a  $p_n$ . Pero  $p_n^* \notin \Omega$ , luego por conexión deducimos que el segmento abierto

$$]p_n, p_n^*[ = \{(1-t)p_n + tp_n^* \mid 0 < t < 1\}$$

ha de cortar a  $\partial\Omega = M$ , luego existe  $x_n \in ]p_n, p_n^*[\cap M$ . Pasando a una parcial,  $\{p_n\}_n$  convergerá a un punto  $p_\infty \in M \cap \Pi_0$ , y por tanto  $\{p_n^*\}_n$  y  $\{x_n\}_n$  también tendrán como límite a  $p_\infty$ . Por el Lema 9.7,  $N(p_\infty) = a$  luego  $M$  es localmente un grafo sobre  $\Pi_0$  alrededor de  $p_\infty$ , lo que contradice que  $p_n, x_n \in M$  tengan la misma proyección sobre  $\Pi_0$  y ambos converjan a  $p_\infty$ . Esto termina de probar el Lema.  $\square$

$\mathcal{A}$  es acotado superiormente, ya que para  $s > \inf\{t \in \mathbb{R} \mid M = M_t^-\}$  no puede darse  $M_s^* \subset \Omega$ . Por tanto, existe  $T := \sup \mathcal{A} \in ]0, \infty[$ .

**Lema 9.9** *En la situación anterior,  $\langle N, a \rangle > 0$  en  $M_T^-$  y  $M_T^* \subset \bar{\Omega}$ .*

*Demostración.* Dado  $p \in M_T^-$ , existe  $t \in \mathcal{A}$  tal que  $\langle p, a \rangle < t$  luego  $p \in M_t^-$  y por definición de  $\mathcal{A}$ , es  $\langle N(p), a \rangle > 0$ . Para la segunda afirmación del Lema, tomemos un punto  $p \in M_T^-$  y veamos que  $S_T(p)$  está en  $\bar{\Omega}$ . Sea  $\{t_n\}_n \subset \mathcal{A}$  con  $t_n \nearrow T$ . Como  $p \in M_T^-$  y  $t_n$  converge a  $T$ , a partir de un natural se tendrá  $p \in M_{t_n}^-$  (salvo una cantidad finita de términos, podemos suponer que lo anterior ocurre  $\forall n \in \mathbb{N}$ ). Como  $t_n \in \mathcal{A}$ ,  $S_{t_n}(p)$  ha de estar en  $\Omega$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Pero  $S_{t_n}(p) \rightarrow S_T(p)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , luego  $S_T(p) \in \bar{\Omega}$ .  $\square$

A partir del Lema 9.9 es inmediato que  $\langle N, a \rangle \geq 0$  en  $M \cap \Pi_T$ .

**Lema 9.10** *Supongamos que  $\langle N, a \rangle > 0$  en  $M \cap \Pi_T$ . Entonces,  $M_T^* \cap M_T^+ \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Como  $\langle N, a \rangle > 0$  en el compacto  $M \cap \Pi_T$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\langle N, a \rangle > 0$  en  $M \cap \{T - \varepsilon < h < T + \varepsilon\}$ . Como además  $\langle N, a \rangle > 0$  en  $M_T^-$ , deducimos que  $\langle N, a \rangle > 0$  en  $M_{T+\varepsilon}^-$ .

Tomemos ahora una sucesión  $\{t_n\}_n \subset ]T, T + \varepsilon[$  con  $t_n \searrow T$ . En particular,  $t_n \notin \mathcal{A}$ , pero como  $\langle N, a \rangle > 0$  en  $M_{t_n}^-$ , necesariamente existirá un  $\tilde{t}_n \in ]0, t_n[$  con  $S_{\tilde{t}_n}(M_{t_n}^-) \not\subset \Omega$ . De hecho,  $\tilde{t}_n \in [T, t_n[$  (porque  $T = \sup \mathcal{A}$  y por definición de  $\mathcal{A}$ ). Por tanto, encontramos un punto  $p_n \in M_{\tilde{t}_n}^-$  tal que  $p_n^* = S_{\tilde{t}_n}(p_n) \notin \Omega$ . Consideramos el segmento  $[p_n, p_n^*]$ . Si salimos de  $p_n$  a lo largo de este segmento, empezamos encontrando puntos de  $\Omega$  (porque  $p_n \in M$  y  $\langle N(p_n), a \rangle > 0$ ). Como  $p_n^* \notin \Omega$ , concluimos que existe  $x_n \in ]p_n, p_n^*[ \cap M$ . Pasando a una parcial,  $\{p_n\}_n$  convergerá a un punto  $p_\infty \in M$  y  $\lim_n p_n^* = \lim_n S_{\tilde{t}_n}(p_n) = S_T(p_\infty)$ . Como  $p_n \in M_{\tilde{t}_n}^-$ , tras paso al límite se tendrá  $p_\infty \in M_T^- \cup (M \cap \Pi_T)$ . Discutimos ahora dos posibilidades:

- $p_\infty \in M_T^-$ . En este caso,  $S_T(p_\infty)$  estará en  $M_T^*$ . Si vemos que  $S_T(p_\infty) \in \cap M_T^+$  entonces será  $S_T(p_\infty) \in M_T^* \cap M_T^+$ , luego el Lema se cumple. Como  $p_\infty \in M_T^-$ , tenemos  $\langle S_T(p_\infty), a \rangle > T$ . Por el Lema 9.9,  $M_T^* \subset \bar{\Omega}$  luego  $S_T(p_\infty) \in \bar{\Omega}$ . Como  $S_T(p_\infty)$  es límite de  $p_n^* \notin \Omega$ , deducimos que  $S_T(p_\infty) \in \mathbb{R}^3 - \bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$ . Por tanto,  $S_T(p_\infty) \in \bar{\Omega} - \Omega = \partial\Omega = M$  luego  $S_T(p_\infty) \in M_T^+$  y hemos terminado este caso.
- $p_\infty \in M \cap \Pi_T$ . En este caso debe ser  $S_T(p_\infty) = p_\infty$ , luego tanto  $p_n$  como  $p_n^* = S_{\tilde{t}_n}(p_n)$  convergen al mismo límite  $p_\infty$ . En particular, también  $x_n$  convergerá a  $p_\infty$ . Pero  $\langle N(p_\infty), a \rangle > 0$  (por hipótesis) luego  $M$  ha de ser localmente un grafo sobre  $\Pi_T$  alrededor de  $p_\infty$ , lo que contradice que  $p_n, x_n \in M$  tengan la misma proyección sobre  $\Pi_T$  pero ambos converjan a  $p_\infty$ . Por tanto, esta opción es imposible y el Lema está demostrado.  $\square$

**Lema 9.11**  $M_T^* \cap M_T^+ \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que  $M_T^* \cap M_T^+ = \emptyset$ . Por el Lema 9.10, existe  $p \in M \cap \Pi_T$  tal que  $\langle N(p), a \rangle = 0$ . Por tanto,  $T_p M$  ha de ser ortogonal a  $\Pi_T$  (aquí hemos identificado  $T_p M$  el plano tangente afín a  $M$  en  $p$ ) luego  $M$  y  $\Pi_T$  se cortan ortogonalmente en  $p$ . Consideremos ahora  $M_T^-$  y su imagen reflejada,  $M_T^*$ . Localmente alrededor de  $p$ , ambas pueden verse como superficies con borde. Dicho borde es común a ambas superficies, y consiste en una curva regular  $\gamma$  que pasa por  $p$  (la regularidad de  $\gamma$  se deduce de la transversalidad de  $T_p M$  y  $\Pi_T$ ). La aplicación de Gauss  $N^*$  de  $M_T^*$  es  $N^* = S(N^-)$ , donde  $S$  denota la parte vectorial de la reflexión en  $\Pi_T$  y  $N^-$  es la aplicación de Gauss de  $M_T^-$  (es decir,  $N^- = N|_{M_T^-}$ ). Como  $T_p M$  es ortogonal a  $\Pi_T$ , tenemos  $N(p) \in \Pi_T$  luego  $S(N(p)) = N(p)$  y por tanto,  $N^-(p) = N(p) = N^*(p)$ . En particular,  $T_p(M_T^-) = T_p(M_T^*)$ . Por otro lado, los conormales unitarios  $\eta^-, \eta^*$  exteriores a  $M_T^-$  y  $M_T^*$  a lo largo de  $M \cap \Pi_T$  son claramente opuestos y ortogonales a  $\Pi_T$ . De todo esto se deduce que

- $T_p(M_T^+) = T_p M = T_p(M_T^-) = T_p(M_T^*)$ ,
- $\eta^+(p) = -\eta^-(p) = \eta^*(p) = -a$ ,

Por último, como  $M_T^* \subset \overline{\Omega}$  tenemos que  $M_T^*$  está localmente a un lado de  $M_T^+$  alrededor de  $p$ , luego podemos aplicar el principio del máximo en la frontera ( $M_T^*$ ,  $M_T^+$  tienen la misma curvatura media), concluyendo que  $M_T^*$  coincide con  $M_T^+$  en un entorno de  $p$ . Pero esto contradice nuestra hipótesis de que  $M_T^* \cap M_T^+ = \emptyset$ .  $\square$

**Lema 9.12** *Sea  $p \in M_T^-$  tal que  $p^* = S_T(p) \in M_T^+$ . Entonces, existe un entorno  $U$  de  $p$  en  $M_T^-$  tal que  $U^* = S_T(U) \subseteq M_T^+$ .*

*Demostración.* Por el Lema 9.9,  $M_T^* \subset \overline{\Omega}$ . Como  $p^* \in M_T^* \cap M_T^+$ , concluimos que  $M_T^*$  y  $M_T^+$  son tangentes en  $p^*$  y que una superficie se queda a un lado de la otra alrededor de este punto. En particular,  $N^*(p^*) = \pm N(p^*)$ , donde  $N^* = S(N)$  es la aplicación de Gauss de  $M_T^*$  y  $S$  es la parte vectorial de la reflexión en  $\Pi_T$ .

Veamos que  $N(p^*) = N^*(p^*)$ : Recordemos que  $N$  es la aplicación de Gauss de  $M$  interior a  $\Omega$ . Si fuera  $N(p^*) = -N^*(p^*)$ , entonces cambiaríamos la aplicación de Gauss en  $M_T^*$  por  $\nu = -N^*$ , y respecto de este normal común en  $p^*$  tendríamos que  $M_T^* \geq M_T^+$ . Usando el Lema 3.18 concluiríamos que la curvatura media en  $p$  de  $M_T^*$  respecto a  $\nu$  es mayor o igual que la de  $M_T^+$  respecto a  $N$ , es decir  $-H \geq H$ . Pero  $H$  es constante positiva en  $M$ , contradicción.

Por tanto,  $N(p^*) = N^*(p^*)$  y podemos aplicar el principio del máximo interior a  $M_T^*, M_T^+$  en  $p$  (ambas superficies tienen la misma curvatura media constante respecto del mismo normal y una está a un lado de la otra alrededor de  $p$ ), y el Lema está probado.  $\square$

**Proposición 9.13** *En la situación anterior,  $M$  es simétrica respecto a  $\Pi_T$ .*

*Demostración.* Por el Lema 9.11, existe un punto  $p_0 \in M_T^-$  tal que  $p_0^* = S_T(p_0) \in M_T^+$ . Sea  $\mathcal{C}$  la componente conexa de  $p_0$  en  $M_T^-$ . Así,  $p_0 \in A := \{p \in \mathcal{C} \mid p^* \in M_T^+\}$ . Además,  $A$  es abierto en  $\mathcal{C}$  (Lema 9.12). Como  $A$  es trivialmente cerrado en  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}$  es conexo, tenemos  $A = \mathcal{C}$  luego  $\mathcal{C}^* = S_T(\mathcal{C}) \subseteq M_T^+$ . En particular,  $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^* \subset M$ .

Por otro lado,  $\mathcal{C}$  es una superficie con borde ( $\partial\mathcal{C} \neq \emptyset$  porque en caso contrario,  $\mathcal{C} = M$  luego  $M_T^+ = \emptyset$ , contradicción con el Lema 9.11),  $\mathcal{C} \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, a \rangle < T\}$  y  $\partial\mathcal{C} \subset \Pi_T$ . Por tanto, también  $\mathcal{C}^*$  es una superficie con borde,  $\mathcal{C}^* \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, a \rangle > T\}$  y  $\partial\mathcal{C}^* = \partial\mathcal{C}$ . De aquí concluimos que  $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^* \cup \partial\mathcal{C}$  es una superficie topológica, que además es de clase  $C^\infty$  salvo a lo largo de  $\partial\mathcal{C}$ .

Veamos que  $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^* \cup \partial\mathcal{C}$  es diferenciable a lo largo de  $\partial\mathcal{C}$ : dado  $q \in \partial\mathcal{C} \subset \Pi_T$ , elijamos una sucesión  $\{q_n\}_n \subset \mathcal{C}$  con  $q_n \rightarrow q$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces,  $N(q_n)$  converge a  $N(q)$  y  $q_n^* = S_T(q_n)$  converge a  $q^* = q$ . Como  $q_n^* \in \mathcal{C}^* \subset M$ , tiene sentido  $N(q_n^*)$ , que converge a  $N(q^*) = N(q)$ . Pero  $N(q_n^*) = S(N(q_n))$  (como siempre,  $S$  es la parte vectorial de  $S_T$ ), luego tomando límites  $N(q) = S(N(q))$ . Por tanto,  $N(q) \in \Pi_T$  luego  $T_q M$  es ortogonal a  $\Pi_T$ . Esto implica que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}^*$  tienen el mismo espacio tangente en  $q$ . En particular,  $\mathcal{C}^*, M_T^+$  tienen el mismo normal y conormal en  $q$ , la misma curvatura media y una está a un lado de la otra alrededor de  $q$  (porque  $M_T^* \subset \bar{\Omega}$ ), luego  $\mathcal{C}^*$  y  $M_T^+$  coinciden en un entorno de  $q$  (principio del máximo en la frontera), y  $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^* \cup \partial\mathcal{C}$  es diferenciable alrededor de  $q$ .

Por último, como  $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^* \cup \partial\mathcal{C}$  es una superficie diferenciable dentro de  $M$ , es un abierto de  $M$ . Como  $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^* \cup \partial\mathcal{C}$  es un compacto y  $M$  es conexa, debe ser  $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^* \cup \partial\mathcal{C} = M$  luego  $M$  es simétrica respecto a  $\Pi_T$ .  $\square$

*Demostración del Teorema de Alexandrov.* Dado cualquier vector  $a \in \mathbb{R}^3$  con  $\|a\| = 1$ , la Proposición 9.13 asegura que existe un plano afín ortogonal a  $a$  que es de simetría para  $M$ . Aplicando el Lema 9.6,  $M$  ha de ser una esfera.

### 9.3 Modificación del método de Alexandrov cuando $M$ tiene frontera plana.

Supongamos ahora que  $M \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq 0\}$  es una superficie conexa, compacta, embebida, no llana, con frontera no vacía  $\partial M \subset \{x_3 = 0\}$  y con curvatura media constante  $H$ . Veamos qué modificaciones hay que hacer en el método de reflexión de Alexandrov y a qué conclusiones podemos llegar.

Primero tomemos  $a = (0, 0, -1)$  como vector que defina los planos  $\Pi_t$  respecto a los que reflejaremos, que vienen dados por

$$\Pi_t = \{(x_1, x_2, -t) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}, \quad \forall t \leq 0.$$

Dado  $t < 0$ ,  $M_t^-$  es ahora la parte de  $M$  estrictamente por encima de la altura  $|t|$ ,  $M_t^+$  es la parte de  $M$  entre alturas  $|t|$  y 0 ( $M_t^+$  incluye a  $\partial M$ ) y  $M_t^*$  es la reflexión de  $M_t^-$  respecto a  $\Pi_t$ , que quedará por debajo de la altura  $|t|$ . Tomaremos como dominio interior al abierto  $\Omega$  de  $\{x_3 > 0\}$  encerrado por  $M \cup \Pi_0$  (figura 27).

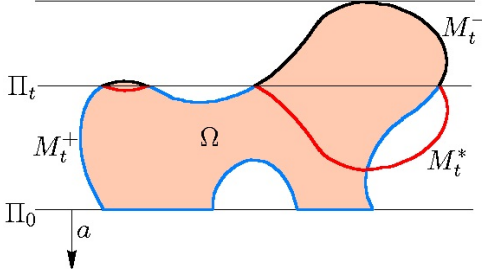


Figure 27: El caso con frontera contenida en  $\Pi_0$ .

Ahora el supremo  $t_0 = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid M = M_t^+\}$  es estrictamente negativo. El Lema 9.7 sigue siendo válido, y nos asegura que  $M \cap \Pi_{t_0} \neq \emptyset$  y que  $\forall p \in M \cap \Pi_{t_0}$ , tenemos  $N(p) = (0, 0, -1)$ . Si definimos

$$\mathcal{A} = \{t > t_0 \mid \langle N, (0, 0, -1) \rangle > 0 \text{ en } M_t^- \text{ y } M_t^* \subset \Omega \forall s \in ]t_0, t[ \},$$

entonces el Lema 9.8 se traduce en que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $]t_0, t_0 + \varepsilon[ \subset \mathcal{A}$ . De nuevo  $\mathcal{A}$  es acotado superiormente, luego tiene sentido  $T = \sup \mathcal{A}$  (y  $T$  es claramente negativo). Los Lemas 9.9, 9.10 y 9.11 (y sus demostraciones) siguen siendo válidos en esta situación, ya que la frontera de  $M$  no interviene en los razonamientos. Sin embargo, en el Lema 9.12 aparece una nueva situación: partimos de un punto  $p \in M_T^-$  tal que  $p^* = S_T(p) \in M_T^+$ . En este caso, o bien  $p^*$  es un punto interior a  $M$  (en cuyo caso la demostración sigue siendo válida) o bien  $p^* \in M_T^* \cap \partial M$ . Si se diera esto último, no podríamos aplicar ningún principio del máximo puesto que  $M_T^*$  y  $M_T^+$  no han de ser tangentes en  $p^*$ . Una forma de evitar esta posibilidad es que la distancia entre el plano de reflexión  $\Pi_T$  y el plano  $\Pi_0$  que contiene a  $\partial M$  sea estrictamente mayor que la mitad de la altura total de  $M$  sobre  $\Pi_0$ , es decir  $|T| < |t_0|/2$  (tanto  $T$  como  $t_0$  son negativos). En estas condiciones, concluiríamos que  $M$  es simétrica respecto de  $\Pi_T$  siguiendo los argumentos de la Proposición 9.13. Pero esto llevaría a que  $\partial M = \emptyset$ , imposible. Por tanto, debe cumplirse  $|T| \geq |t_0|/2$ . Pero por otro lado, es claro que  $|T|$  no puede ser estrictamente mayor que  $|t_0|/2$  (porque en tal caso  $M_T^*$  tendría puntos por debajo del plano que contiene a  $\partial M$ , luego no podría darse  $M_T^* \subset \bar{\Omega}$ , contradicción). Por tanto, necesariamente  $|T| = |t_0|/2$ .

**Corolario 9.14** *Sea  $M \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq 0\}$  es una superficie conexa, compacta, embebida, no llana, con frontera no vacía  $\partial M \subset \{x_3 = 0\}$  y con curvatura media constante  $H$ . Llamemos  $h = \max_M x_3 > 0$ . Entonces,  $M \cap \{x_3 > h/2\}$  es un grafo sobre  $\{x_3 = 0\}$ .*

*Demostración.* Por los argumentos de arriba, tenemos  $|T| = |t_0|/2 = h/2$ . Supongamos, por reducción al absurdo, que  $M \cap \{x_3 > h/2\}$  no es un grafo sobre  $\Pi_0 = \{x_3 = 0\}$ . Por tanto,

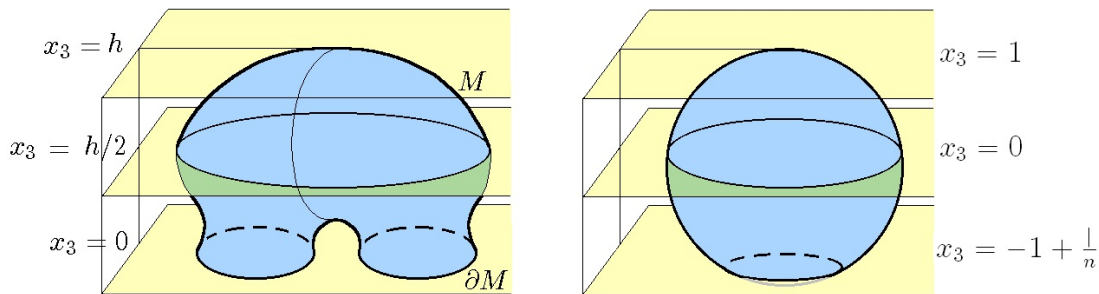


Figure 28: Izquierda:  $M \cap \{x_3 > h/2\}$  es un grafo. Derecha:  $M = \mathbb{S}^2(1) \cap \{x_3 \geq -1 + \frac{1}{n}\}$ .

existirán puntos distintos  $p, q \in M_T^-$  con la misma proyección vertical sobre  $\Pi_0$ . No perdemos generalidad suponiendo  $x_3(p) < x_3(q)$ . Tomemos el plano horizontal que pasa por el punto medio del segmento vertical  $[p, q]$ , que con la notación del método de Alexandrov es  $\Pi_t$  para  $t = -\frac{1}{2}(x_3(p) + x_3(q))$ . En particular,  $\Pi_t$  está estrictamente por encima de  $\Pi_T$ , luego  $M_t^* \subset \Omega$  (ver definición de  $\mathcal{A}$ ). Esto es imposible, ya que  $q^* = p \in M \subset \partial\Omega$ .  $\square$

**Nota 9.15** No es posible mejorar en general la cota  $h/2$  del Corolario 9.14: basta pensar en la superficie  $M_n = \mathbb{S}^2(\vec{0}, 1) \cap \{x_3 \geq -1 + \frac{1}{n}\}$ , que está en las condiciones del Corolario. La cota  $h/2$  para  $M_n$  es  $1 - \frac{1}{2n}$ , que converge a la mejor cota posible para la esfera (figura 28 derecha).

## References

- [1] S. Bernstein, *Sur un théorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique*. Comm. de la Soc. Math. de Kharkov. deuxième sér. **15** (1915-17), 38-45.
- [2] J. C. Borda, *Eclaircissement sur les méthodes de trouver les courbes qui jouissent de quelque propriété du maximum ou du minimum*. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris (1770; présentée en 1767), 551-565.
- [3] P. Collin, *Topologie et courbure des surfaces minimales proprement plongées de  $\mathbb{R}^3$* , Ann. of Math. 2nd Series **145-1** (1997) 1–31.
- [4] J. Douglas, *Solutions of the problem of Plateau*. Bull. Am. Math. Soc. **35** (1929), 292.
- [5] J. Douglas, *The problem of Plateau*. Bull. Am. Math. Soc. **39** (1933), 227-251.
- [6] A. Enneper, *Analytisch-geometrische Untersuchungen*. Z. Math. Phys. **9** (1864), 96-125.
- [7] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudeates sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Opera omnia (1) **24**, Füssli, Turici, 1952. Traducido al inglés parcialmente en D. J. Struik. *A source book in mathematics*, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1969, 399-406.
- [8] J. D. Gergonne, *Questions proposées*. Ann. Mathém. P. Appl. **7** (1816), 68, 99-100, 156.
- [9] L. Henneberg, *Über solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Kurve zur geodätischen Linie haben*. Dissertation, Zürich (1875).
- [10] L. Henneberg, *Über diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat*. Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich **21** (1876), 66–70.
- [11] S. Hildebrandt, *Maximum principles for minimal surfaces and for surfaces of continuous mean curvature*. Math. Z. **128** (1972), 253–269.
- [12] D. Hoffman, W.H. Meeks III, *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*. Inventiones Math., Vol. **101** (1990), 373-377.
- [13] D. Hoffman, W.H. Meeks III, *Embedded minimal surfaces of finite topology*. Ann. of Math., Vol. **131** (1990), 1-34.
- [14] L. Jorge, F. Xavier, *A complete minimal surface in  $\mathbb{R}^3$  between two parallel planes*. Ann. of Math. (2) 112 no.1 (1980) 203–206.

- [15] N. Kapouleas, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*. J. Differential Geometry, Vol. **47**, No. 1, (1997) 95-169.
- [16] J. L. Lagrange, *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales indéfinies*. Miscellanea Taurinensia **2** (1760-1), 173-95; *Oeuvres de Lagrange*. Vol. **1**, Gauthiers-Villars, Paris, 1867.
- [17] A. Legendre, *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles*. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, (1789), 309-51.
- [18] R. Lipschitz, *Ausdehnung der theorie der Minimalflächen*. J. r. Angew. Math. **78** (1874), 1-45.
- [19] G. Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*. Quinta edición, Bachelier, Paris, 1850.
- [20] G. Monge, *Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles*. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris (1787), 118-92.
- [21] R. Osserman, *Global properties of minimal surfaces in  $E^3$  and  $E^n$* . Ann. Math. (2) **80** (1963), 392-404.
- [22] R. Osserman, *The convex hull property of immersed manifolds*. J. Diff. Geom. **6** (1971/72), 267-270.
- [23] R. Osserman, *A survey of Minimal Surfaces*. Vol. 1, Cambridge Univ. Press, New York (1989).
- [24] T. Radó, *The problem of least area and the problem of Plateau*. Math. Z. **32** (1930) 763-796.
- [25] B. Riemann, *Über die Fläche vom Kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung*. Abh. Königl. Ges. d. Wiss. Göttingen, Mathem. Cl. **13**, 3-52 (1867) (K. Hattendorff, edit.)
- [26] H. A. Schwarz, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Vol. **1**. Springer Berlin, 1890.
- [27] J. Serret, *Sur la moindre surface comprise entre des lignes droites données, non situées dans le même plan*. Comp. Rend. Acad. Sc. **40** (1855), 1078-1083.
- [28] H. F. Scherk, *De proprietatibus superficiei, quae hac continetur aequatione  $(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$  disquisitiones analyticae*. Prize-essay. Actis Soc. Jablon. nova **4** (1832), 204-80.
- [29] H. F. Scherk, *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen*. J. r. angew. Math. **13** (1835), 185-208.



- [30] M. Traizet, *Minimal surfaces of finite total curvature*. Preprint.
- [31] M. Weber, M. Wolf, *Minimal surfaces of least total curvature and moduli spaces of plane polygonal arcs*. Geometric And Functional Analysis, **8** (1998) 1129-1170.
- [32] M. Weber, M. Wolf, *Teichmüller theory and handle addition for minimal surfaces*. Aparecerá en Annals of Math..
- [33] K. Weierstrass, *Fortsetzung der Untersuchung über die Minimalflächen*. Monatsbericht der Königl. Akademie d. Wiss., 511-518, (1887).
- [34] K. Weierstrass, *Analytische Bestimmung einfach zusammenhängender Minimalflächen, deren Begrenzung aus geradlinigen, ganz im endlichen liegenden Strecken besteht*. Math. Werke **3**, 221-238. Mayer & Müller, Berlin 1903.
- [35] F. Xavier, *Convex hulls of complete minimal surfaces*. Math. Ann. **269** no. 2 (1984) 179–182.