

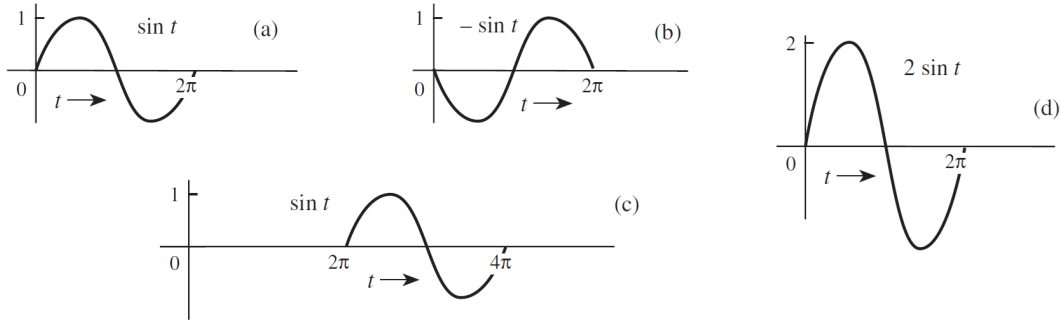
Problemas Tema 1. Fundamentos de Procesado Digital de Señales

Procesamiento de Señales Biomédicas
Universidad de Granada

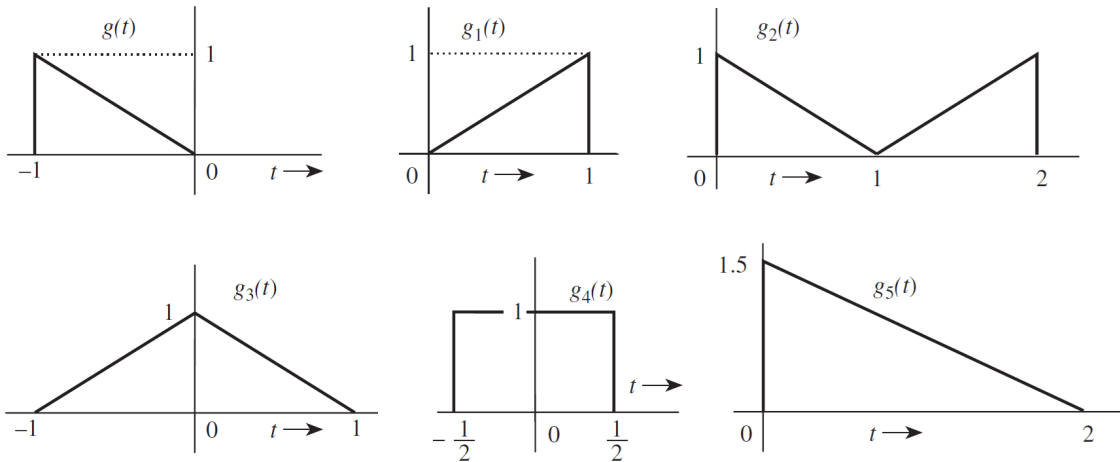
Joaquín T. Valderrama*

1. Introducción al Procesado de Señal

1. Calcula la energía de las señales mostradas en la figura. Comenta el efecto en la energía con respecto a un cambio de signo, desplazamiento en el tiempo, o duplicar la amplitud de la señal. ¿Cuál sería el efecto en la energía de la señal si esta se multiplica por k ?

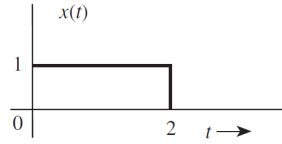


2. En la figura de abajo, la señal $g_1(t) = g(-t)$. Expresa las señales $g_2(t)$, $g_3(t)$, $g_4(t)$ y $g_5(t)$ en términos de las señales $g(t)$, $g_1(t)$, y sus versiones desplazadas en el tiempo, escaladas en el tiempo, o invertidas en el tiempo. Por ejemplo, $g_2(t) = g(t - T) + g_1(t - T)$ para un determinado valor de T . De manera similar, las señales $g_3(t)$ y $g_4(t)$ pueden expresarse como $g(t - T) + g_1(t + T)$ para un valor de T ; y $g_5(5)$ puede expresarse como $g(t)$ desplazada en el tiempo, escalada en el tiempo, y multiplicada por una constante.

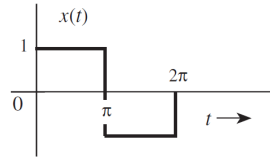
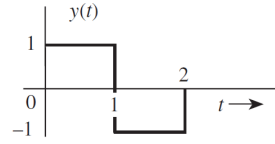


*Email: jvalderrama@ugr.es — Página web

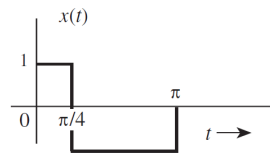
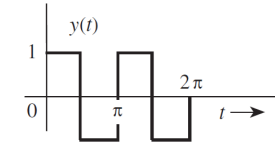
3. Considerando las señales mostradas en la figura del Problema 2, dibuja las señales (a) $x_a(t) = g(-t+1) + g(t-1)$, (b) $x_b(t) = g_2(t) + g_3(t)$ y (c) $x_c(t) = [g_5(t-1)]^2$.
4. Encuentra E_x y E_y , las energías de las señales $x(t)$ e $y(t)$ presentadas en la siguiente figura en el apartado (a). Dibuja las señales $x(t) + y(t)$ y $x(t) - y(t)$. Demuestra que las energías de estas dos señales es igual a $E_x + E_y$. Repite el proceso para el par de señales presentado en las secciones (b) y (c). En este último caso, ¿son las energías de las señales $x(t) + y(t)$ y $x(t) - y(t)$ idénticamente iguales?



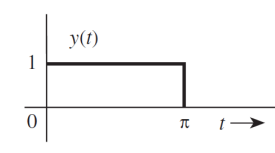
(a)



(b)

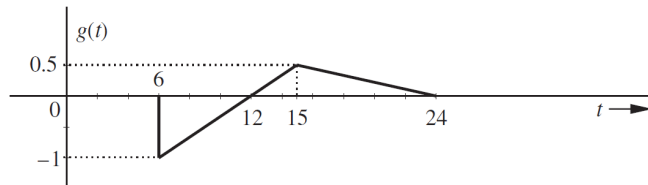


(c)



5. Para la señal $g(t)$ de la figura:

- Dibuja (a) $g(-t)$, (b) $g(t+2)$, (c) $g(-3t)$, (d) $g(t/3)$, (e) $g(2t+1)$, (f) $g[2(t+1)]$.
- Calcula la energía de las señales obtenidas en el apartado anterior.



6. Para una señal $g(t)$ con energía E_g , demuestra que la energía de cualquiera de las señales $-g(t)$, $g(-t)$ y $g(t-T)$ es E_g . Demuestra también que la energía de $g(at)$ y $g(at-b)$ es E_g/a . Esto muestra que ni la inversión en el tiempo ni el desplazamiento temporal afecta a la energía de la señal. Por otro lado, la compresión en el tiempo de una señal por un factor a reduce la energía por el factor a . (a) ¿Cuál es el efecto en la energía de una señal si la señal se expande en el tiempo en un factor a ($a > 1$)? (b) ¿Y si la señal se multiplica por una constante a ?
7. Simplifica las siguientes expresiones. *Pistas:* Utiliza la ecuación $\phi(t)\delta(t-T) = \phi(T)\delta(t-T)$. Para el apartado (f), utiliza la regla de L'Hôpital para encontrar el límite cuando $\omega \rightarrow 0$.

(a) $\left(\frac{\tan 3t}{2t^2 + 1} \right) \delta(t - \pi/4)$

(d) $\left(\frac{\sin 0.5\pi(t+2)}{t^2 - 4} \right) \delta(t - 1)$

(b) $\left(\frac{j\omega + \pi}{\omega^2 + 9\pi^2} \right) \delta(\omega + \pi)$

(e) $\left(\frac{\cos(\pi t)}{t+2} \right) \delta(2t+3)$

(c) $[e^{-t} \sin(5t - \pi/6)] \delta(t + \pi/15)$

(f) $\left(\frac{\sin^2 k\omega}{\omega^2} \right) [\delta(\omega) - \delta(\omega + \pi/2)]$

8. Evalúa las siguientes integrales:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} g(-3\tau + a)\delta(t - \tau) d\tau$

(e) $\int_{-2}^{\infty} \delta(2t + 3)e^{-4t} dt$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)g(t - \tau) d\tau$

(f) $\int_{-2}^2 (t^3 + 4)\delta(1 - t) dt$

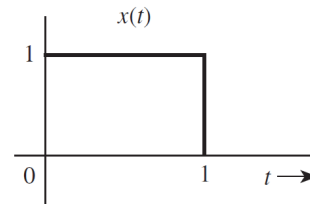
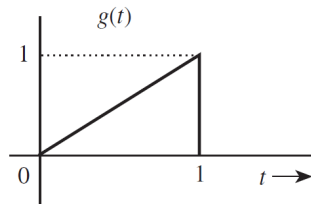
(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + 2)e^{-j\omega t} dt$

(g) $\int_{-\infty}^{\infty} g(2 - t)\delta(3 - 0.5t) dt$

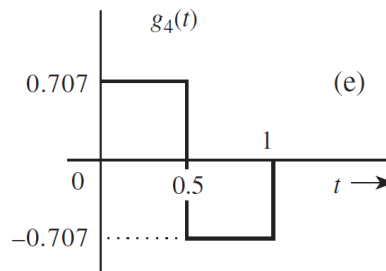
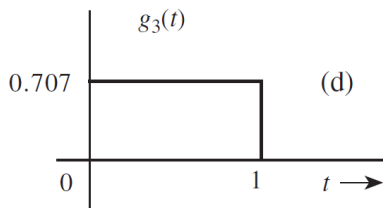
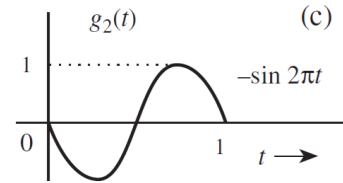
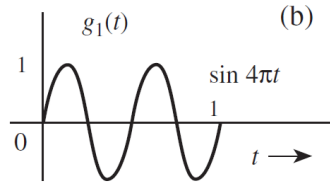
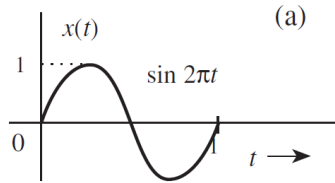
(d) $\int_{-\infty}^1 \delta(t - 2)\sin \pi t dt$

(h) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2}(x - 5)\delta(3x - 1) dx$

9. Para las señales $g(t)$ y $x(t)$ de la figura, encuentra la componente de $x(t)$ contenida en $g(t)$. En otras palabras, encuentra el valor óptimo de c que mejor aproxime $g(t) \approx cx(t)$ de manera que el error sea mínimo. ¿Cuál es la energía de la señal error?



10. Encuentra el coeficiente de correlación ρ entre la señal $x(t)$ y cada uno de los pulsos $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ and $g_4(t)$ presentados en la siguiente figura.



11. Encuentra el coeficiente de correlación ρ entre la señal $g_1(t) = u(t) - u(t - 2)$ y la señal $g_2(t) = e^{-0.5t}u(t)$.

12. Encuentra la función de autocorrelación de la señal $g(t) = e^{-2t} \cos(\pi t) u(t)$.

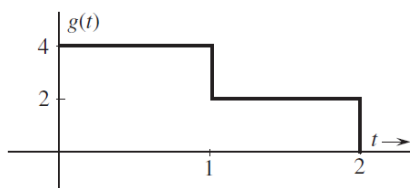
2. Transformada de Fourier

1. Calcula mediante integración directa:

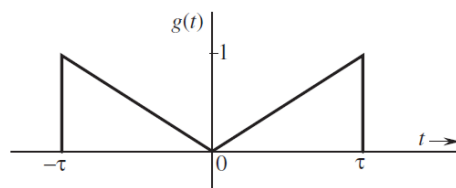
- La Transformada de Fourier $G_a(f)$ de la señal $g_a(t) = \prod(t-1) - 5e^{-2|t+3|}$.
- La Transformada de Fourier $G_b(f)$ de la señal $g_b(t) = \delta(2t-1) + 2e^{-t}u(t-1)$.
- La Transformada Inversa de Fourier $g_c(t)$ de la señal $G_c(f) = \delta(\pi f) - 2\delta(f-0.5)$.

2. Considera las señales de la figura.

- Mediante integración directa calcula la Transformada de Fourier de las dos señales.
- Calcula la Transformada de Fourier de $g(-t)$ en ambas señales.
- Compara la diferencia entre las respuestas en los apartados a) y b).

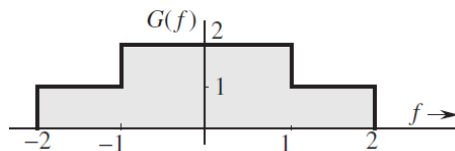


(a)



(b)

- Demuestra mediante integración directa que $\mathcal{F}^{-1}\{\Delta(f/B)\} = \frac{B}{2} \text{sinc}^2(\frac{\pi B t}{2})$.
- Calcula la Transformada Inversa de Fourier de $G(f)$ y $G(3f)$. Comenta las diferencias observadas en términos de la propiedad de escalado en el tiempo.



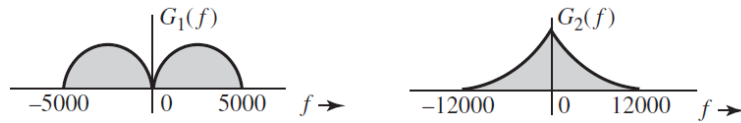
- ¿Cuál es la diferencia en el espectro de frecuencia entre la función impulso unitario $\delta(f)$ y ruido blanco Gaussiano (con espectro plano en toda la banda de frecuencias)?

3. Digitalización de señales analógicas

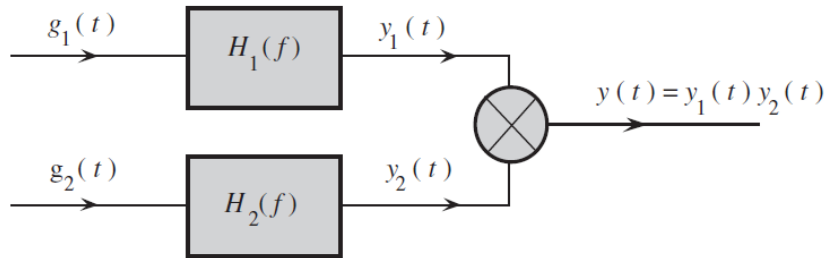
1. Determina la frecuencia de Nyquist para las siguientes señales:

- $4 \text{sinc}(420\pi t)$
- $5 \text{sinc}^2(6500\pi t)$
- $\text{sinc}(1800\pi t) + \text{sinc}^2(2000\pi t)$
- $2 \text{sinc}(500\pi t) \text{sinc}(300\pi t)$

2. La figura muestra el espectro de las señales $g_1(t)$ y $g_2(t)$. Determina la frecuencia de Nyquist para las señales $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_1^2(t)$, $g_2^m(t)$, y $g_1(t)g_2(t)$. Utiliza



3. a) Para $G_1(f)$ en el Problema 3.2, dibuja el espectro de la señal muestreada de manera ideal y uniforme utilizando una frecuencia de muestreo de $f_s = 7500$.
b) Para $G_2(f)$, dibuja el espectro de la señal muestreada de manera ideal y uniforme utilizando una frecuencia de muestreo de $f_s = 25000$.
4. Las señales $g_1(t) = 1000 \Pi(4000t)$ y $g_2(t) = 2000 \Delta(8000t)$ se les aplica los filtros paso bajo *antialiasing* $H_1(f) = \Pi(f/8000)$ y $H_2(f) = \Pi(f/5000)$. Las salidas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de estos filtros se multiplican entre sí para obtener la señal $y(t) = y_1(t)y_2(t)$. Encuentra la frecuencia de Nyquist para $y_1(t)$, $y_2(t)$, e $y(t)$.



5. Un compact disc graba señales de audio de manera digital utilizando PCM. Considérese un ancho de banda de 15 kHz.
- a) Si las muestras se cuantifican de manera uniforme con $L = 65.536$ niveles, y posteriormente se codifican de manera binaria con NBC, determina el número de bits requeridos para codificar cada muestra.
- b) Si la señal de audio tiene una potencia de 0.1 W y un voltaje de pico de 1 V, encuentra el ratio de señal frente a ruido de cuantificación (SNR) del cuantificador uniforme en el apartado anterior.
- c) Determina el número de bits por segundo requeridos para codificar la señal de audio a la frecuencia de Nyquist.
- d) Debido a las cuestiones prácticas discutidas en la sección 3.c de las diapositivas, las señales en un CD se muestrean por encima de la frecuencia de Nyquist a $f_s = 44,100$ muestras/segundo. Calcula en este caso el número de bits por segundo requeridos para codificar la señal de audio.
6. Una señal de biomédica con audio y vídeo presenta un ancho de banda de 4.5 MHz. Esta señal se muestrea, se cuantifica, y se codifica de manera binaria para obtener una señal PCM.
- a) Determina la tasa de muestreo si esta señal debe ser muestreada a una tasa de 2/9 por encima de la frecuencia de Nyquist.
- b) Si las muestras se cuantifican en 1024 niveles, determina el número de bits para codificar cada muestra.
- c) Determina la tasa binaria de pulsos en bits por segundo de la señal codificada.
7. Una señal $m(t)$ está normalizada a valores de voltage de ± 1 V, presentando una potencia promedio de 120 mW. Esta señal se cuantifica de manera uniforme y se codifica de manera binaria para obtener una señal PCM. Para conseguir una SNR de 36 dB, determina el mínimo número de bits requerido en la codificación del cuantificador uniforme.

Referencias

Modern Digital and Analogue Communication Systems, International Fifth edition (2022). Lathi B.P., Ding Z. Oxford University Press (New York, NY, USA). ISBN:9780190686864.