Trabajos por equipos:
Espacios Vectoriales Métricos Euclídeos.

1. Diagonalizar cada una de las siguientes formas cuadráticas:

   a) $F(x) = x^2 + y^2 + z^2 - (xz + xy + yz)$.
   b) $F(x) = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xz + xy + yz)$.
   c) $F(x) = 8x^2 + 6y^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz$.
   d) $F(x) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + xz$.
   e) $F(x) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4xz + 6yz + 5z^2$.
   f) $F(x) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz$.
   g) $F(x) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz - 8zx$.
   h) $F(x) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha)$.

2. Cada una de las siguientes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ define una forma cuadrática F_A sobre $\mathbb{R}^n$ mediante $F_A(x) = x^t \cdot A \cdot x$. Sea g la métrica sobre $\mathbb{R}^n$ asociada a F_A. En cada caso, clasificar g y diagonalizarla ortogonalmente:

   a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   b) $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

   c) $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   d) $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Sean B_1 y B_2 bases respectivas de espacios vectoriales V y W, y sea $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de una aplicación lineal $f\colon V \to W$ en las bases B_1 y B_2. Consideremos la aplicación $F : V \to \mathbb{R}$ dada por $F(v) = [f(v)]_{B_2}^t \cdot [f(v)]_{B_2}$.

a) ¿Cuáles son las dimensiones de V y W?

b) Probar que F es una forma cuadrática sobre V y diagonalizarla ortogonalmente.

c) Clasificar la métrica sobre V asociada a F.

4. Clasificar, según los valores de los parámetros, las métricas asociadas a las siguientes formas cuadráticas:

   a) $F(x) = x^2 + y^2 + z^2 + 2m(xy + xz)$, $m \in \mathbb{R}$.

   b) $F(x) = x^t \cdot A \cdot x$, donde $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a+c & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$, $a, c \in \mathbb{R}$.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

   a) Para $a = 3$, encontrar $P \in O(3)$ que diagonalice ortogonalmente a A.

   b) Para $a = 3$, calcular $(5A)^{10}$.

   c) Sea $F(x) = x^t \cdot A \cdot x$. Clasificar la métrica asociada a F según los valores del parámetro a.

6. Sean $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ y $B = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (0, 1, -1)\}$. Se pide:

   a) Clasificar la métrica asociada a la forma cuadrática $F(x) = (x_B)^t \cdot A \cdot (x_B)$, según los valores de a y b.

   b) Para $a = 0$ y $b = 1$, hallar una base B' tal que $F(x) = (x_{B'})^t \cdot D \cdot (x_{B'})^t$, con D diagonal.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$.

   a) ¿Para qué valores de a y de b es $F(x) = x^t \cdot A \cdot x > 0$, $\forall x \neq 0$?

   b) Si $a = -1$ y $b \in \mathbb{R}$, reducir F a una suma de cuadrados.

   c) Si $a = -1$, ¿para qué valores de b es $F(x) < 0$, $\forall x \neq 0$?

8. Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ definida positiva, y $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Si P es inversible, probar que la matriz P^tAP es definida positiva.

b) Si P es no inversible, probar que la matriz P^tAP es semidefinida positiva.

9. Sea (V, g) un EVME y $\{u_1, ..., u_k\} \subset V$ un subconjunto de vectores no nulos y ortogonales dos a dos. Probar que estos vectores son linealmente independientes.

10. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, calcular una base ortonormal a partir de los vectores $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,1,0,0)$, $v_3 = (1,1,1,0)$ y $v_4 = (1,0,0,0)$.

11. Hallar una base ortonormal del subespacio $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0\}$.

12. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, ortonormalizar siguiendo el método de Gram-Schmidt la base, $\{(1,1,1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$.

13. En $\mathbb{R}^4$, se consideran la base usual B_u , el subespacio $W = L(\{e_1, e_3\})$ y la métrica euclídea g cuya matriz es

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula una base de $(W^\perp, g)$.

b) Dado el vector $u = (1,1,1,1)$, calcula la proyección ortogonal de u en W según g.

14. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual se considera el subespacio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0,\ x - y + 3z = 0\}$. Calcular las ecuaciones cartesianas de $U^\perp$.

15. Se considera el subespacio $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$. Respecto del producto escalar usual, calcula la proyección ortogonal del vector $(0,1,1,1)$ sobre U y sobre el ortogonal de U.

16. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, se consideran los vectores $u = (2,-3,1)$, $v = (-1,1,1)$. Calcular las proyecciones ortogonales de u sobre $L(\{v\})$ y sobre $L(\{v\})^\perp$.

17. Considera en $\mathbb{R}^3$ las métricas euclídeas representadas en la base canónica por las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Para cada métrica, calcula una base ortonormal y calcula los ángulos que forman entre sí cada pareja de vectores de la base canónica.

18. Probar que toda isometría entre EVME $f\colon (V_1, g_1) \to (V_2, g_2)$ conserva ángulos. Si los EVME están orientados, ¿conserva f los ángulos orientados?

19. Clasificar las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual:

    a) $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

    b) $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (B_u es la base usual).

20. Clasificar las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual:

    a) $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    b) $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

    c) $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

    d) $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ (B_u es la base usual).

21. Sea (V, g) un EVM y B una base ordenada de V. Dado $k \in \{1, \ldots, n\}$, sea A_k el menor de $M_B(g)$ formado por las k primeras filas y columnas de A. Demuestra que g es definida negativa si y sólo si $\forall k$, $(-1)^k \det(A_k) > 0$.