



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Procesamiento de Señales Biomédicas

Grado en Ingeniería Electrónica Industrial

Tema 1. Fundamentos de Procesado Digital de Señales



Joaquín T. Valderrama

Departamento de Teoría de la Señal, Telemática y Comunicaciones

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática y de Telecomunicación

Universidad de Granada

jvalderrama@ugr.es

Índice

1. Introducción al Procesado de Señal

- a. Clasificación de señales
- b. Operaciones con señales
- c. Señales básicas
- d. Señales versus vectores
- e. Correlación de señales
- f. Convolución de señales
- g. Ejercicios

2. Transformada de Fourier

- a. La Transformada de Fourier (TF)
- b. Tabla de TF típicas
- c. Propiedades de la TF
- d. Transformada Discreta de Fourier (DFT)
- e. Transformada Rápida de Fourier (FFT)
- f. Ejercicios

3. Digitalización de señales analógicas

- a. Muestreo de una señal analógica
- b. Reconstrucción de una señal digital
- c. Consideraciones prácticas
- d. Cuantificación
- e. Ejercicios

4. Diseño de filtros digitales

- a. ¿Qué es filtrar y por qué es necesario?
- b. Filtrado como sistema
- c. Transformada Z
- d. Filtros FIR vs IIR
- e. Diseño de filtros en MATLAB

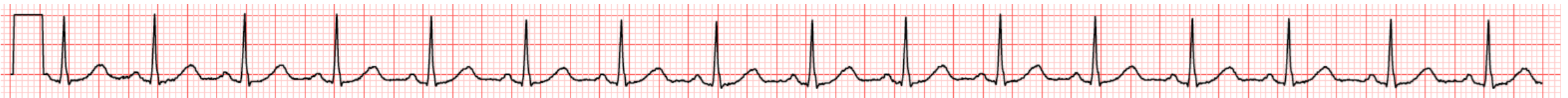
Introducción al Procesado de Señal

- a. Clasificación de señales*
- b. Operaciones con señales*
- c. Señales básicas*
- d. Señales vs. vectores*
- e. Correlación de señales*
- f. Convolución de señales*
- g. Ejercicios*

1. INTRODUCCIÓN A LAS SEÑALES

- **Señal.** Una señal es un conjunto ordenado de información o de datos. Generalmente, las señales en aplicaciones biomédicas se organizan en función del *tiempo*, aunque también pueden organizarse en función de otras variables, como el *espacio*.

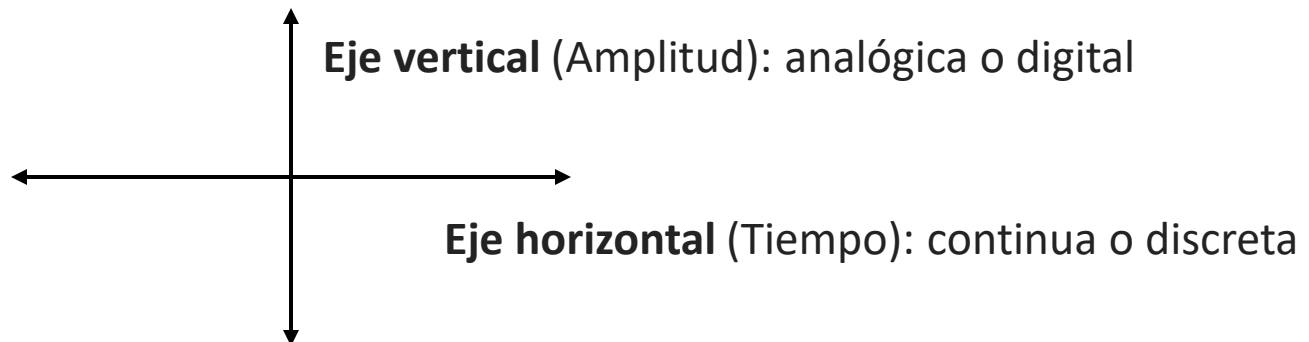
Ejemplos de señales en aplicaciones biomédicas incluyen el registro de la actividad eléctrica producida por los músculos del corazón, conocida como *electrocardiograma* (ECG, figura de abajo); y el registro de la actividad eléctrica producido por el sistema nervioso, conocido como *electroencefalograma* (EEG).



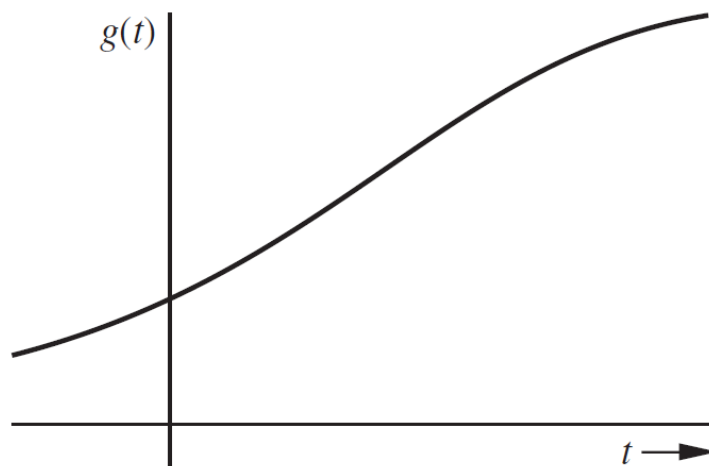
Ejemplo de electrocardiograma (ECG)

1.a. Clasificación de señales

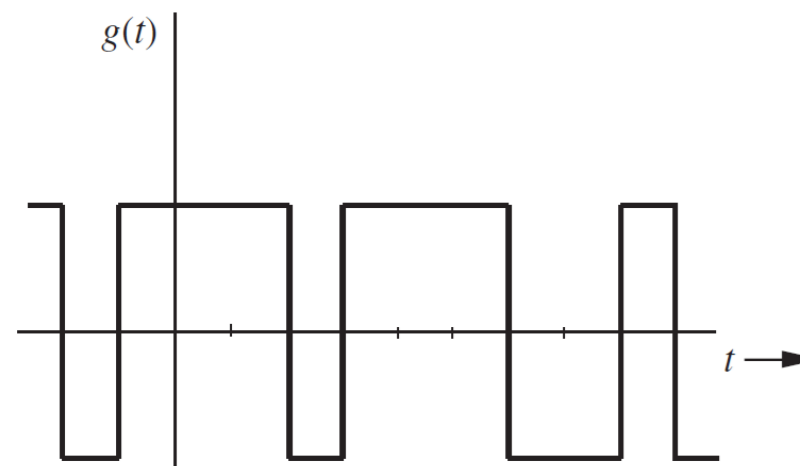
- **Continua o discreta en el tiempo.** Una señal que está definida para cualquier valor del tiempo t es una señal continua en el tiempo, mientras que una señal definida sólo en puntos discretos del tiempo $t = n \cdot T_S$ (donde T_S es el periodo de muestreo) es una señal discreta en el tiempo.
 - Señal continua en el tiempo: La temperatura registrada por un termómetro de mercurio.
 - Señal discreta en el tiempo: La temperatura mensual promedio de una región.
- **Analógica o digital.** Una señal cuya amplitud pueda estar en cualquier valor en un rango continuo es una señal analógica. Una señal digital, por otra parte, es aquella en la que la amplitud puede tomar únicamente un número finito de valores.



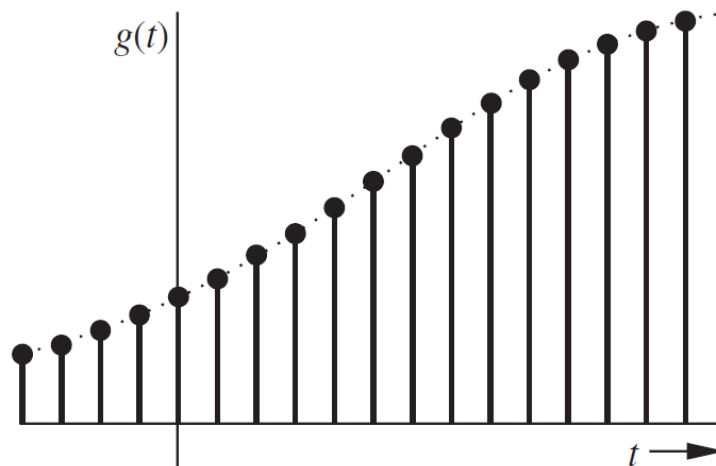
Continua y analógica



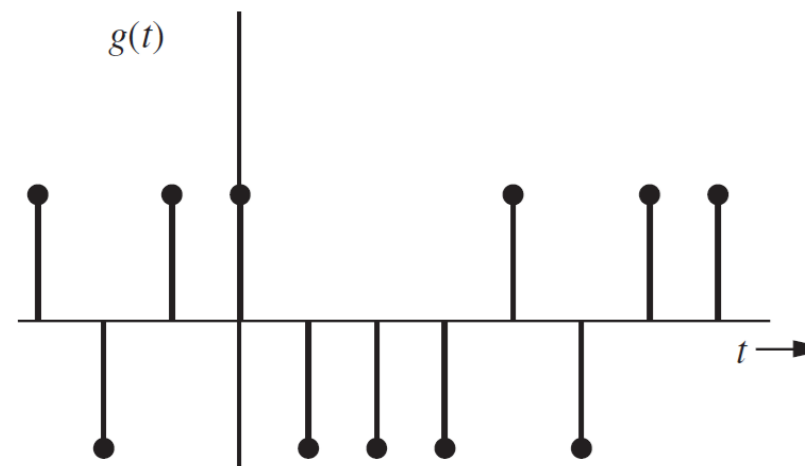
Continua y digital



Discreta y analógica



Discreta y digital



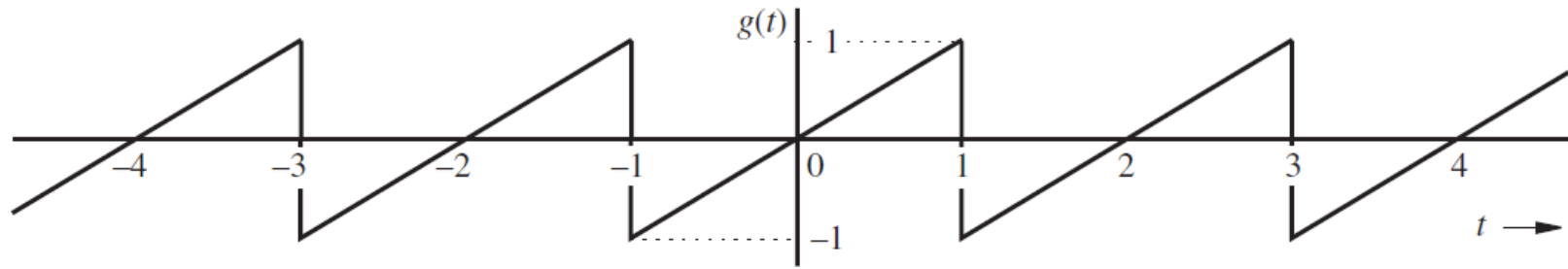
- **Periódica o aperiódica.** Una señal $g(t)$ es periódica si existe una constante positiva T_0 que satisface que $g(t) = g(t + T_0)$ para todo t .

El valor más pequeño de T_0 que cumple la condición es el *periodo* de $g(t)$.

Naturalmente, una señal es aperiódica si no cumple la condición anterior.

Por definición, una señal periódica comienza en $t = -\infty$ y termina en $t = +\infty$.

La señal de a continuación es un ejemplo de señal periódica, con periodo igual a 2.



- **Determinista o aleatoria.** Una señal cuya descripción física se conoce completamente, bien de manera matemática o gráfica, es una señal determinista. Por el contrario, una señal que se caracterice en términos probabilísticos (por ejemplo, en función de la media, del valor RMS, de la desviación estándar, o su función de probabilidad) será una señal aleatoria.

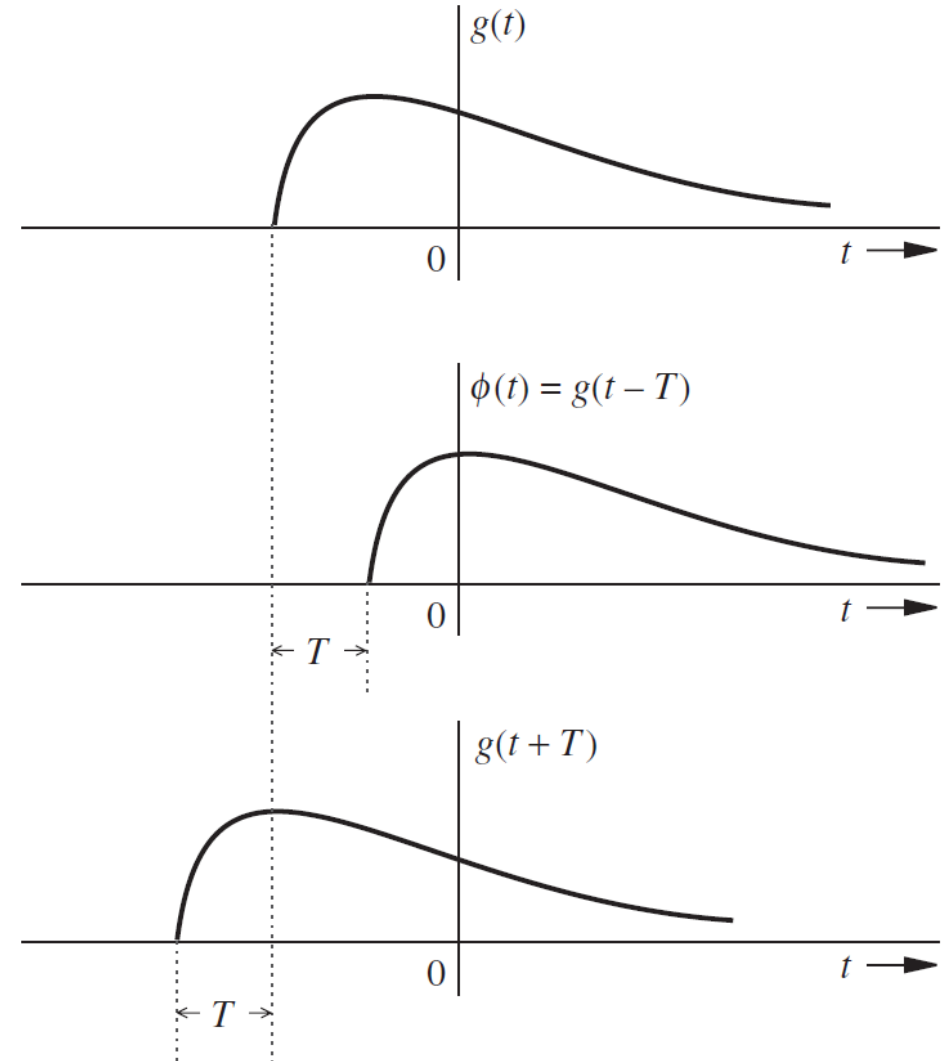
1.b. Operaciones con señales

- **Desplazamiento temporal.** Considera la señal $g(t)$ y la misma señal desplazada T segundos, representado por $\varphi(t)$.

$$\varphi(t + T) = g(t) \rightarrow \varphi(t) = g(t - T)$$

Para desplazar una señal por T , sustituimos t por $t - T$. Por lo tanto, $g(t - T)$ representa $g(t)$ desplazada T segundos.

Si T es positivo, el desplazamiento es hacia la derecha (la señal se retrasa). Si T es negativo, la señal se desplaza hacia la izquierda (se adelanta).



- **Escalado en el tiempo.** Se refiere a la compresión o expansión de una señal en el tiempo.

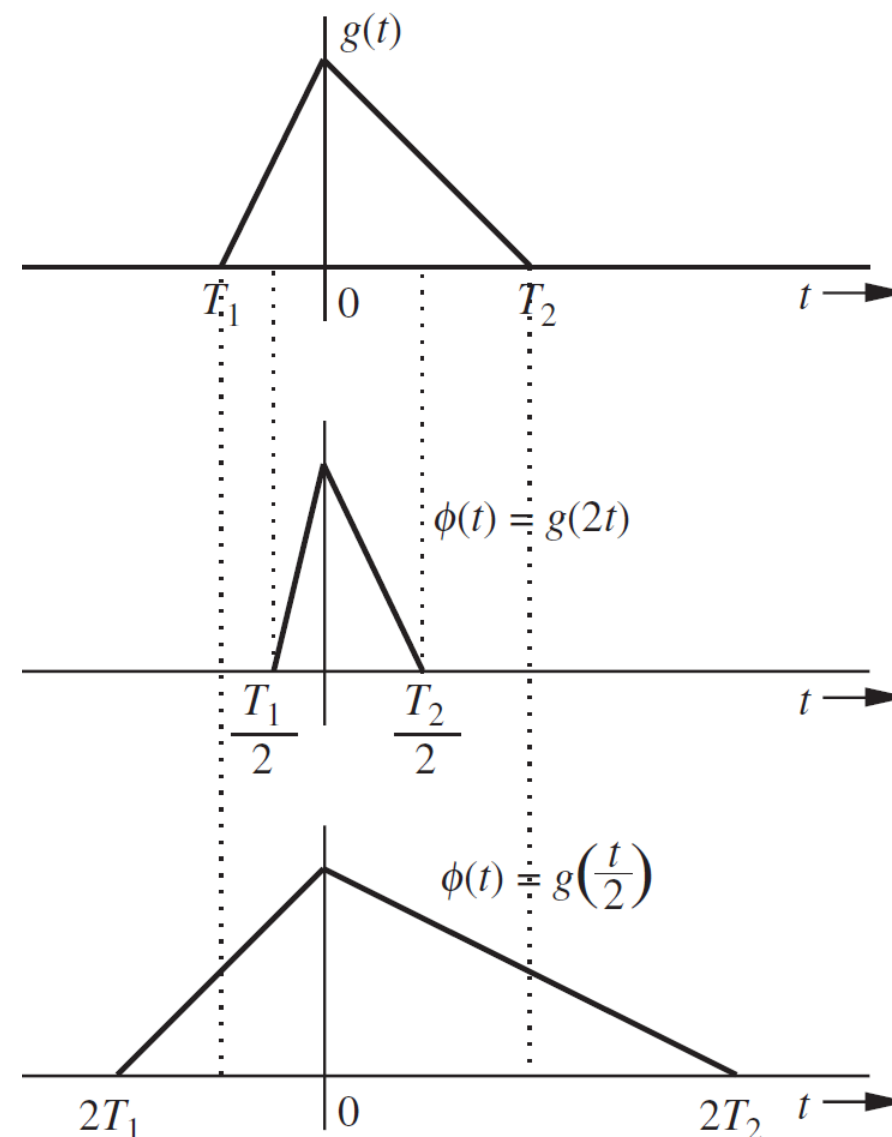
La señal $\varphi(t)$ en la segunda figura representa la señal $g(t)$ comprimida por un factor 2. $\varphi(t)$ sería equivalente a reproducir la pista de audio $g(t)$ al doble de su velocidad de grabación.

En general, lo que ocurra en $g(t)$ en un instante t ocurrirá en $\varphi(t)$ en el instante $t/2$, por lo que:

$$\varphi(t/2) = g(t) \rightarrow \varphi(t) = g(2t)$$

Podemos utilizar un argumento similar para mostrar que $g(t)$ expandida en el tiempo (reproducida a una velocidad más lenta) por un factor a vendría dado por:

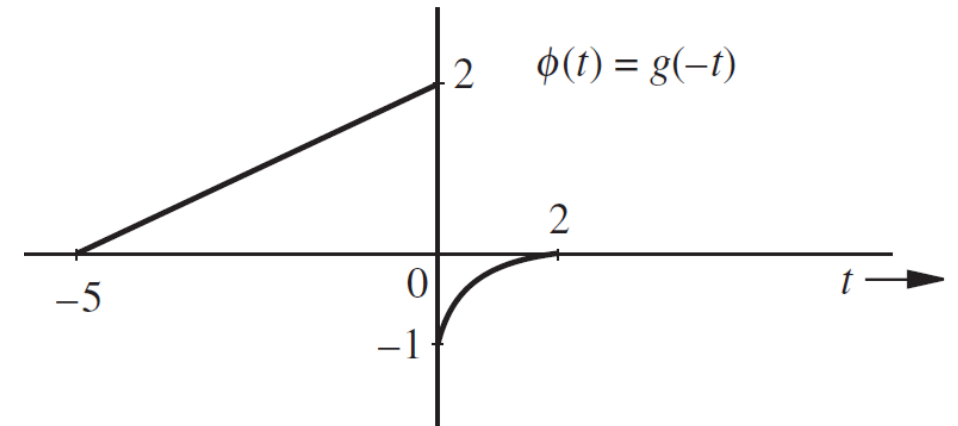
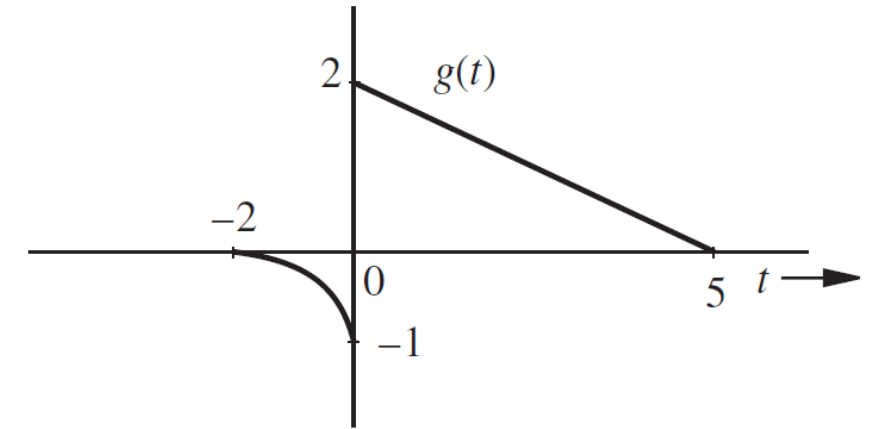
$$\varphi(t) = g(t/a)$$



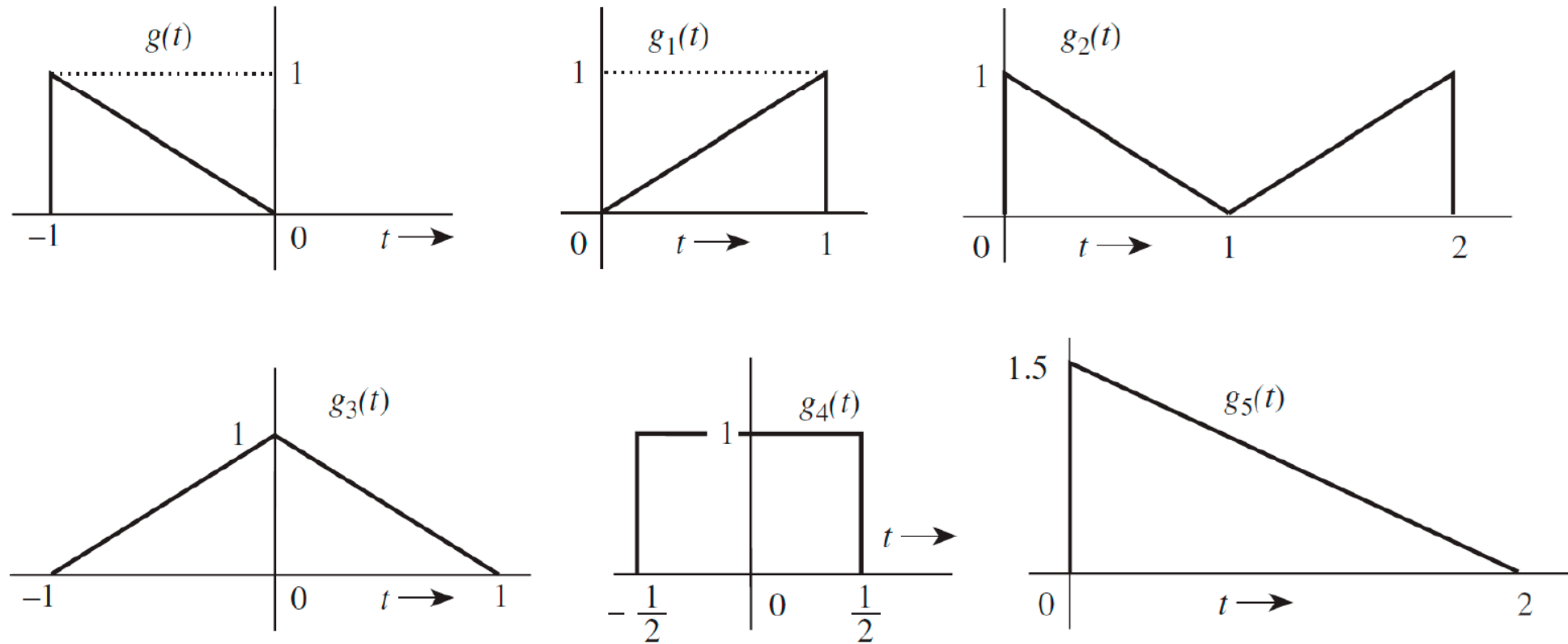
- **Inversión en el tiempo.** Puede considerarse como un caso particular de escalado en el tiempo cuando $a = -1$.

Invertir la señal $g(t)$ consiste en rotar la señal 180° sobre el eje vertical. $\varphi(t)$ representa por tanto la versión de $g(t)$ volteada sobre el eje vertical. Lo que ocurre en $g(t)$ en el instante t , ocurre en $\varphi(t)$ en el instante $-t$, es decir:

$$\varphi(-t) = g(t) \rightarrow \varphi(t) = g(-t)$$



2. En la figura de abajo, la señal $g_1(t) = g(-t)$. Expresa las señales $g_2(t)$, $g_3(t)$, $g_4(t)$ y $g_5(t)$ en términos de las señales $g(t)$, $g_1(t)$, y sus versiones desplazadas en el tiempo, escaladas en el tiempo, o invertidas en el tiempo. Por ejemplo, $g_2(t) = g(t - T) + g_1(t - T)$ para un determinado valor de T . De manera similar, las señales $g_3(t)$ y $g_4(t)$ pueden expresarse como $g(t - T) + g_1(t + T)$ para un valor de T ; y $g_5(t)$ puede expresarse como $g(t)$ desplazada en el tiempo, escalada en el tiempo, y multiplicada por una constante.



1.c. Señales básicas

- **Función impulso unitario.** La función $\delta(t)$ fue definida por Paul A. M. Dirac (por lo que también se la conoce como Delta de Dirac) como:

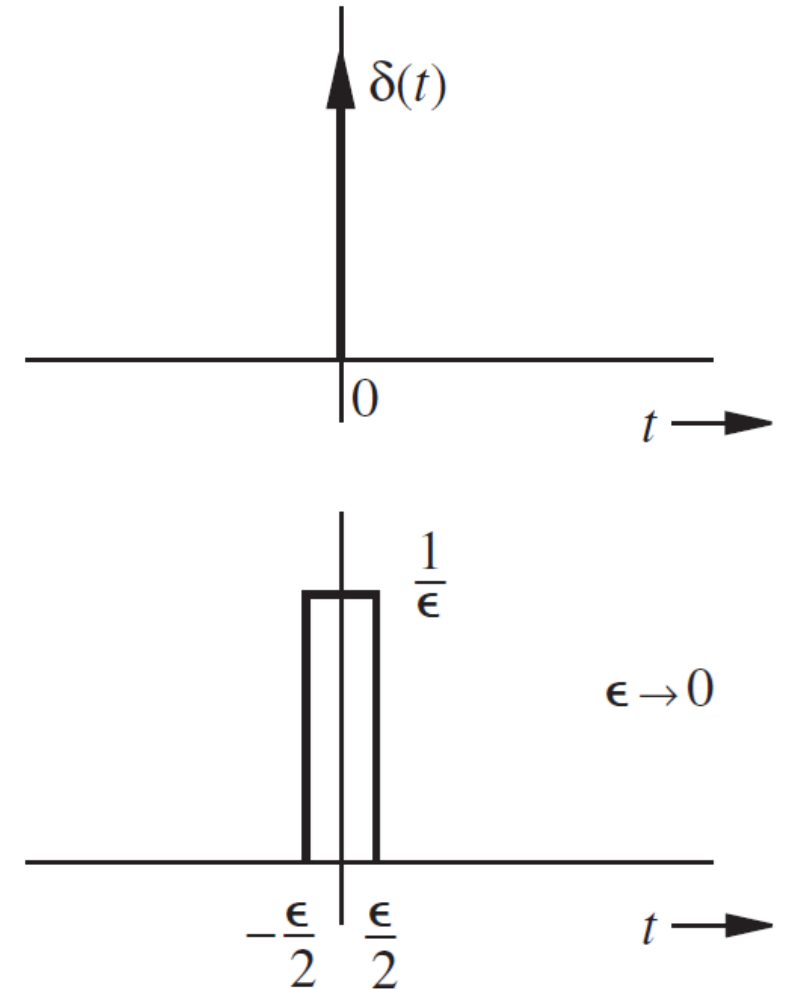
$$\delta(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

El impulso unitario puede visualizarse como un pulso rectangular de anchura infinitésimamente pequeña, de altura infinitamente alta, y de área la unidad.

Multiplicación de una función $\varphi(t)$ por un impulso $\delta(t)$

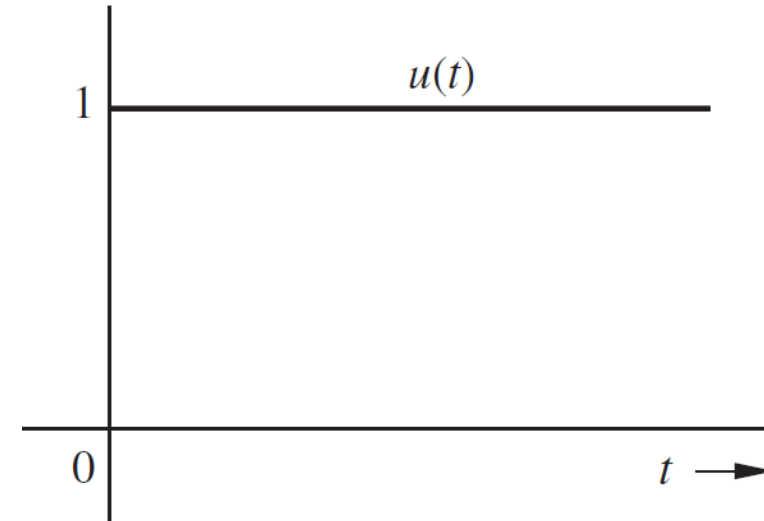
$$\varphi(t)\delta(t) = \varphi(0)\delta(t)$$

$$\varphi(t)\delta(t - T) = \varphi(T)\delta(t - T)$$



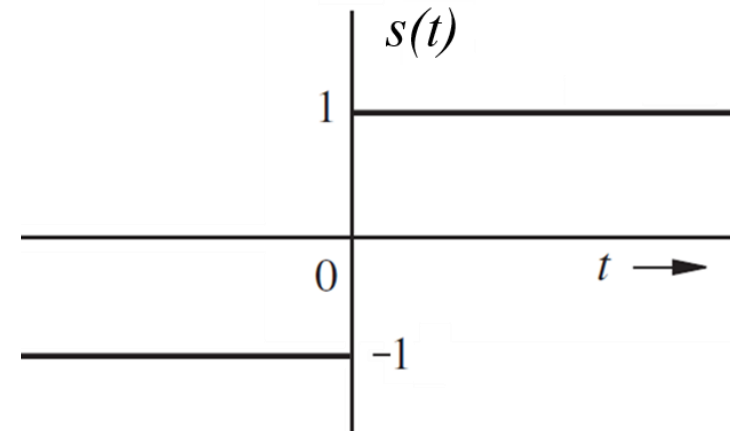
- **Función escalón.**

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



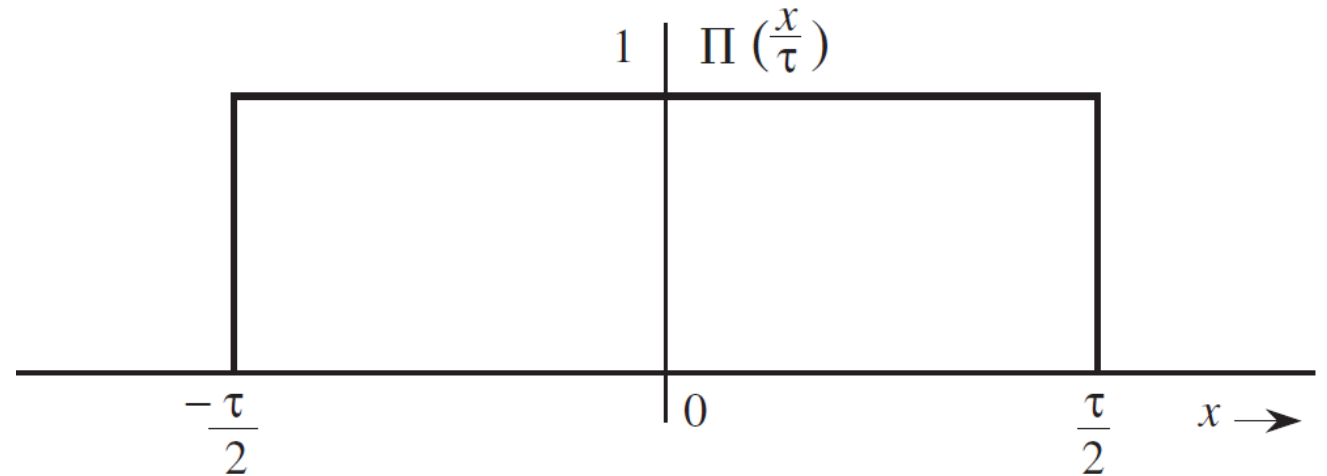
- **Función signo.**

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



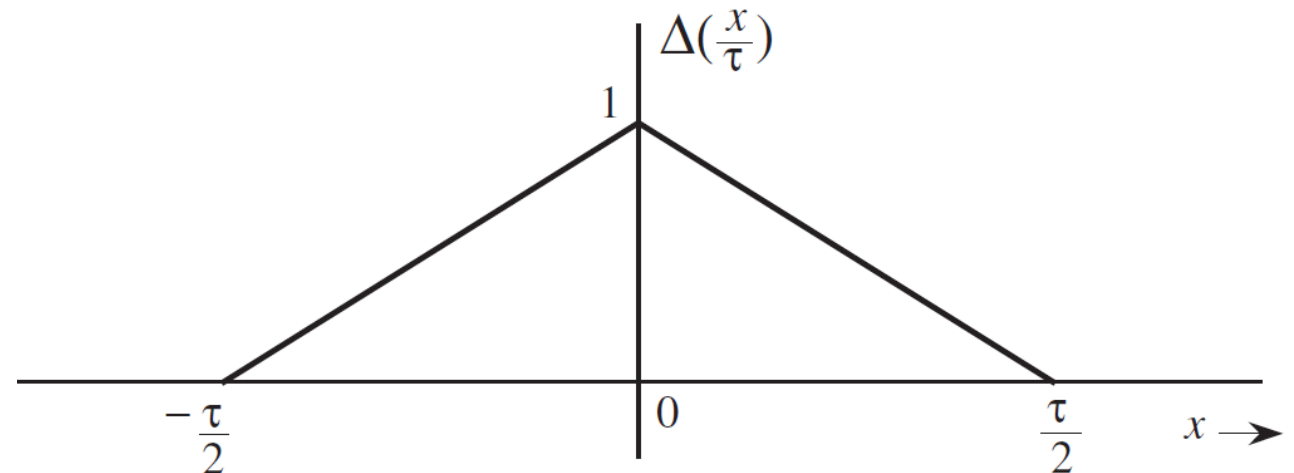
- **Función pulso rectangular.**

$$\Pi(x/\tau) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \tau/2 \\ 0 & |x| > \tau/2 \end{cases}$$



- **Función pulso triangular.**

$$\Delta(x/\tau) = \begin{cases} 1 - 2|x|/\tau & |x| \leq \tau/2 \\ 0 & |x| > \tau/2 \end{cases}$$



- **Función $\text{sinc}(x)$.** Juega un papel muy importante en el procesamiento de señal, y se define

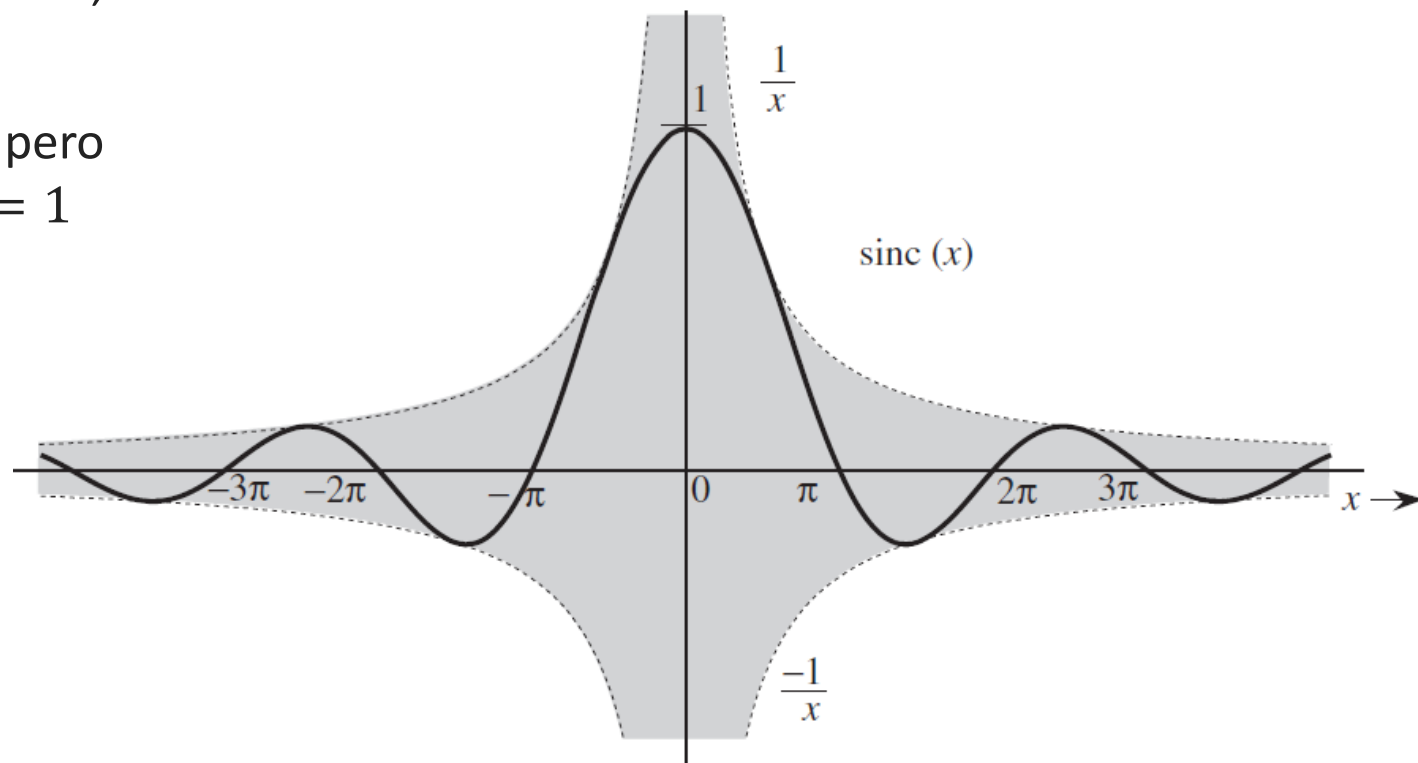
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad \text{sinc}_N(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

- Función par, definida entre $-\infty$ y $+\infty$
- $\text{sinc}(x) = 0$ cuando $\sin(x) = 0$, es decir, cuando $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$
- En $x = 0$, $\text{sinc}(x)$ es indeterminada, pero utilizando la regla de l'Hôpital $\rightarrow \text{sinc}(0) = 1$

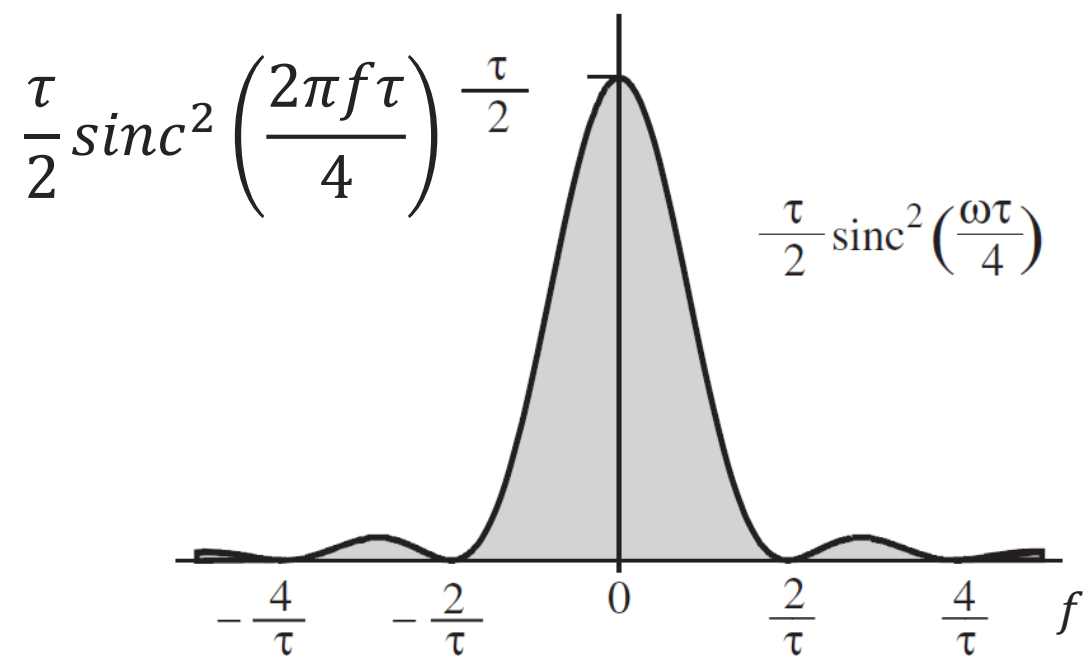
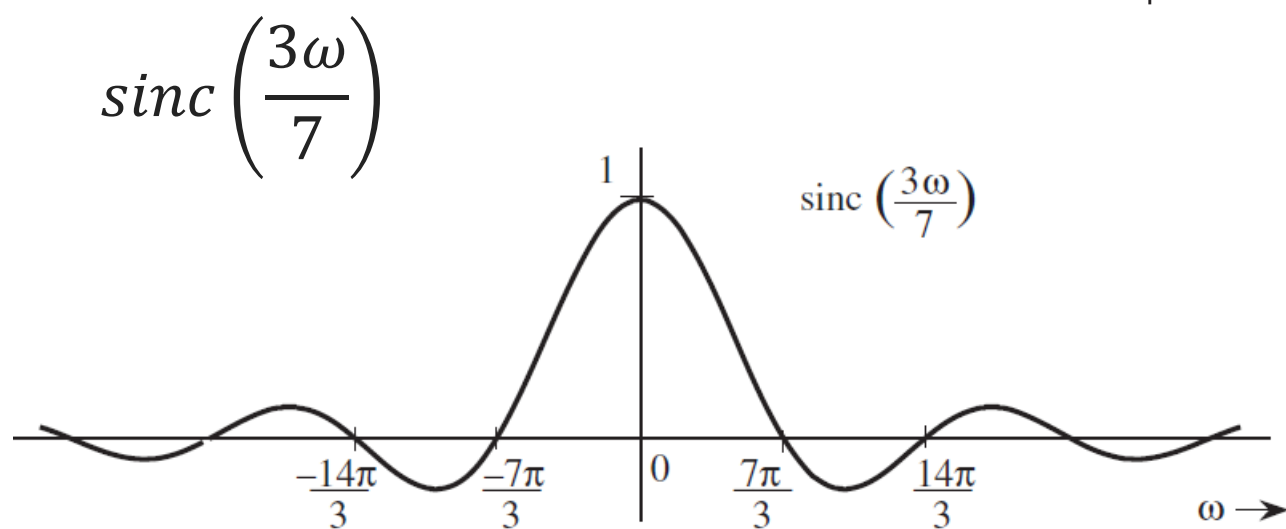
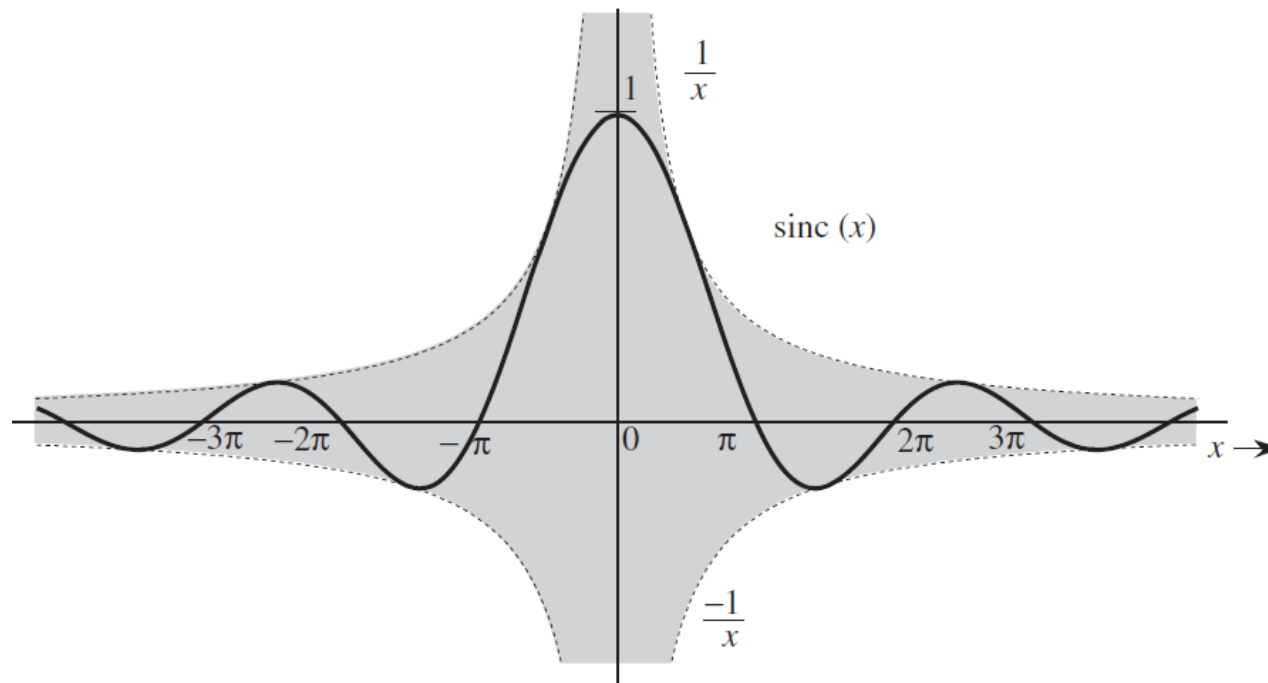
Regla de l'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow (\text{l'Hôpital}) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$



Dibuja

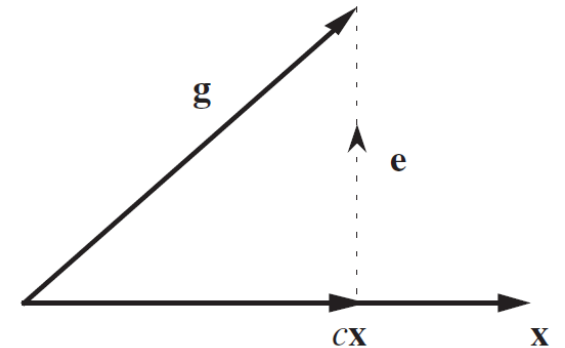


1.d. Señales vs. vectores

- Una señal $g(t)$ definida en un intervalo $[a, b]$ mediante número finito N de instantes de tiempo puede representarse como un vector $\mathbf{g}$, que tendrá dimensión N .

$$\mathbf{g} = [g(t_1) \quad g(t_2) \quad \dots \quad g(t_N)] \qquad t_1 = a, \quad t_2 = a + \epsilon, \quad t_3 = a + 2\epsilon, \quad \dots \quad t_N = a + (N - 1)\epsilon = b$$

- Un vector tiene magnitud y dirección. En un espacio vectorial, se define el **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{g}$ y $\mathbf{x}$ como: $\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{g}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cos \theta$.
- La **norma** de un vector es $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$
- Y su **energía** puede calcularse como $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$
- Los vectores $\mathbf{g}$ y $\mathbf{x}$ son **ortogonales** si $\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = 0$
- La **proyección** de $\mathbf{g}$ sobre $\mathbf{x}$ se obtiene como: $c = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}$

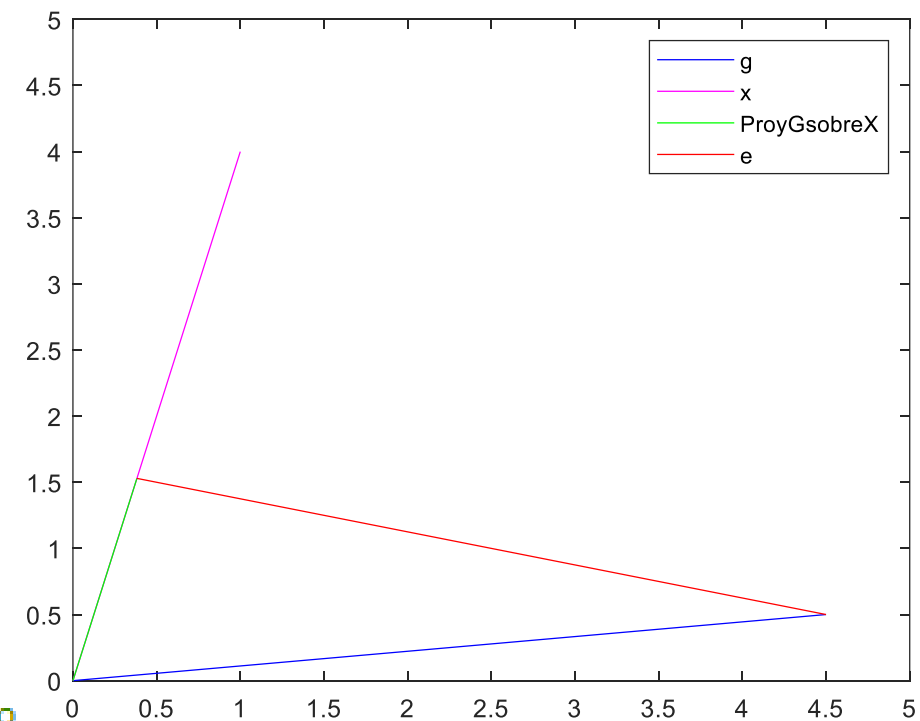


■ Ejercicio en MATLAB / GNU Octave

- Crea dos vectores $\mathbf{g}$ y $\mathbf{x}$ de dimensión 2.
- Calcula el vector resultante de proyectar $\mathbf{g}$ sobre $\mathbf{x}$ (utiliza la función *dot* para realizar el producto escalar).
- Calcula el vector error ($\mathbf{e}$).
- Representa todos vectores.
- Verifica que los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{e}$ son ortogonales.

```
%% Sección 1.d. Señales versus vectores
```

```
clear,clc                                % Reseteamos MATLAB
g = [4.5,0.5];                           % Vector g
x = [1,4];                               % Vector x
c = dot(g,x)/dot(x,x);                   % Factor de escala que minimiza el error
ProyGsobreX = c*x;                       % Proyección de g sobre x
e = g-ProyGsobreX;                       % Vector error
clf(figure(1)),hold on,box on             % Abrimos la figura 1
plot([0,g(1)],[0,g(2)],'b')              % Vector g en azul
plot([0,x(1)],[0,x(2)],'m')              % Vector x en magenta
plot([0,ProyGsobreX(1)],[0,ProyGsobreX(2)],'g') % Proyección en verde
plot([g(1),ProyGsobreX(1)],[g(2),ProyGsobreX(2)],'r') % Vector e en rojo
axis([0 5 0 5])                          % Fijamos el eje de la representación
legend('g','x','ProyGsobreX','e')         % Leyenda
fprintf(sprintf('El producto escalar entre x y e es: %1.6g\n',dot(x,e)))
```



- El **producto escalar** de dos señales continuas en el intervalo $[t_1, t_2]$ es:

$$\langle g(t), x(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt$$

- La **energía** de una señal continua en el intervalo $[t_1, t_2]$ es:

$$E_g = \langle g(t), g(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} g^2(t) dt$$

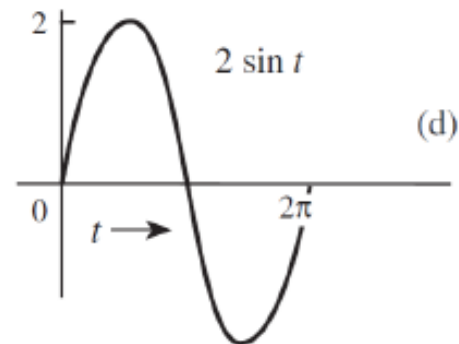
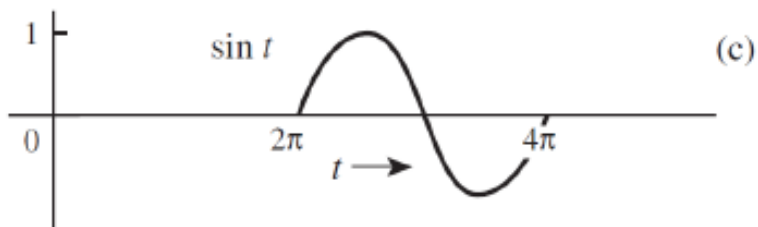
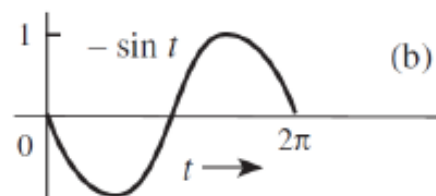
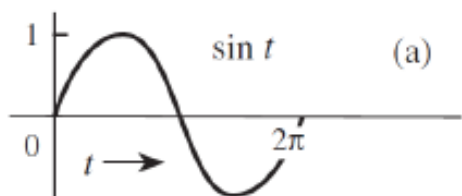
- La **norma** de una señal continua viene dada por:

$$\|g(t)\| = \sqrt{\langle g(t), g(t) \rangle}$$

- El valor de c que minimiza el error entre dos señales es:

$$c = \frac{\langle g(t), x(t) \rangle}{\langle x(t), x(t) \rangle} = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt$$

1. Calcula la energía de las señales mostradas en la figura. Comenta el efecto en la energía con respecto a un cambio de signo, desplazamiento en el tiempo, o duplicar la amplitud de la señal. ¿Cuál sería el efecto en la energía de la señal si esta se multiplica por k ?



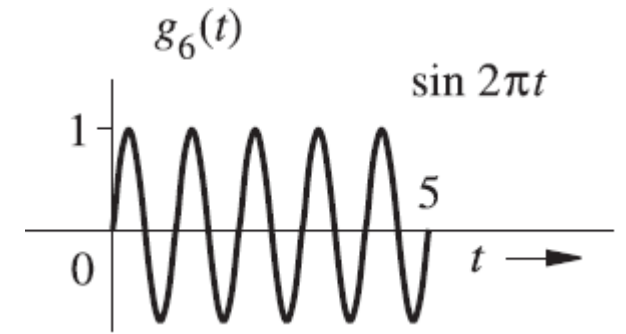
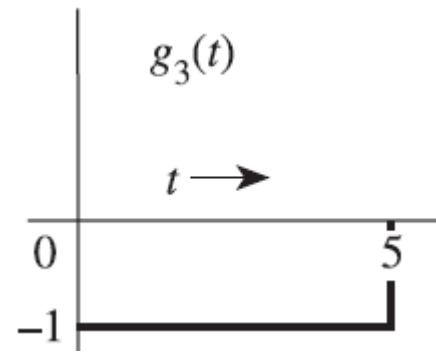
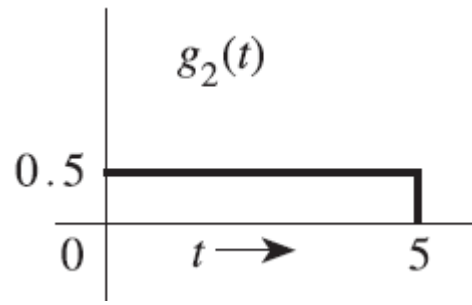
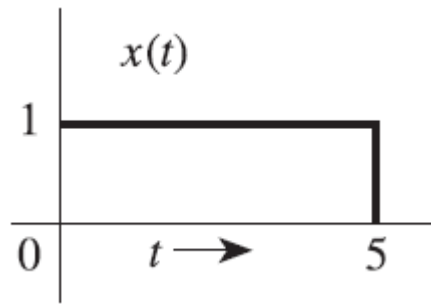
1.e. Correlación de señales

- ¿Podemos utilizar $c = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ para medir el grado de similitud entre dos señales?
- Un indicador independiente de la norma de los vectores reside en el ángulo θ entre los vectores, y el grado de similitud puede medirse en términos del $\cos \theta$.

$$\rho = \cos \theta = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{g}\| \|\mathbf{x}\|}$$

- ρ es el **coeficiente de correlación**, y se observa que $|\rho| \leq 1$.
- De manera equivalente para dos señales reales:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_g E_x}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)x(t) dt$$



- Calcula el coeficiente de correlación ρ entre $x(t)$ y las señales $g_2(t)$, $g_3(t)$ y $g_6(t)$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_x E_g}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g(t) dt$$

$$a) \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{(5)(1.25)}} \int_0^5 (0.5) dt = 1$$

$$b) \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{(5)(5)}} \int_0^5 (-1) dt = -1$$

$$c) \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{(5)(2.5)}} \int_0^5 \sin(2\pi t) dt = 0$$

$$E_x = \int_0^5 x^2(t) dt = \int_0^5 dt = 5$$

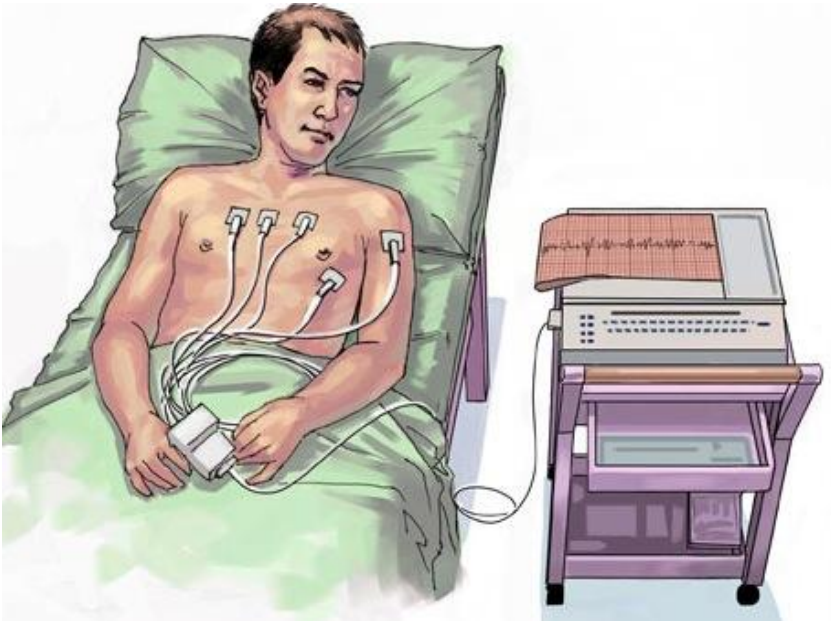
$$E_{g_6} = \int_0^5 \sin^2 2\pi t dt = 2.5$$

- **Correlación cruzada** entre dos señales:

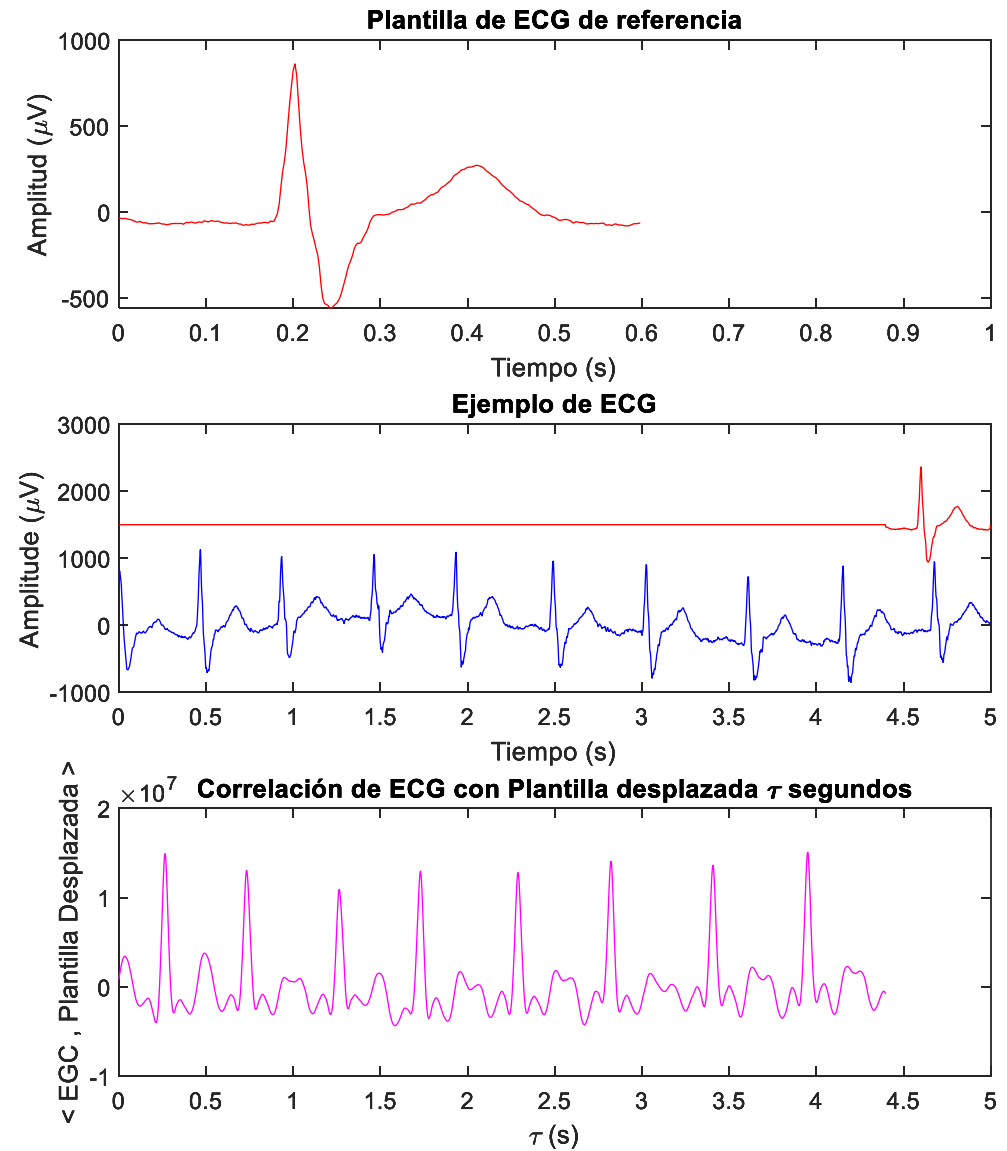
$$\psi_{zg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)g(t + \tau) dt$$

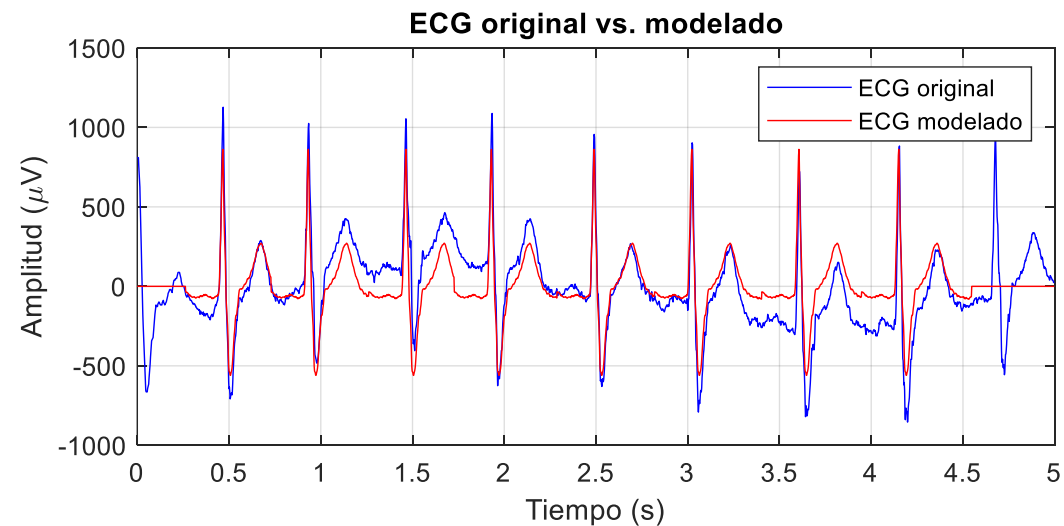
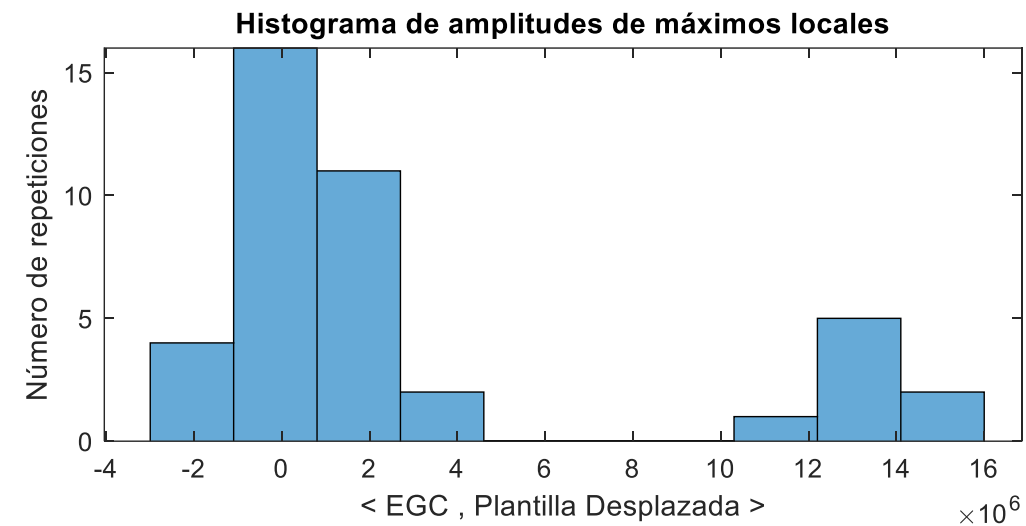
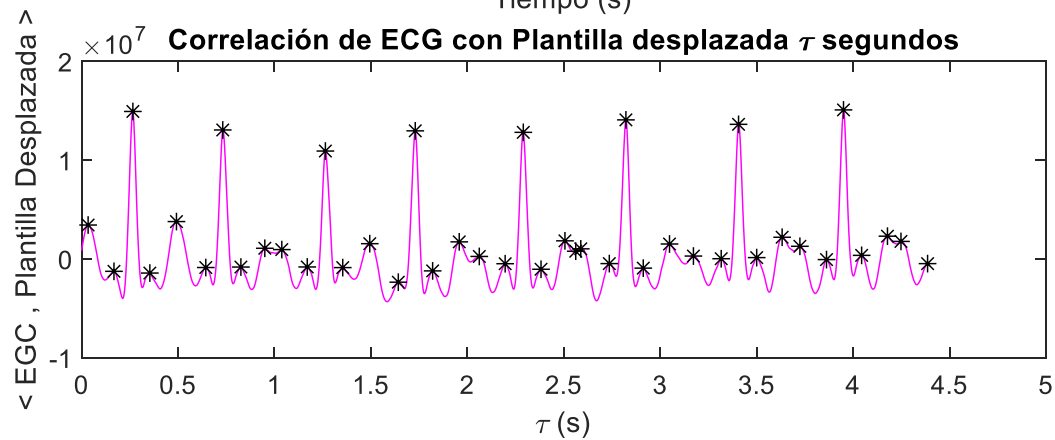
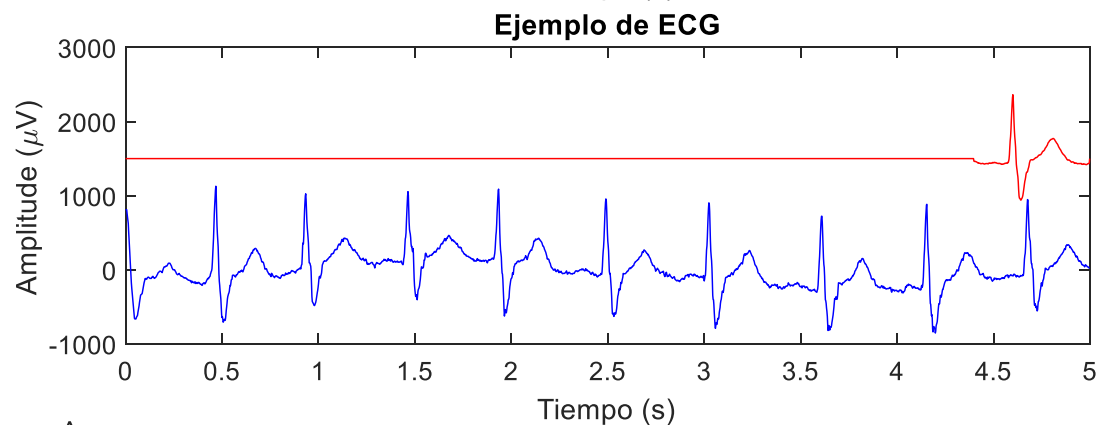
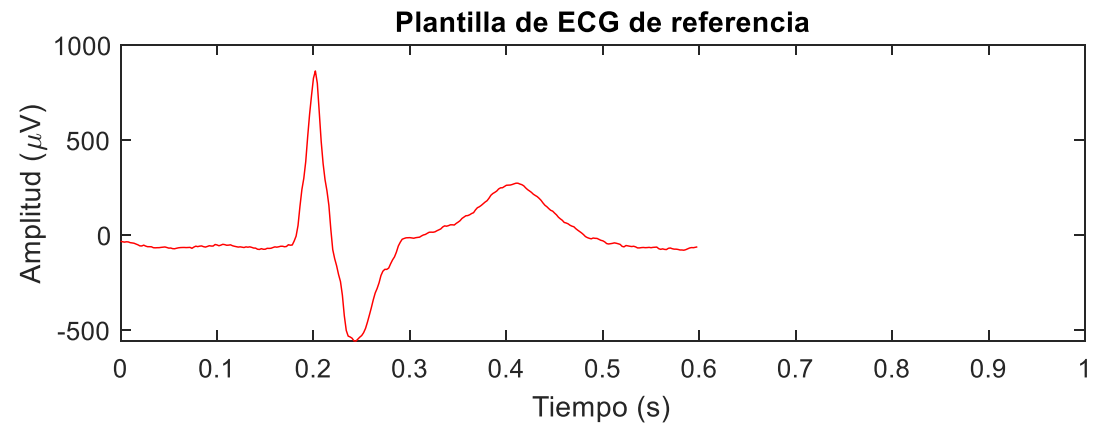
- **Autocorrelación:**

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t + \tau) dt$$



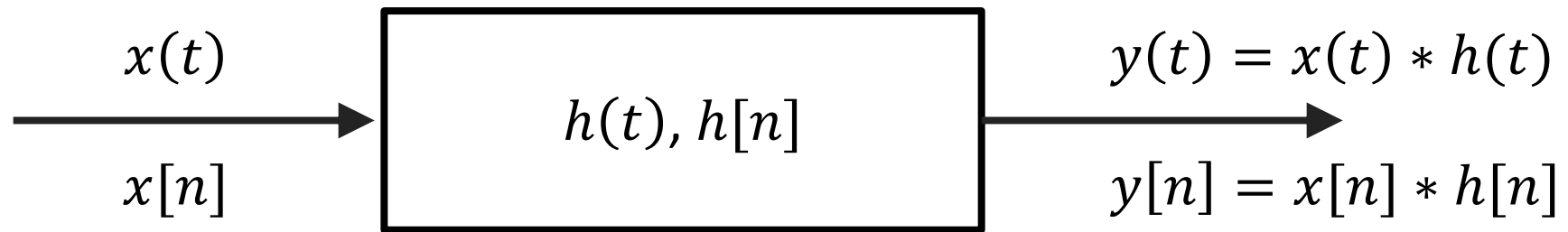
Aplicación en el campo del PSB





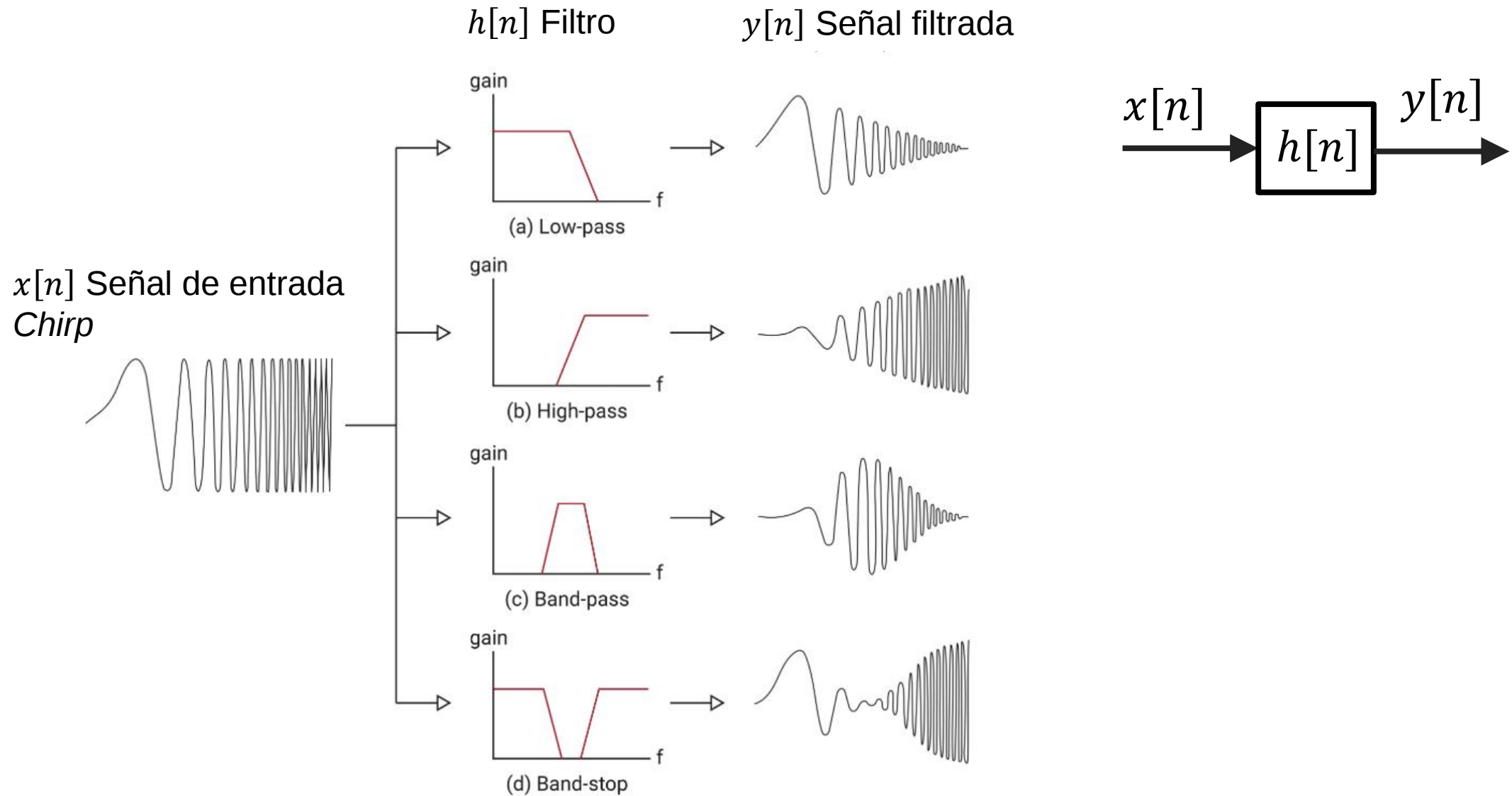
1.f. Convolución de señales

- La convolución es una operación matemática que combina dos señales para generar una función que representa cómo interactúan las dos funciones originales entre sí.
- La convolución juega un papel fundamental en el procesamiento de señal, porque permite diseñar y estudiar sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI).

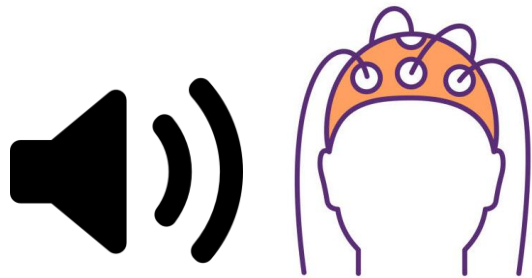
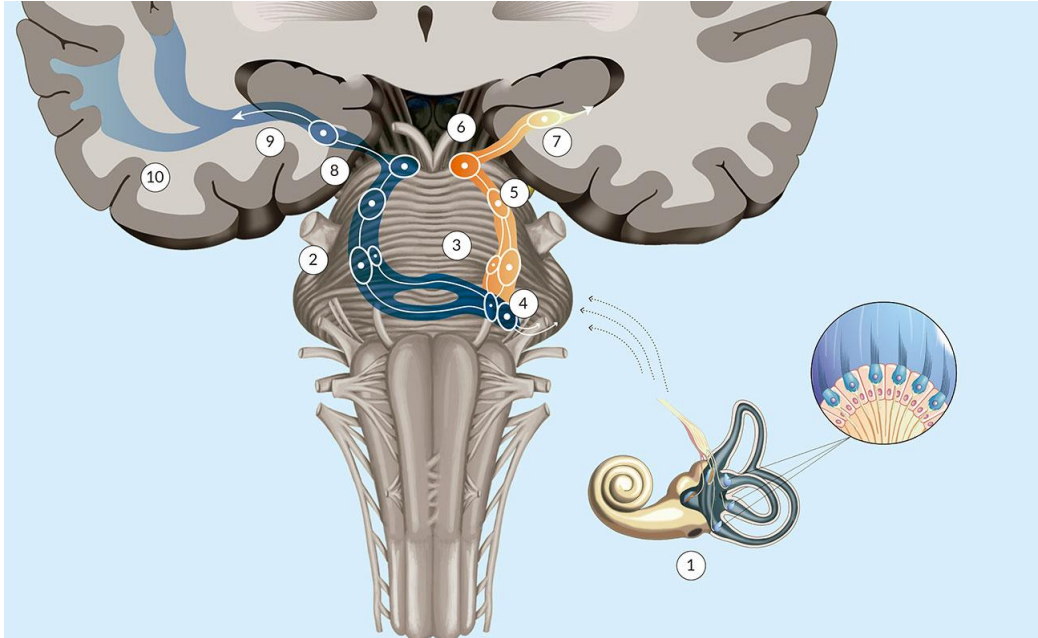
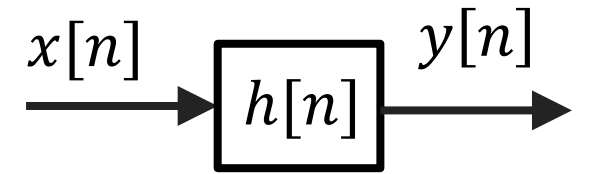


- Diseño e implementación de **filtros**.
- Predecir la salida** si conocemos la entrada y tenemos caracterizado el sistema (filtro).
- Estimar el sistema** si conocemos la entrada y la salida.

- Predecir la salida si conocemos la entrada y el sistema.



- Estimar el sistema si conocemos la entrada y la salida.

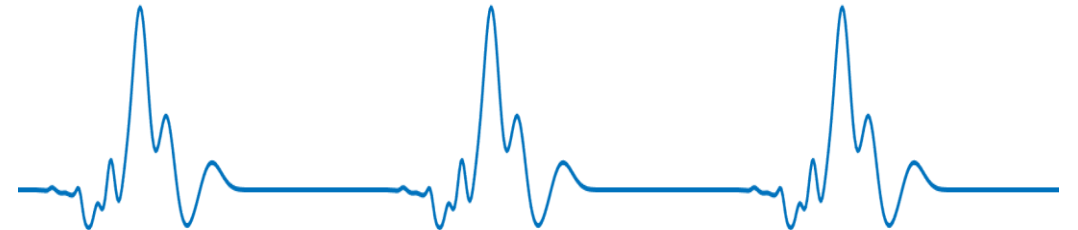


$$y[n] = x[n] * h[n] + \text{Noise}[n]$$

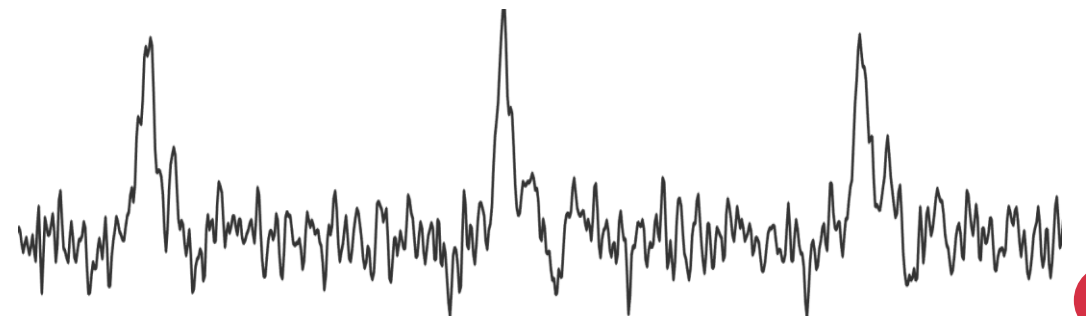
$x[n]$ Estímulo auditivo: tren de clics (impulsos)



$h[n]$ Respuesta neuronal desconocida a estimar



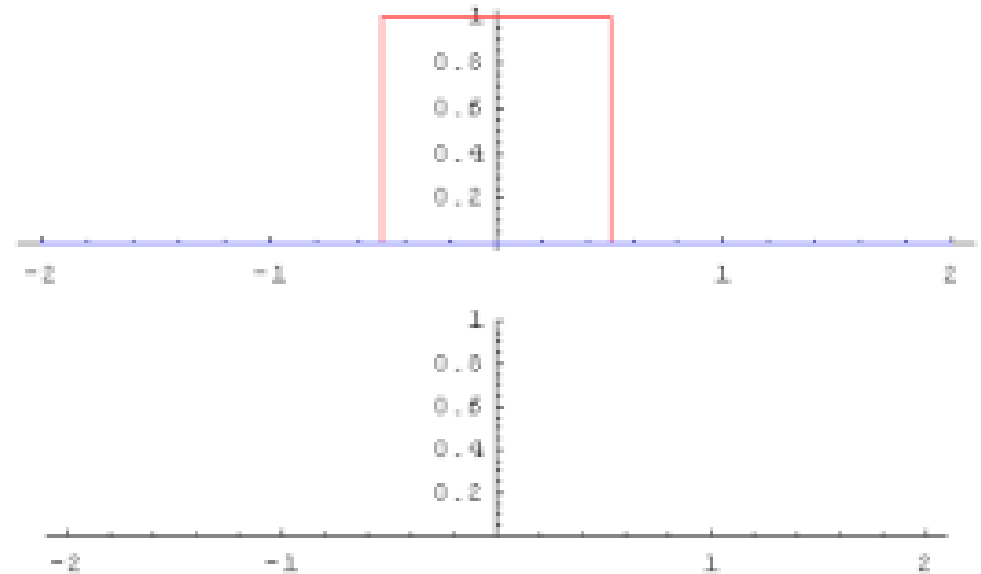
$y[n]$ Electroencefalograma (EEG)

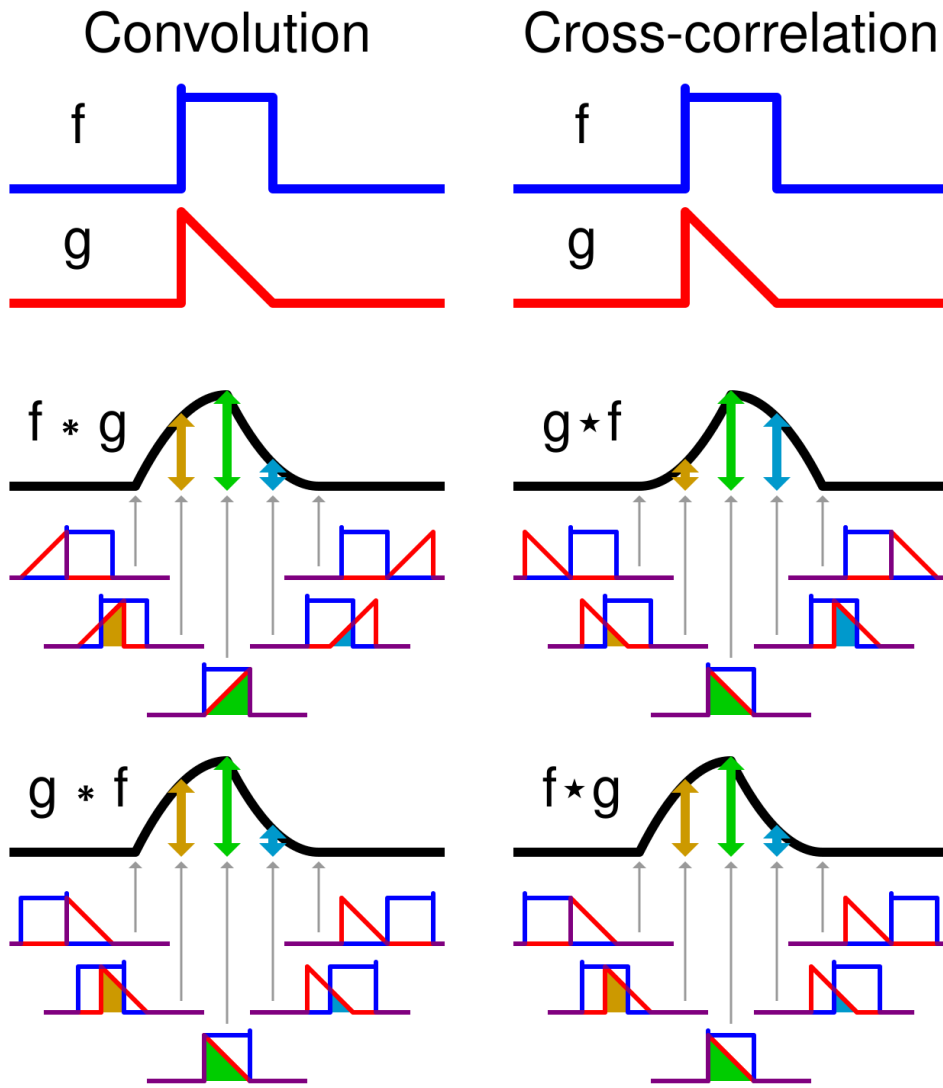


- **Cálculo** de la convolución de dos funciones.
- La convolución toma dos funciones, “desliza” una función sobre la otra invertida, multiplica los valores en los puntos de superposición, y suma los productos.
- Matemáticamente, se expresa como:

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$





$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$\psi_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t + \tau) dt$$

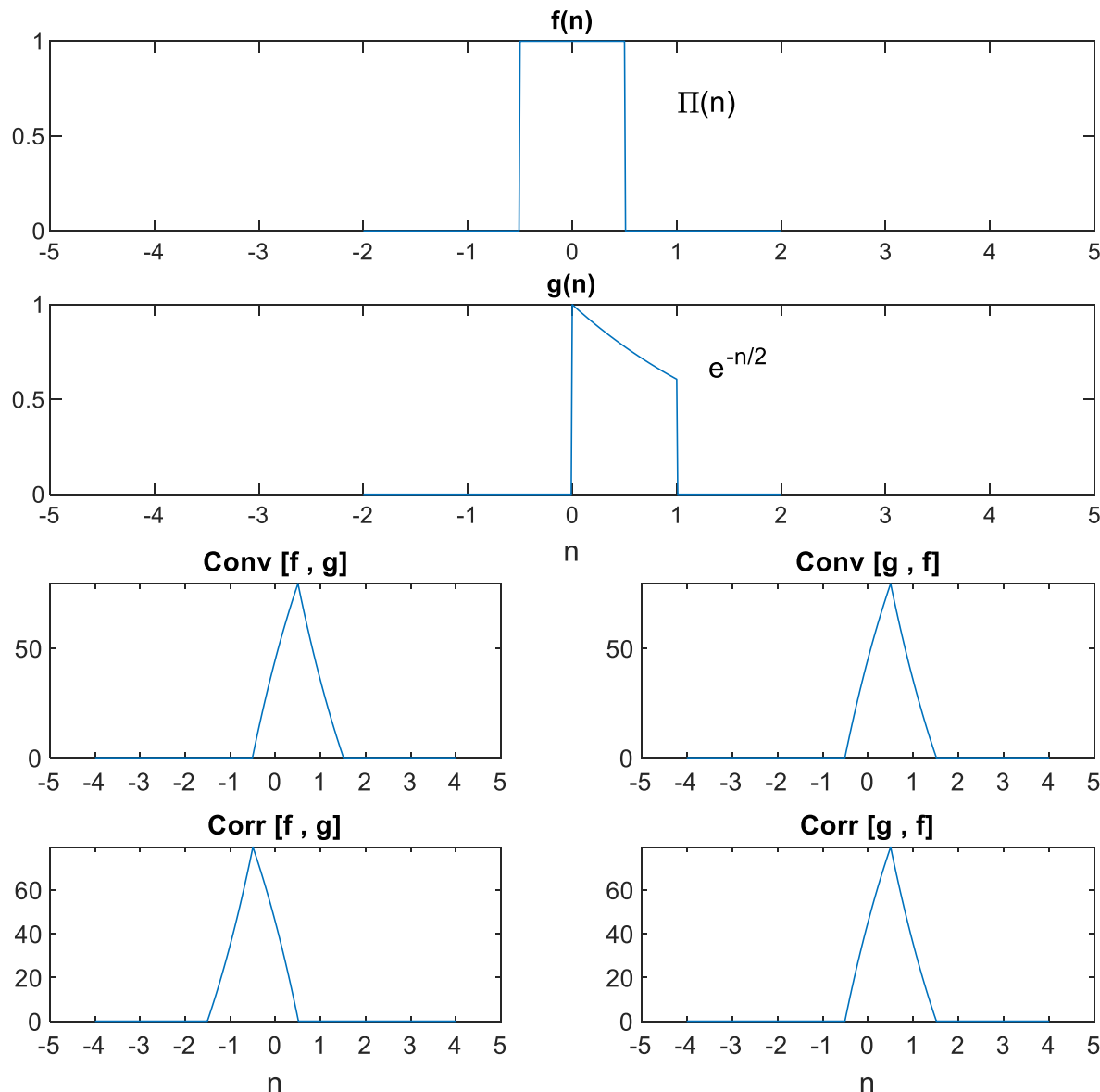
- La convolución se relaciona con la correlación cruzada de la siguiente forma.

$$\psi_{xh} = x(-t) * h(t)$$

- La correlación cruzada no es conmutativa, mientras que la convolución sí lo es.

$$\psi_{xh} \neq \psi_{hx} \quad x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

■ Ejercicio en clase. Programa la convolución y la correlación cruzada de estas dos señales.



%% Sección 1.f.b. Convolución vs. correlación

clear, clc

% Definimos las funciones f y g

```
fs = 100;
t = -2:1/fs:2;
f = zeros(size(t)); cond = t >= -0.5 & t <= 0.5; f(cond) = 1;
g = zeros(size(t)); cond = t >= 0 & t <= 1; g(cond) = exp(-t(cond)/2);
```

% Calculamos la correlación y la convolución

```
t2 = -4:1/fs:4;
Conv1 = conv(f,g);
Conv2 = conv(g,f);
Corr1 = xcorr(f,g);
Corr2 = xcorr(g,f);
```

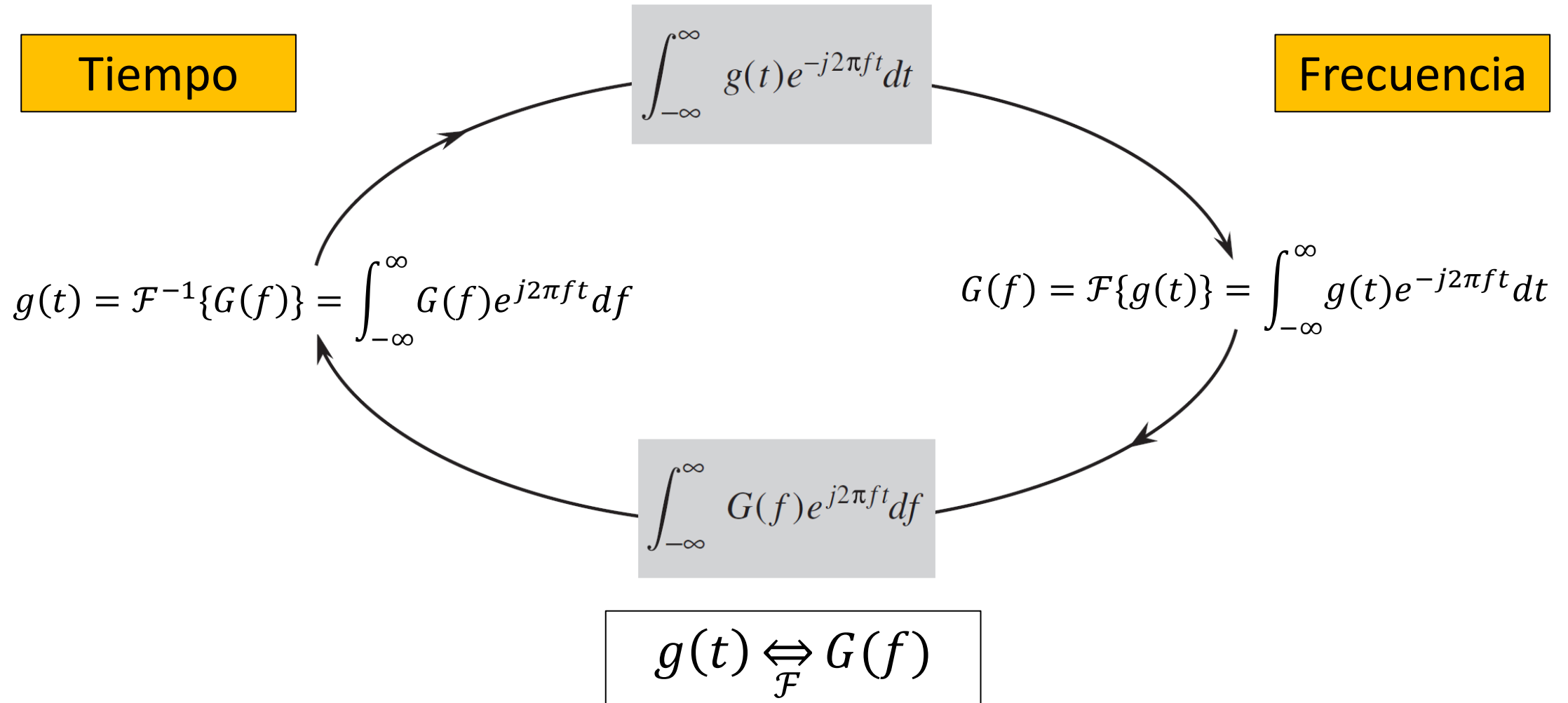
% Representamos el resultado

```
clf(fgure(1))
subplot(4,2,[1,2]), plot(t,f), xlim([-5 5]), title('f(n)')
text(1,0.7, '\Pi(n)', 'FontSize',10)
subplot(4,2,[3,4]), plot(t,g), xlim([-5 5]), title('g(n)')
text(1.3,0.7, 'e^{-n/2}', 'FontSize',10)
subplot(4,2,5), plot(t2,Conv1), xlim([-5 5])
title('Conv [f , g]'), set(gca,'xtick',-5:5)
subplot(4,2,6), plot(t2,Conv2), xlim([-5 5])
title('Conv [g , f]'), set(gca,'xtick',-5:5)
subplot(4,2,7), plot(t2,Corr1), xlim([-5 5])
title('Corr [f , g]'), set(gca,'xtick',-5:5)
xlabel('n','FontSize',10), set(gca,'xtick',-5:5)
subplot(4,2,8), plot(t2,Corr2), xlim([-5 5])
title('Corr [g , f]'), set(gca,'xtick',-5:5)
xlabel('n','FontSize',10)
```

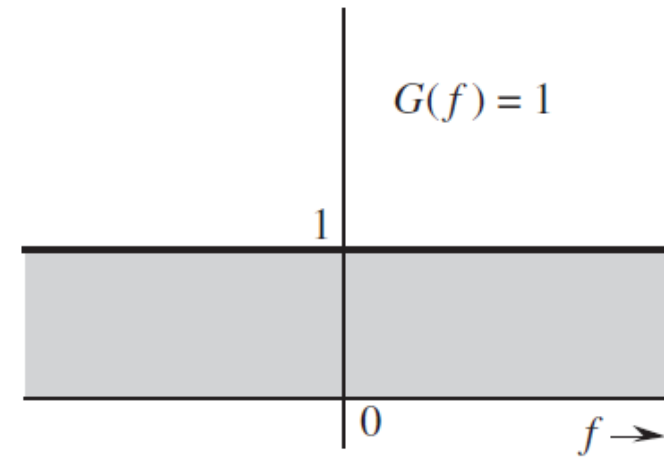
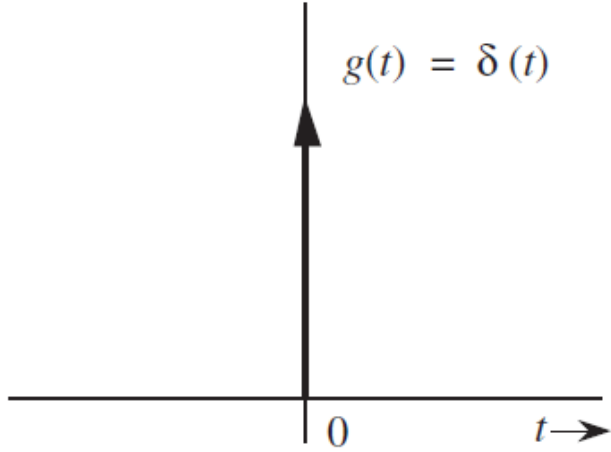
Transformada de Fourier

- a. La Transformada de Fourier (TF)*
- b. Tabla de TF típicas*
- c. Propiedades de la TF*
- d. Transformada Discreta de Fourier (DFT)*
- e. Transformada Rápida de Fourier (FFT)*
- f. Ejercicios*

2.a. La Transformada de Fourier (TF)



- Encuentra la TF de la señal impulso unitario $g(t) = \delta(t)$

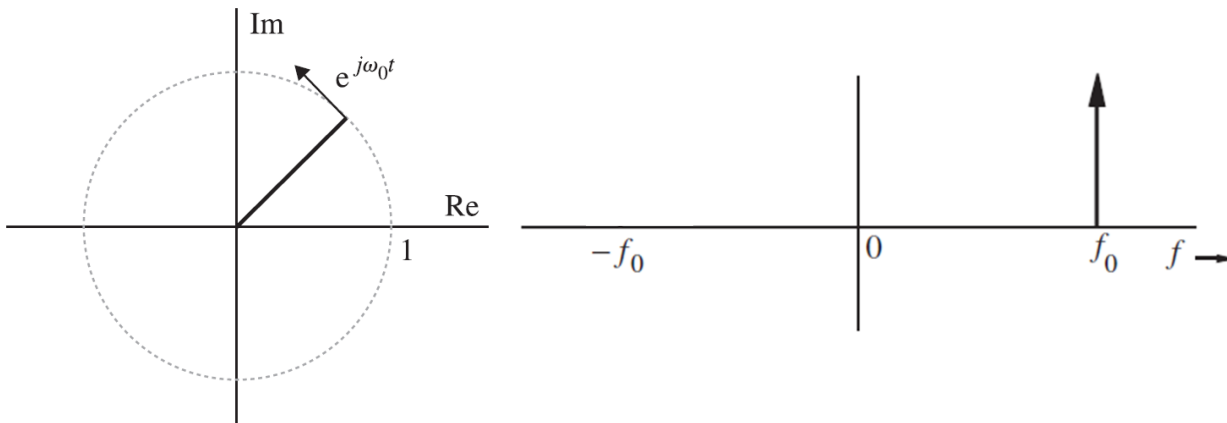


$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} = 1$$

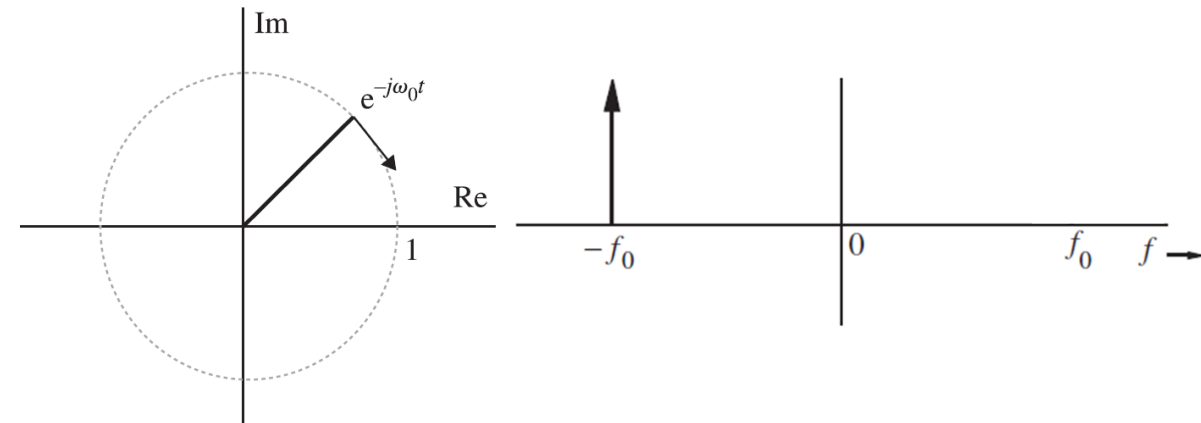
- Encuentra la TF inversa de $\delta(f - f_0)$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(f - f_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} \delta(f - f_0) df = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \underset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} \delta(f - f_0)$$

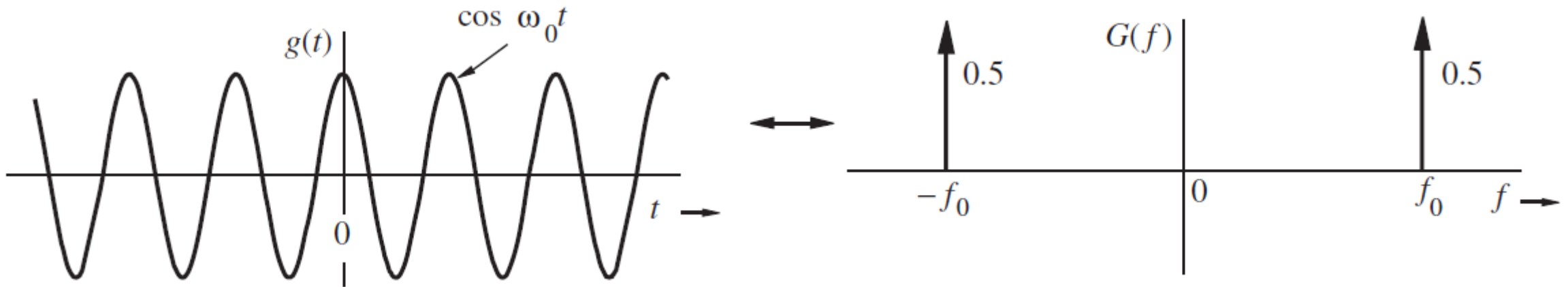


$$e^{-j2\pi f_0 t} \underset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} \delta(f + f_0)$$

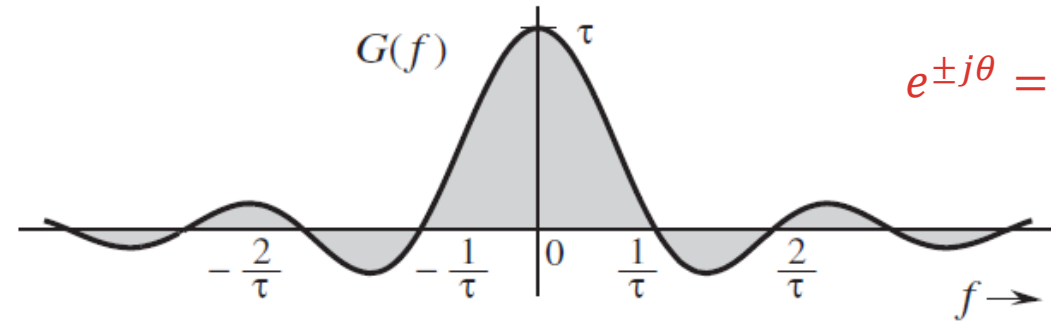
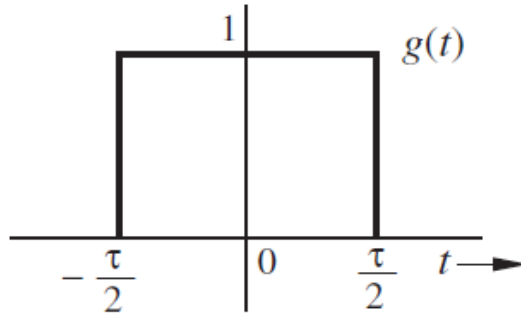


- Utiliza la identidad trigonométrica $\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$, y obtén la TF de la señal sinusoidal $g(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$$e^{\pm j2\pi f_0 t} \underset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} \delta(f \mp f_0) \quad \longrightarrow \quad \cos(2\pi f_0 t) \underset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$



- Encuentra la TF del pulso rectangular $g(t) = \Pi(t/\tau)$

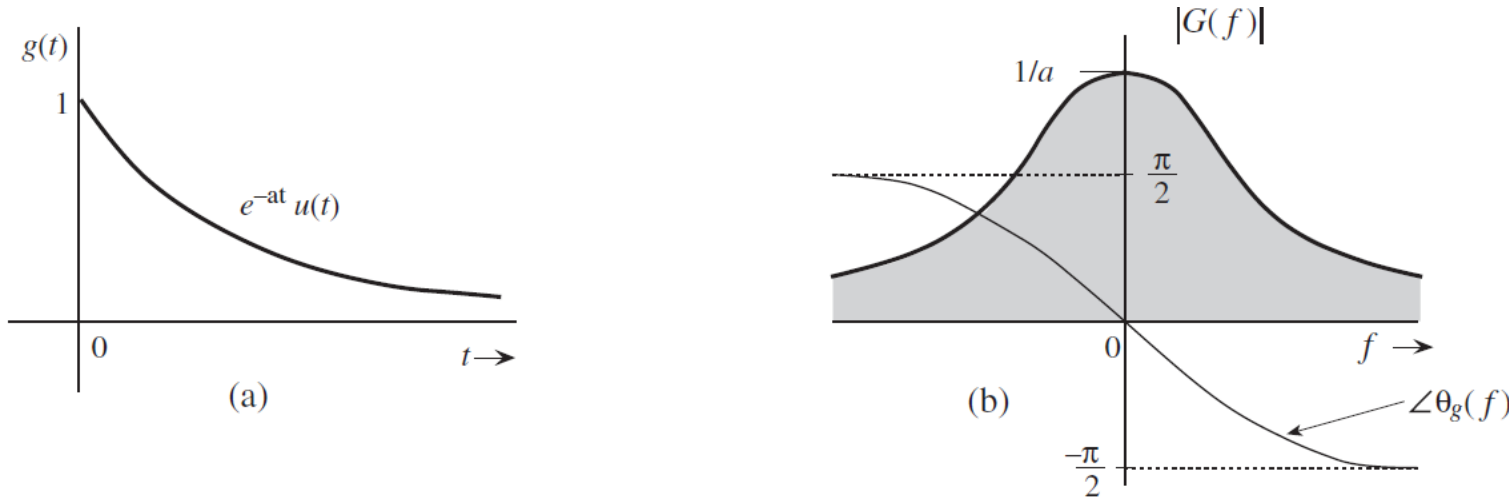


$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \cdot \sin \theta$$

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{1}{-j2\pi f} \cdot [e^{-j2\pi f \tau/2} - e^{j2\pi f \tau/2}] = \\ &= \frac{1}{-j2\pi f} \cdot [\cos(\pi f \tau) - j \sin(\pi f \tau) - \cos(\pi f \tau) - j \sin(\pi f \tau)] = \frac{-j2 \sin(\pi f \tau)}{-j2\pi f} = \tau \cdot \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = \tau \cdot \text{sinc}(\pi f \tau) \end{aligned}$$

Nota: Puesto que $G(f)$ es una función real, no es necesario mostrar $|G(f)|$ y $\theta_g(f) = \angle G(f)$ de manera separada.

- ¿Y si $G(f)$ no fuese real? Calcula ahora la TF de la función $g(t) = e^{-at}u(t)$



Puesto que $|e^{-j2\pi ft}| = 1$, si $t \rightarrow \infty$,
 $e^{-(a+j2\pi f)t} = e^{-at}e^{-j2\pi ft} = 0$ sólo si
 $a > 0$. En caso contrario $G(f)$ no existe.

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{-1}{a+j2\pi f} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

Si expresamos $a + j2\pi f$ en forma polar, tenemos $\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2} \cdot e^{j \tan^{-1}(2\pi f/a)}$, por lo que:

$$|G(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}} \quad \theta_g(f) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$

■ Importante recordar:

- ❖ Si $g(t)$ es una señal *real* $\left\{ \begin{array}{l} \text{El espectro de amplitud es una función } \textit{par} \\ \text{El espectro de fase es una función } \textit{impar} \end{array} \right.$

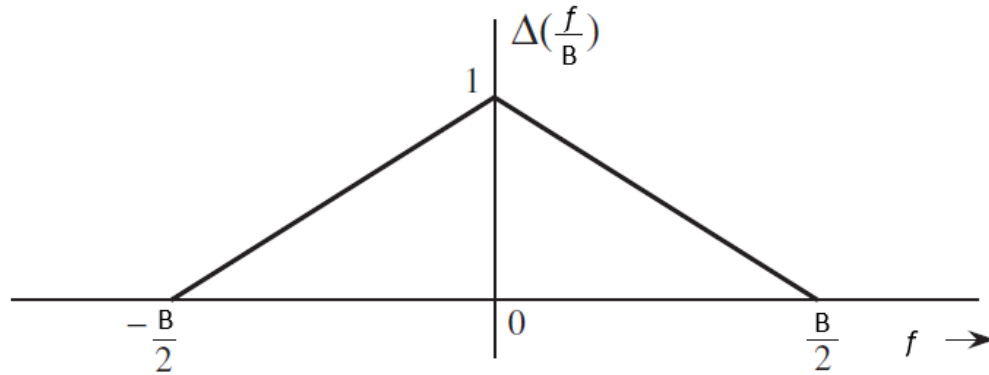
$$G(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)^* = G^*(f)$$

- $|G(-f)| = |G(f)|$ Módulo función par
- $\angle G(-f) = -\angle G(f)$ Fase función impar

- ❖ Si $g(t)$ es una función *par* [$g(-t) = g(t)$], $G(f)$ es estrictamente **real**.

- ❖ Si $g(t)$ es una función *impar* [$g(-t) = -g(t)$], $G(f)$ es estrictamente **imaginaria**.

- Pregunta de examen. Demuestra que $\mathcal{F}^{-1}\{\Lambda(f/B)\} = \frac{B}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi Bt}{2}\right)$.



$$G(f) = \begin{cases} ??? & \text{si } f \leq 0 \\ ??? & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\Lambda\left(f/B\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df = \dots = \frac{B}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi Bt}{2}\right)$$

2.b. Tabla de Transformadas de Fourier (Lathi & Ding, 2022)

	$g(t)$	$G(f)$	Condition		$g(t)$	$G(f)$	Condition
1	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	$a > 0$	13	$\cos 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{1}{4}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \frac{j2\pi f}{(2\pi f_0)^2 - (2\pi f)^2}$	
2	$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$	$a > 0$	14	$\sin 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{1}{4j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] + \frac{2\pi f_0}{(2\pi f_0)^2 - (2\pi f)^2}$	
3	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	$a > 0$	15	$e^{-at} \sin 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$	$a > 0$
4	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$	$a > 0$	16	$e^{-at} \cos 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$	$a > 0$
5	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a + j2\pi f)^{n+1}}$	$a > 0$	17	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau)$	
6	$\delta(t)$	1		18	$2B \operatorname{sinc}(2\pi Bt)$	$\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$	
7	1	$\delta(f)$		19	$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$	
8	$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$		20	$B \operatorname{sinc}^2(\pi Bt)$	$\Delta\left(\frac{f}{2B}\right)$	
9	$\cos 2\pi f_0 t$	$0.5[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$		21	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0)$	$f_0 = \frac{1}{T}$
10	$\sin 2\pi f_0 t$	$j0.5[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$		22	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-2(\sigma\pi f)^2}$	
11	$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$					
12	$\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{j2\pi f}$					

■ Tabla de identidades trigonométricas

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$$

$$e^{j2\alpha} + e^{j2\beta} = 2 \cos (\alpha - \beta) e^{j(\alpha+\beta)}$$

$$e^{j2\alpha} - e^{j2\beta} = j2 \sin (\alpha - \beta) e^{j(\alpha+\beta)}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = \sin (\theta + 90^\circ)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) = \cos (\theta - 90^\circ)$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} (3 \cos \theta + \cos 3\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta)$$

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan (\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta)$$

$$A \cos (\theta + \alpha) + B \cos (\theta + \beta) = C \cos \theta - S \sin \theta = R \cos (\theta + \phi)$$

where

$$C = A \cos \alpha + B \cos \beta$$

$$S = A \sin \alpha + B \sin \beta$$

$$R = \sqrt{C^2 + S^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos (\alpha - \beta)}$$

$$\phi = \arctan \frac{S}{C} = \arctan \frac{A \sin \alpha + B \sin \beta}{A \cos \alpha + B \cos \beta}$$

- $A = |A| \cdot e^{j\varphi_A}$, $B = |B| \cdot e^{j\varphi_B}$
- $|A + B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2 \cdot |A| \cdot |B| \cdot \cos(\varphi_A - \varphi_B)$
- $|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2 \cdot |A| \cdot |B| \cdot \cos(\varphi_A - \varphi_B)$

■ Tabla de integrales inmediatas

<i>Inmediatas</i>	<i>Cuasi inmediatas (con funciones)</i>
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ se suma 1 al expo y se divide por lo mismo	$\int f^n(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + k$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + k$
$\int e^x dx = e^x + k$ se queda igual	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + k$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$	$\int \operatorname{sen}(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x)) + k$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$	$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \operatorname{sen}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2(f(x))) f'(x) dx = \operatorname{tg}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x) dx = -\operatorname{ctg} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))} dx =$ $\int (1 + \operatorname{ctg}^2(f(x))) f'(x) dx = -\operatorname{ctg}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + k$

2.c. Propiedades de la TF (Lathi & Ding, 2022)

Operation	$g(t)$	$G(f)$
Linearity	$\alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t)$	$\alpha_1 G_1(f) + \alpha_2 G_2(f)$
Duality	$G(t)$	$g(-f)$
Time scaling	$g(at)$	$\frac{1}{ a } G\left(\frac{f}{a}\right)$
Time shifting	$g(t - t_0)$	$G(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Frequency shifting	$g(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$G(f - f_0)$
Time convolution	$g_1(t) * g_2(t)$	$G_1(f)G_2(f)$
Frequency convolution	$g_1(t)g_2(t)$	$G_1(f) * G_2(f)$
Time differentiation	$\frac{d^n g(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n G(f)$
Time integration	$\int_{-\infty}^t g(x) dx$	$\frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} G(0)\delta(f)$

- **Linealidad**. La TF es lineal.

Si $g_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_1(f)$ y $g_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_2(f)$, para cualquier constante a_1 y a_2 , tenemos

$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$$

Cualquier combinación lineal de señales en el dominio del tiempo corresponde con la combinación lineal de sus Transformadas de Fourier.

- **Simetría**. Si $g(t)$ es real, $G(f)$ y $G(-f)$ son complejos conjugados: $G(-f) = G^*(f)$

$|G(f)|$ es una función par:

θ_g es una función impar:

$$|G(-f)| = |G(f)|$$

$$\theta_g(-f) = -\theta_g(f)$$

- **Dualidad del tiempo y la frecuencia.** Las Transformadas Directa e Inversa de Fourier son muy similares: idénticas salvo el signo de la función exponencial.

Para cualquier resultado o relación entre $g(t)$ y $G(f)$, existe un resultado o relación equivalente intercambiando los roles de $g(t)$ y $G(f)$ en la relación original (con un ligero cambio de signo).

La propiedad indica que si $g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f)$, entonces $G(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} g(-f)$.

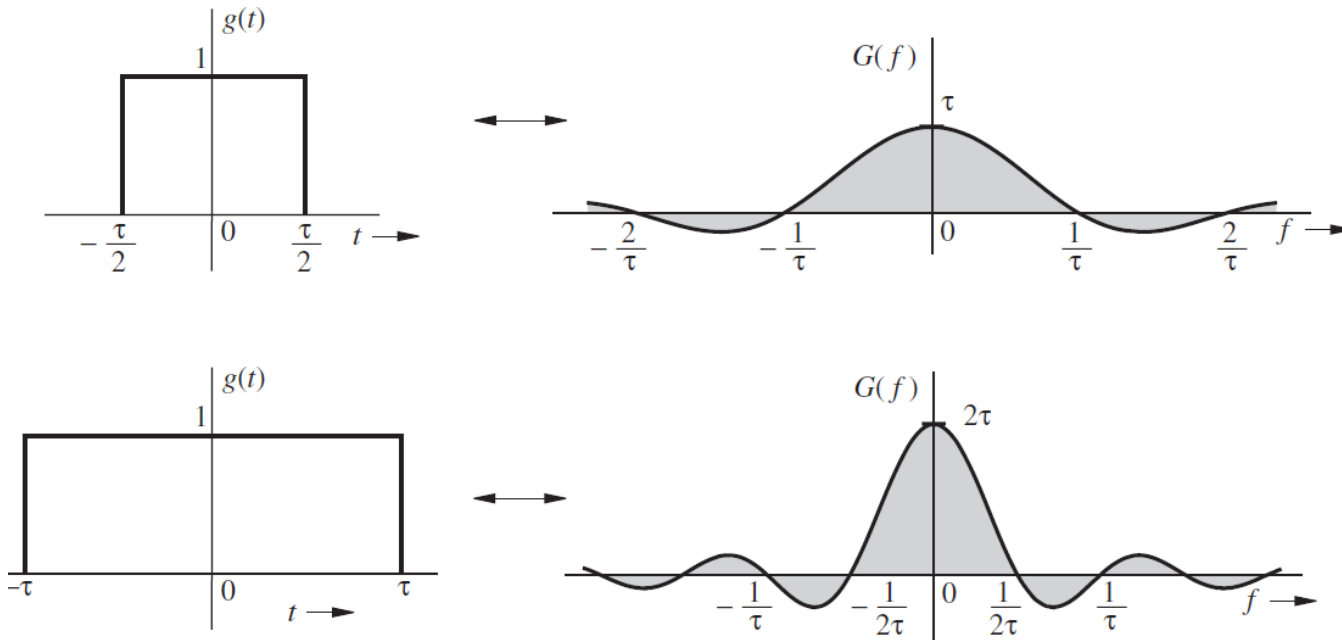
Por ejemplo, puesto que:

$$\underbrace{\Pi\left(\frac{t}{\alpha}\right)}_{g(t)} \iff \underbrace{\alpha \operatorname{sinc}(\pi f \alpha)}_{G(f)}$$

$$\underbrace{\alpha \operatorname{sinc}(\pi \alpha t)}_{G(t)} \iff \underbrace{\Pi\left(-\frac{f}{\alpha}\right)}_{g(-f)} = \Pi\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

- **Escalado en el tiempo.** Si $g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f)$, entonces $g(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$.

La función $g(at)$ representa la función $g(t)$ comprimida en el tiempo (si $|a| > 1$). De manera similar, la función $G\left(\frac{f}{a}\right)$ representa la función $G(f)$ expandida en la frecuencia.



Ejemplo para $a = 1/2$ en un pulso rectangular:

$$\text{para } g(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f) = \tau \cdot \text{sinc}(\pi f \tau)$$

aplicando la propiedad de escalado en el tiempo, vemos que la función expandida en el tiempo resulta en la función comprimida en la frecuencia.

$$g\left(\frac{t}{2}\right) = \Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f) = 2\tau \cdot \text{sinc}(2\pi f \tau)$$

- **Convolución.** Si $g_1(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} G_1(f)$ y $g_2(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} G_2(f)$ entonces:

Convolución en el tiempo $g_1(t) * g_2(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} G_1(f) \cdot G_2(f)$

Convolución en la frecuencia $g_1(t) \cdot g_2(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} G_1(f) * G_2(f)$

La convolución de dos señales en el dominio del tiempo corresponde con su multiplicación en el dominio de la frecuencia, mientras que la multiplicación de dos señales en el tiempo corresponde con su convolución en el dominio de la frecuencia.

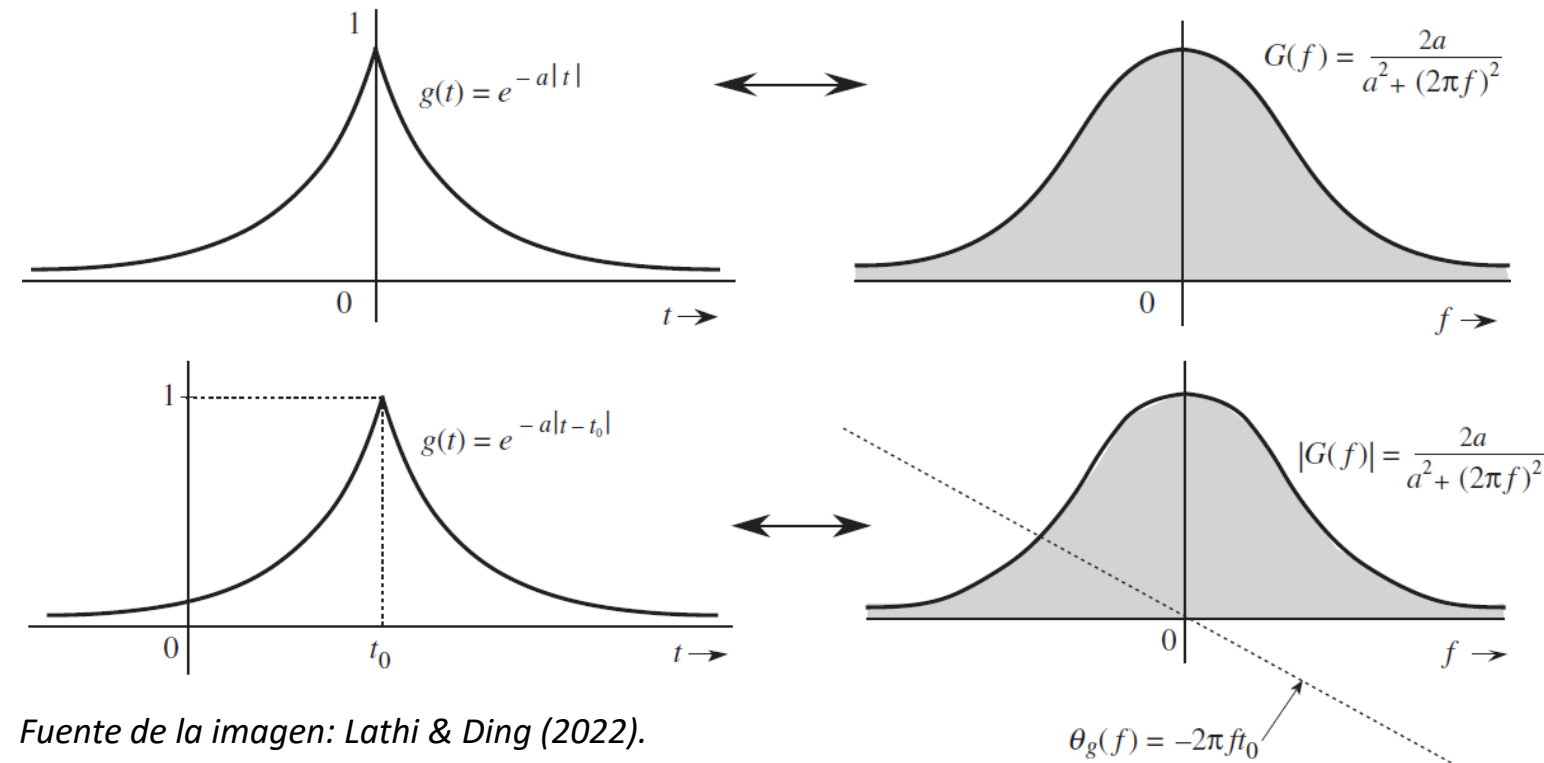
Ancho de banda del producto de dos señales.

- Si $g_1(t)$ y $g_2(t)$ tienen anchos de banda B_1 y B_2 respectivamente, el ancho de banda de $g_1(t) \cdot g_2(t)$ es $B_1 + B_2$.
- Si $g(t)$ tiene ancho de banda B , el ancho de banda de $g^2(t)$ será $2B$ Hz, y el de $g^n(t)$ será nB Hz.

- **Desplazamiento en el tiempo.** Si $g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f)$, entonces $g(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f)e^{-j2\pi f t_0}$.

Si consideramos $g(t)$ como suma de sus componentes de Fourier (sinusoides con una cierta amplitud y fase), la señal retrasada $g(t - t_0)$ puede sintetizarse a partir de las mismas componentes sinusoidales, cada una retrasada por t_0 segundos. Puesto que las amplitudes no se alteran, el espectro de amplitud de $g(t - t_0)$ sería igual a $|G(f)|$.

Sin embargo, un retardo de t_0 segundos: $\cos(2\pi f(t - t_0)) = \cos(2\pi f t - 2\pi f t_0)$ implica un cambio de fase de cada componente de $2\pi f t_0$, observando que es una función lineal de la frecuencia.



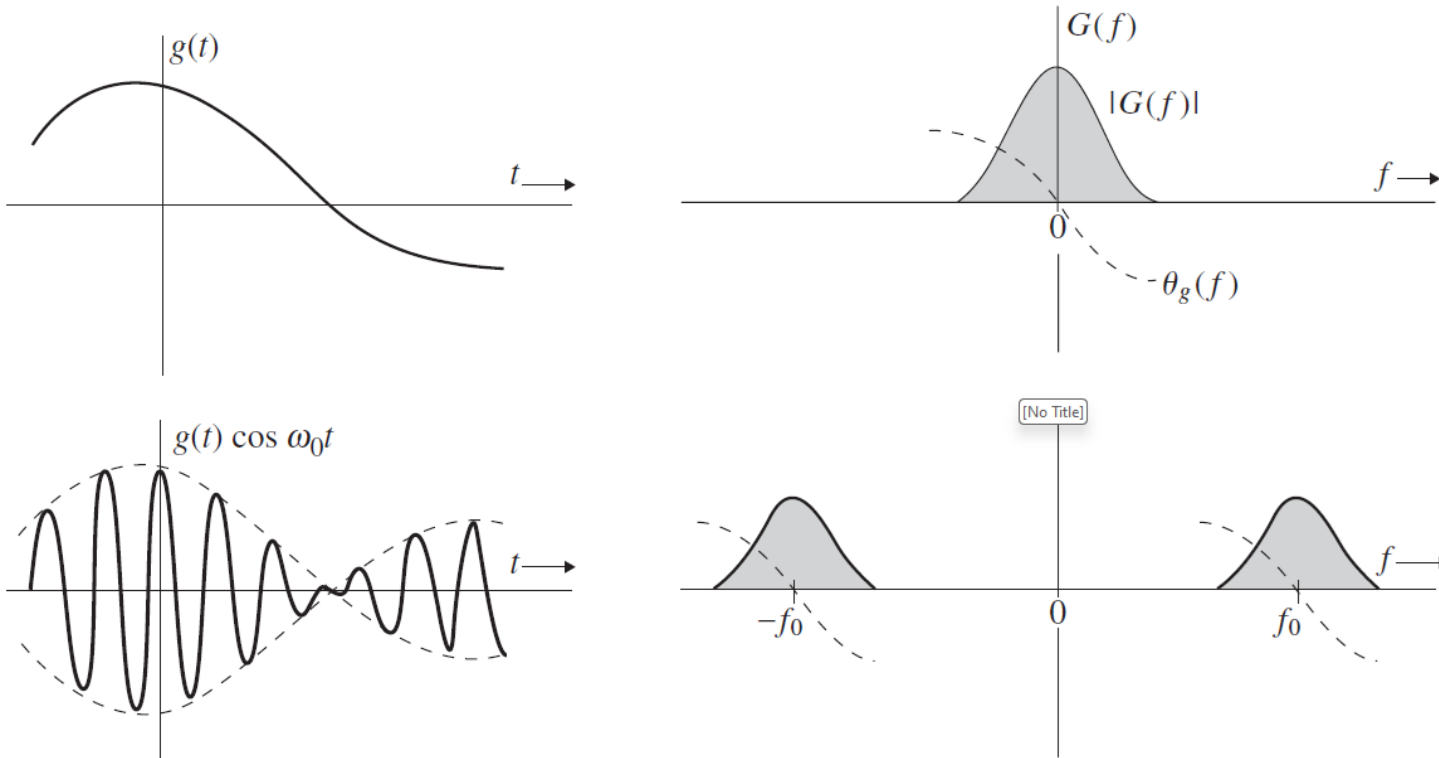
Ejemplo:

Dado $e^{-a|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$

$$e^{-a|t-t_0|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} e^{-j2\pi f t_0}$$

- **Desplazamiento en la frecuencia.** Si $g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f)$, entonces $g(t)e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f - f_0)$.

Puesto que $e^{j2\pi f_0 t}$ no es una función real que pueda generarse, el desplazamiento en frecuencia en la práctica se consigue multiplicando $g(t)$ por una senoide.



Puesto que:

$$g(t) \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} [g(t)e^{j2\pi f_0 t} + g(t)e^{-j2\pi f_0 t}]$$

Se observa que:

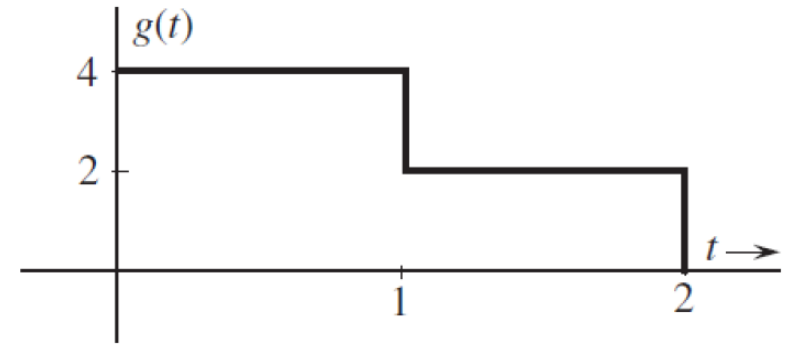
$$g(t) \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} [G(f - f_0) + G(f + f_0)]$$

Modulación AM

- $g(t)$ Señal modulante
- $\cos(2\pi f_0 t)$ Señal portadora
- $g(t) \cos(2\pi f_0 t)$ Señal modulada

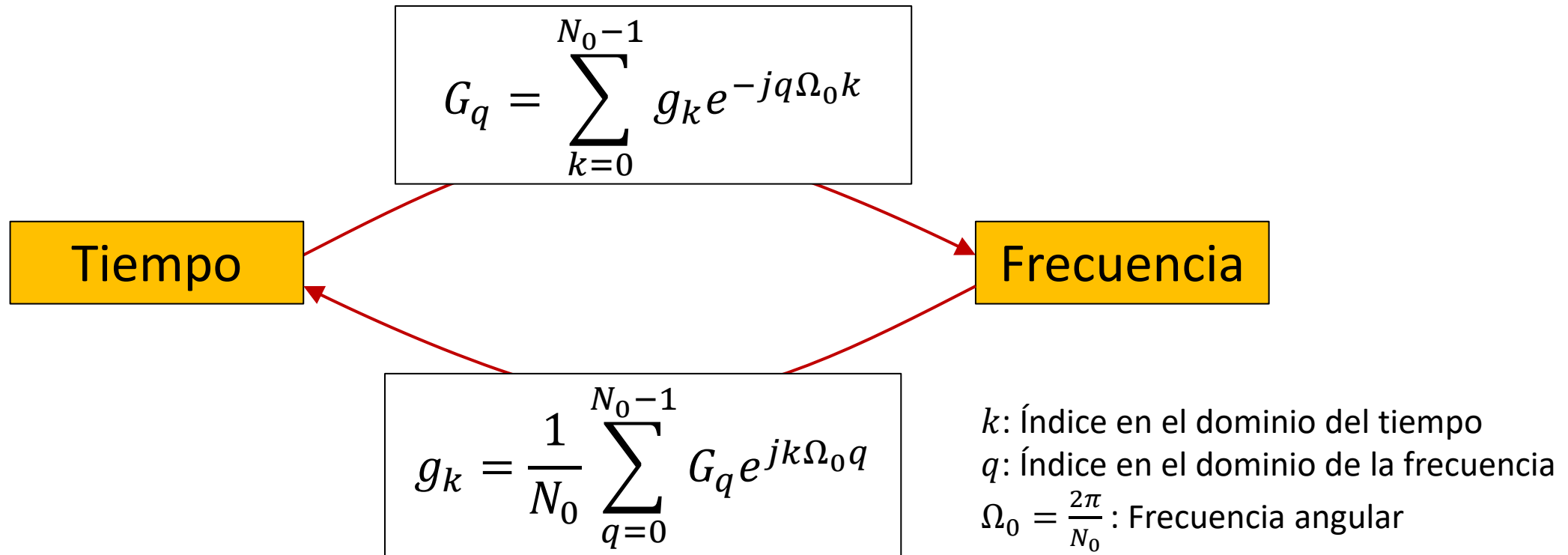
■ **Ejercicio 2.**

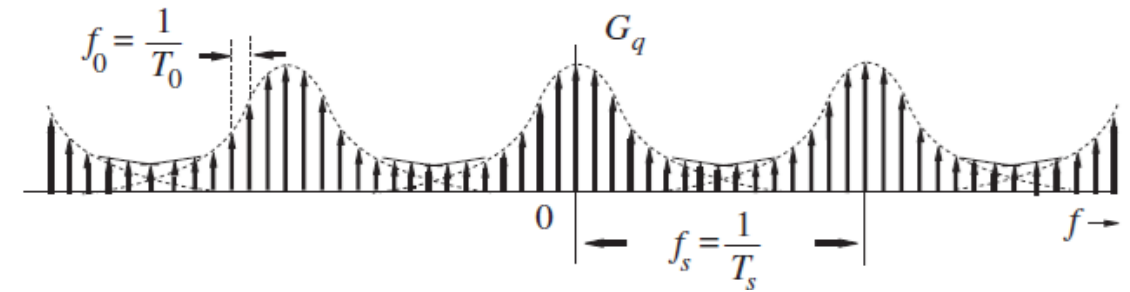
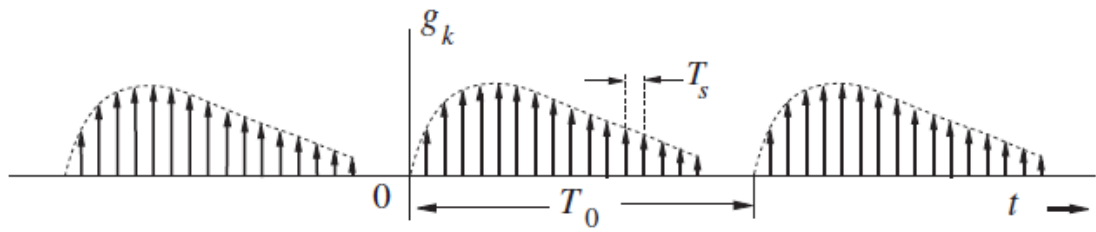
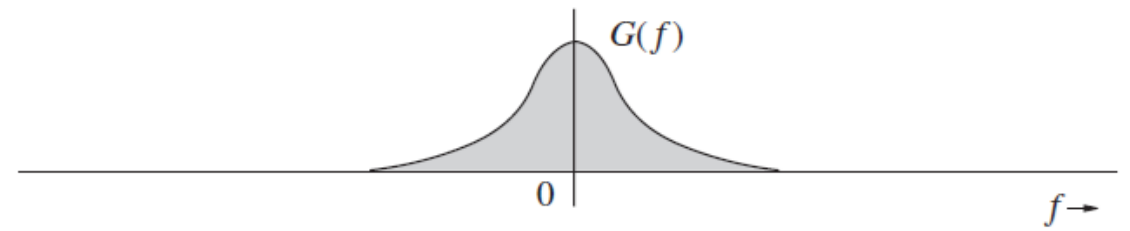
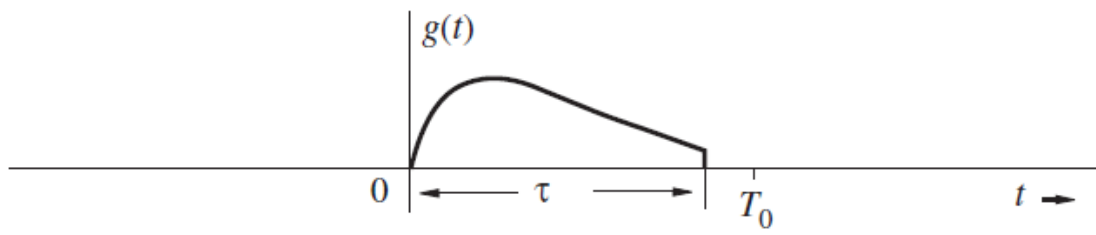
- a) Calcula mediante integración directa $G(f)$
- b) Calcula la Transformada de Fourier de $g(-t)$
- c) ¿Qué efecto tiene en la TF invertir una señal en el tiempo?



2.d. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Hasta ahora hemos estudiado la TF con señales continuas. La DFT permite transformar una señal discreta (muestreada) g_k en el dominio de la frecuencia G_q .





Para una señal $g(t)$ que comienza en $t = 0$ de duración τ , se elige $T_0 \geq \tau$ (zero padding).

La DFT supone que $g(t)$ es periódica, por lo que replica $g(t)$ desde $-\infty$ hasta $+\infty$, es decir, considera que la señal original $g(t)$ es parte de una señal periódica de periodo T_0 .

$g(t)$ se muestrea a intervalos fijos de T_s segundos, i.e., con una frecuencia de muestreo $f_s = 1/T_s$, dando lugar a un total de N_0 muestras, en $g(0)$, $g(T_s)$, $g(2T_s)$, ..., $g[(N_0 - 1)T_s]$, donde $N_0 = T_0/T_s$.

La resolución en el tiempo es $T_s = 1/f_s$ segundos, mientras que en la frecuencia es $f_0 = 1/T_0$ Hz.

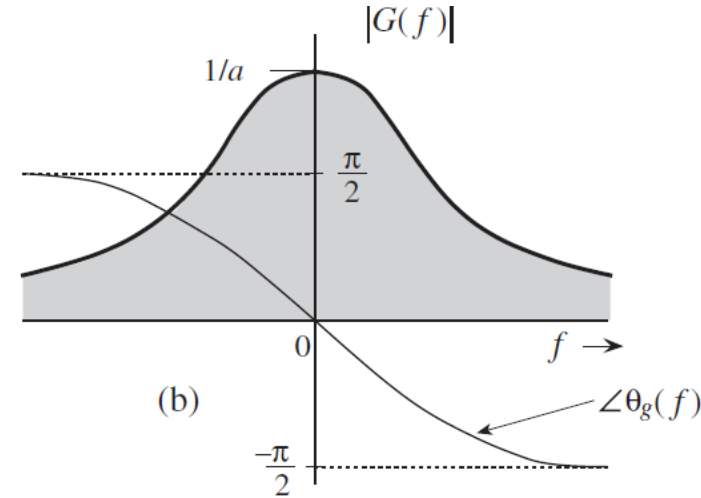
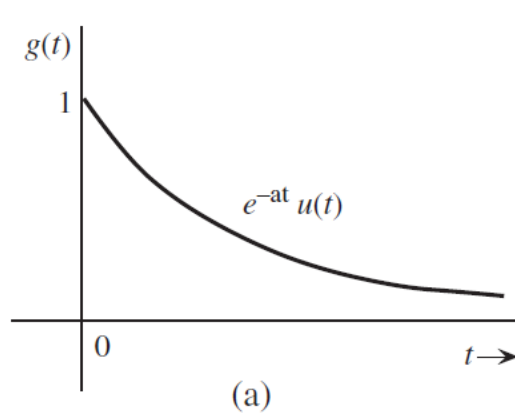
g_k y G_q son periódicas con un periodo de N_0 muestras.

2.e. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- La Transformada Rápida de Fourier (FFT) se desarrolló en 1965 por Tukey y Cooley.
- La FFT reduce significativamente el número de computaciones para obtener la DFT, pasando del orden de N_0^2 a $N_0 \log(N_0)$.
 - Para calcular una única muestra de G_q hacen falta N_0 multiplicaciones de números complejos y $N_0 - 1$ sumas de números complejos.
 - Para calcular las N_0 muestras de G_q , se requieren N_0^2 multiplicaciones de números complejos y $N_0(N_0 - 1)$ sumas de números complejos.
 - Para N_0 grandes, el coste computacional puede llegar a ser prohibitivo, incluso en ordenadores con una potente capacidad de cómputo.

$$G_q = \sum_{k=0}^{N_0-1} g_k e^{-jq\Omega_0 k}$$

- Ejercicio de Matlab. Compara la TF de la función $g(t) = e^{-2t}u(t)$ obtenida de manera computacional mediante la FFT y de manera analítica. Utiliza $f_s = 64$ Hz y $T_0 = 4$ s.



$$G(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

%% Sección 2.e. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

```
clear,clc
a = 2; % Índice de la exponencial
fs = 64; % Frecuencia de muestreo
T0 = 4; % Duración de g(t)
N0 = T0*fs; % Número de muestras
t = 0:1/fs:T0-1/fs; % Eje de tiempos
g = exp(-a*t); % Función g(t)
G = fft(g)/fs; % Función G(f) - Números complejos
% Importante multiplicar por Ts (1/fs)

Gm_num = abs(G); % Magnitud de G(f), |G(f)|
Gp_num = angle(G); % Fase de G(f)

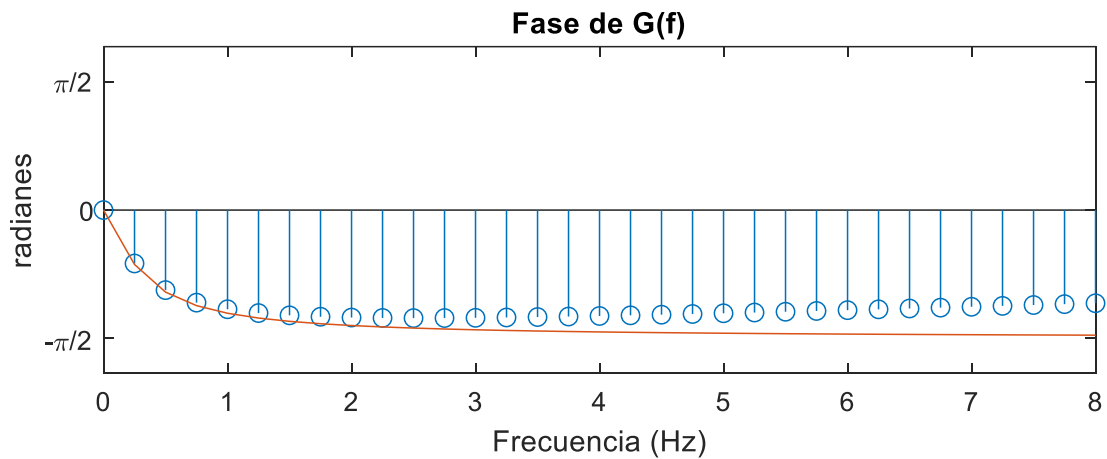
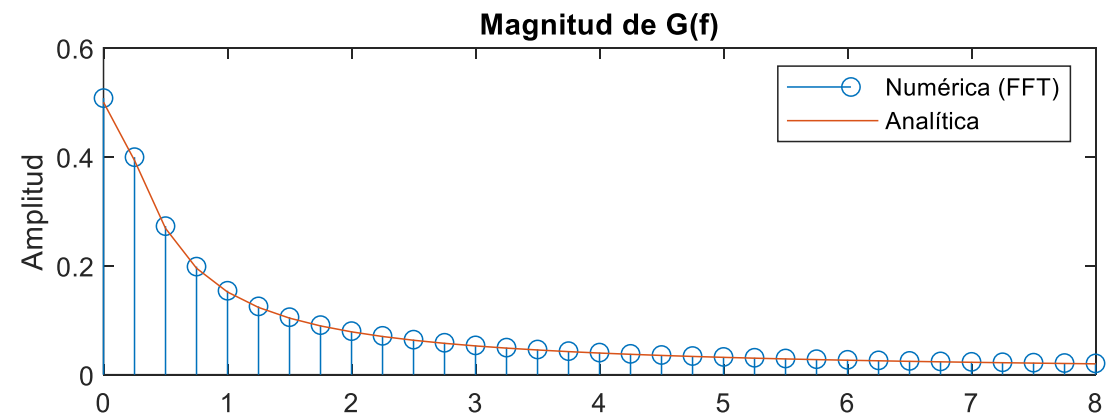
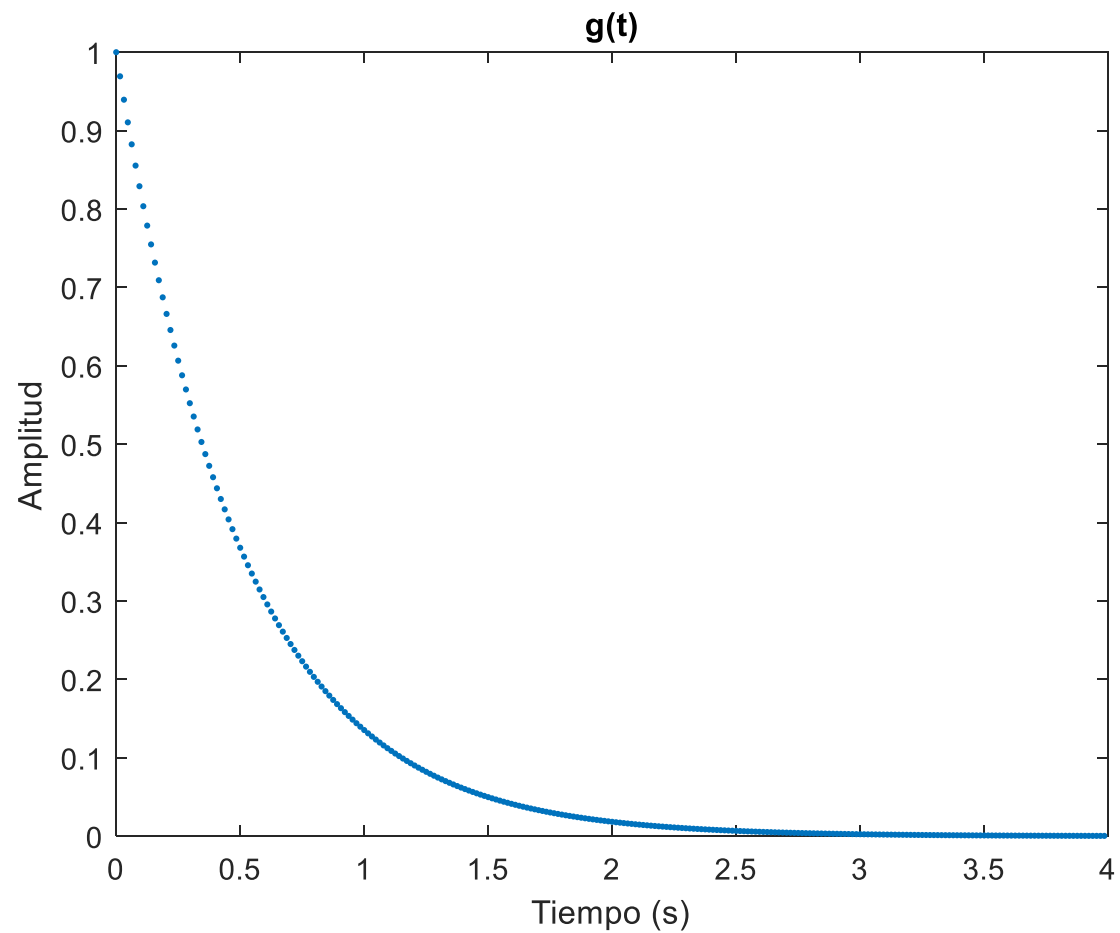
f = 0:fs/N0:fs-1/N0; % Eje de frecuencias
G_analit = 1./(a+1i*2*pi*f); % G(f) analítico
Gm_analit = abs(G_analit); % Magnitud de G(f) analítica
Gp_analit = angle(G_analit); % Fase de G(f) analítica
```

% Figuras

```
clf(figure(1)), plot(t,g,'.') % Función g(t) en el TIEMPO
xlabel('Tiempo (s)'), ylabel('Amplitud'), title('g(t)')

clf(figure(2)) % Función G(f) en la FRECUENCIA
subplot(211),hold on,box on % Magnitud de G(f)
stem(f,Gm_num) % Gm numérica (FFT)
plot(f,Gm_analit) % Gm analítica
title('Magnitud de G(f)'), ylabel('Amplitud')
legend('Numérica (FFT)','Analítica')
xlim([0 8])

subplot(212),hold on,box on % Fase de G(f)
stem(f,Gp_num) % Gp numérica (FFT)
plot(f,Gp_analit) % Gp analítica
set(gca,'ytick',[-pi/2,0,pi/2],'yticklabel',{'-\pi/2','0','\pi/2'})
axis([0 8 -2 2])
title('Fase de G(f)'), xlabel('Frecuencia (Hz)'), ylabel('radianes')
```

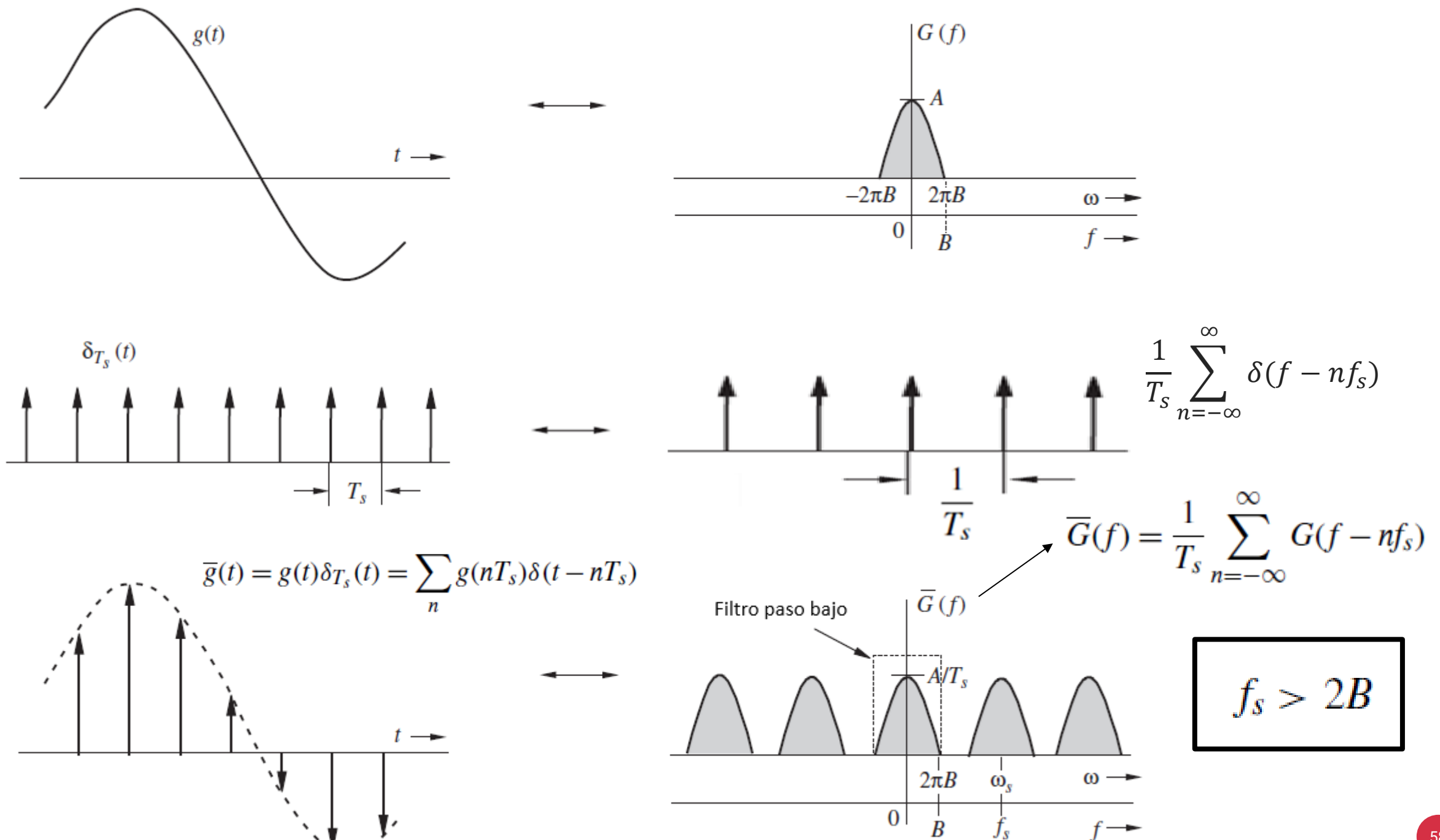


Digitalización de señales analógicas

- a. Muestreo de una señal analógica*
- b. Reconstrucción de una señal digital*
- c. Consideraciones prácticas*
- d. Cuantificación*
- e. Ejercicios*

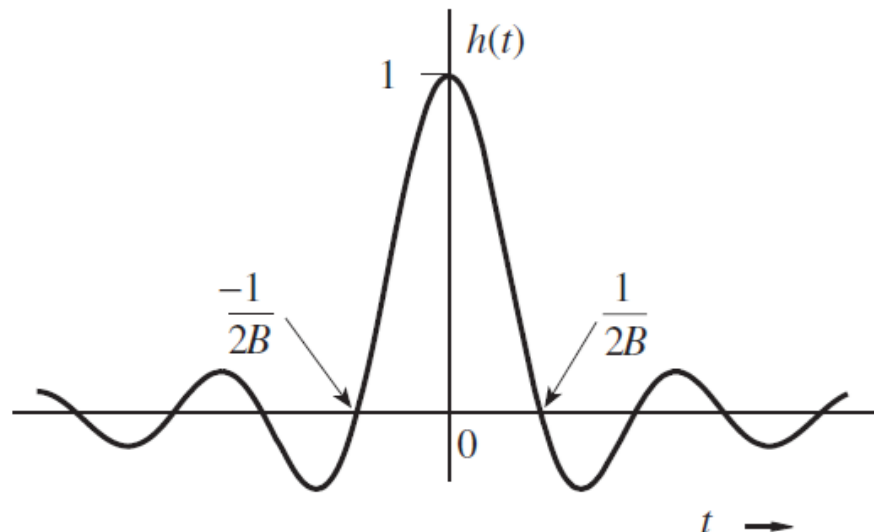
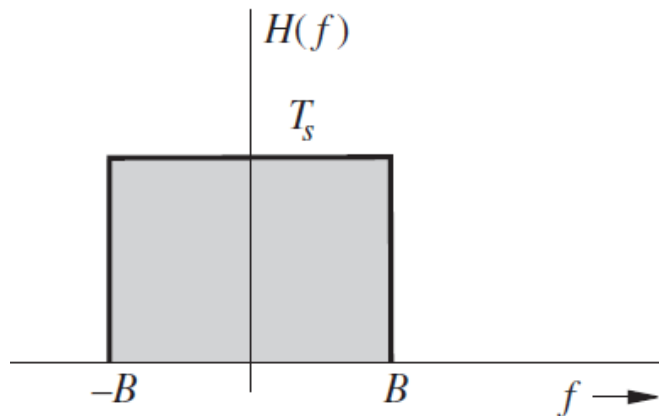
3.a. Muestreo de una señal analógica (conversión A/D)

- El **Teorema de muestreo uniforme** dicta que una señal $g(t)$ cuyo espectro esté limitado en banda (es decir, que $G(f) = 0$ para $|f| > B$) puede reconstruirse exactamente (sin pérdida de información) a partir de las muestras en el tiempo discreto tomadas de manera uniforme a una tasa de R muestras por segundo, bajo la condición necesaria y suficiente que $R > 2B$.
- La siguiente figura presenta un esquema del proceso de muestreo uniforme.
- Muestrear la señal $g(t)$ a una tasa de f_s Hz significa que tomaremos f_s muestras cada segundo de manera uniforme.
- La señal muestreada $\bar{g}(t)$ resulta de multiplicar la señal original por un tren de deltas $\delta_{T_s}(t)$ separadas por un periodo uniforme T_s , donde $T_s = 1/f_s$. La amplitud de cada muestra $g(nT_s)$ corresponde con el valor de $g(t)$ en $t = nT_s$.
- La figura muestra que si no hay solapamiento entre las diferentes réplicas en $\bar{G}(f)$ (es decir, si $f_s > 2B$) $g(t)$ puede reconstruirse a partir de las muestras pasando $\bar{g}(t)$ por un filtro paso baja sin distorsión de ancho de banda B Hz y ganancia T_s .



3.b. Reconstrucción de una señal digital (conversión D/A)

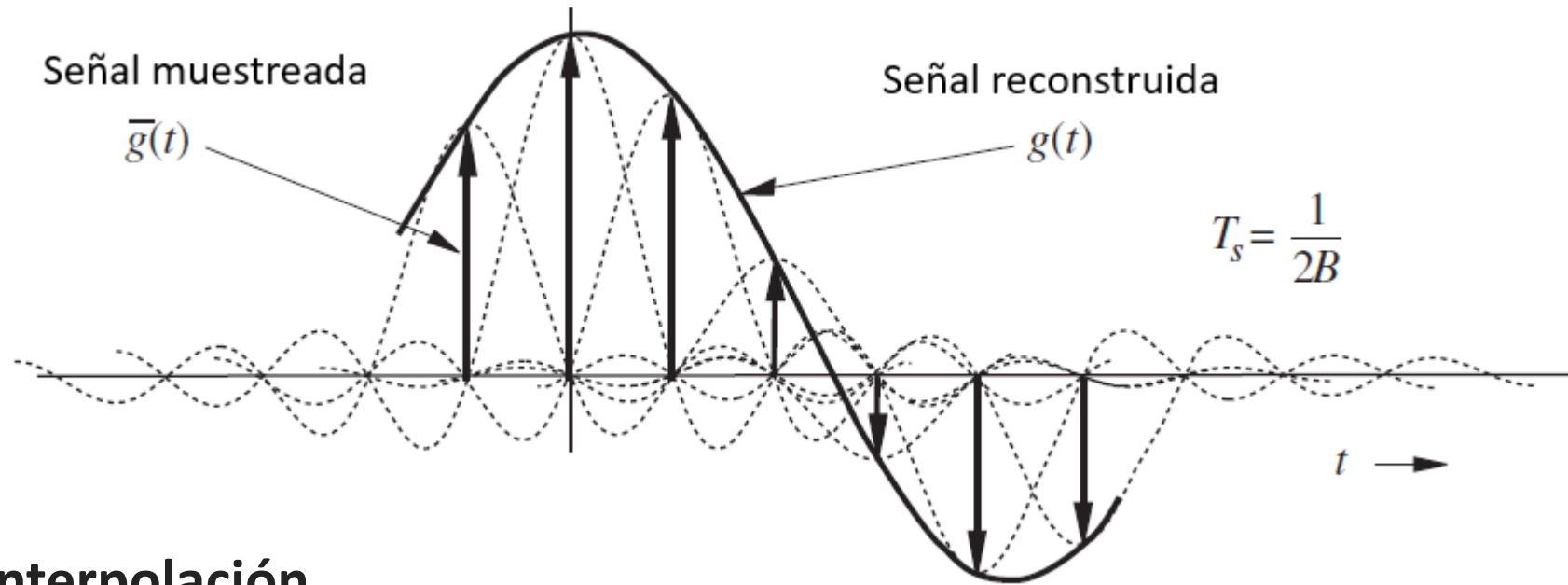
- El proceso de reconstruir una señal continua $g(t)$ a partir de sus muestras se conoce como **interpolación**.
- En la sección anterior vimos que si una señal limitada en banda está muestreada por encima de la frecuencia de Nyquist, se puede recuperar la señal original pasando las muestras por un filtro paso bajo ideal $H(f)$ de ancho de banda B Hz y ganancia T_s .
- El filtro ideal presenta la función de transferencia $H(f) = T_s \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$.



$$h(t) = 2BT_s \operatorname{sinc}(2\pi Bt)$$

$$\text{Si } f_s = 2B \rightarrow 2BT_s = 1$$

$$h(t) = \operatorname{sinc}(2\pi Bt)$$



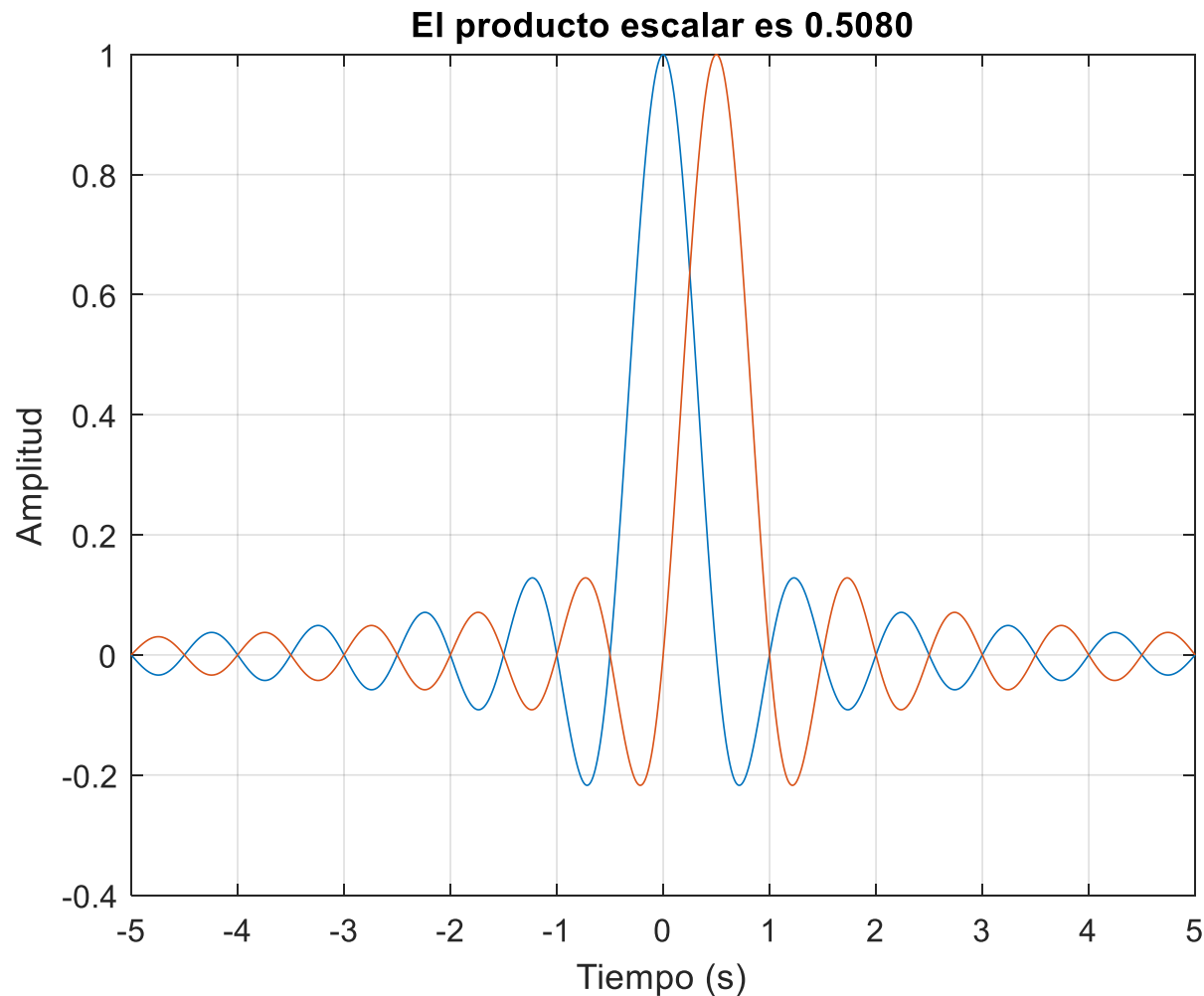
Ecuación de interpolación

$$g(t) = \sum_k g(kT_s) h(t - kT_s) = \sum_k g(kT_s) \text{sinc}[2\pi B(t - kT_s)]$$

El dominio del tiempo puede considerarse como un espacio vectorial en el que un conjunto de funciones *sinc* desplazadas T_s segundos forman una base para representar señales limitadas en banda a $\frac{1}{2T_s}$ Hz.

En la práctica, un número finito de funciones *sinc* genera un subespacio de dimensión k .

- **Ejercicio en clase.** Comprobar que dos funciones *sinc* separadas por un múltiplo de T_s son ortogonales, puesto que son vectores que forman una base. Representa las funciones.



```
%% Sección 2.b. Comprobar la ortogonalidad de dos funciones sinc
clear,clc,
```

```
% Inicialización de variables
```

```
fs = 100;
```

```
% Frecuencia de muestreo
```

```
t = -5:1/fs:5];
```

```
% Eje de tiempo
```

```
Ts = 0.5;
```

```
% Periodo de ceros en la función sinc
```

```
B = 1/(2*Ts);
```

```
% 2·B·Ts = 1
```

```
k1 = 0;
```

```
% Desplazamiento de f1
```

```
k2 = 1;
```

```
% Desplazamiento de f2
```

```
A1 = 1;
```

```
% Amplitud de f1
```

```
A2 = 1;
```

```
% Amplitud de f2
```

```
f1 = A1*sinc(2*B*(t-k1*Ts));
```

```
% sinc(x) en MATLAB es sin(pi*x)/(pi*x)
```

```
f2 = A2*sinc(2*B*(t-k2*Ts));
```

```
% por lo que no hay que incluir pi.
```

```
ProdEsc = dot(f1,f2);
```

```
% Producto escalar
```

```
% Representación de señales
```

```
clf(figure(1))
```

```
plot(t,f1,t,f2),grid on
```

```
xlabel('Tiempo (s)')
```

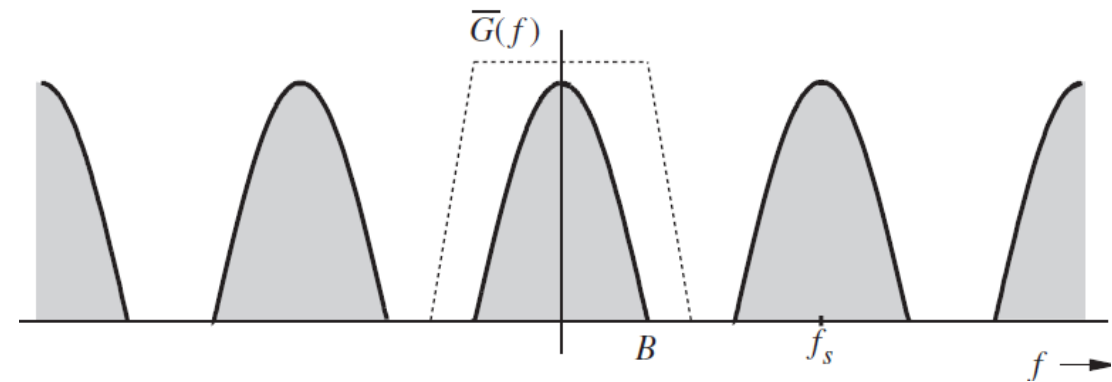
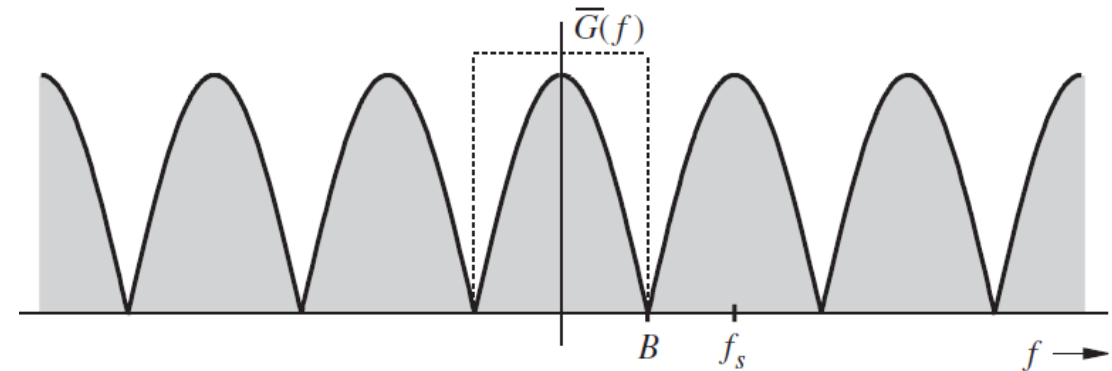
```
ylabel('Amplitud')
```

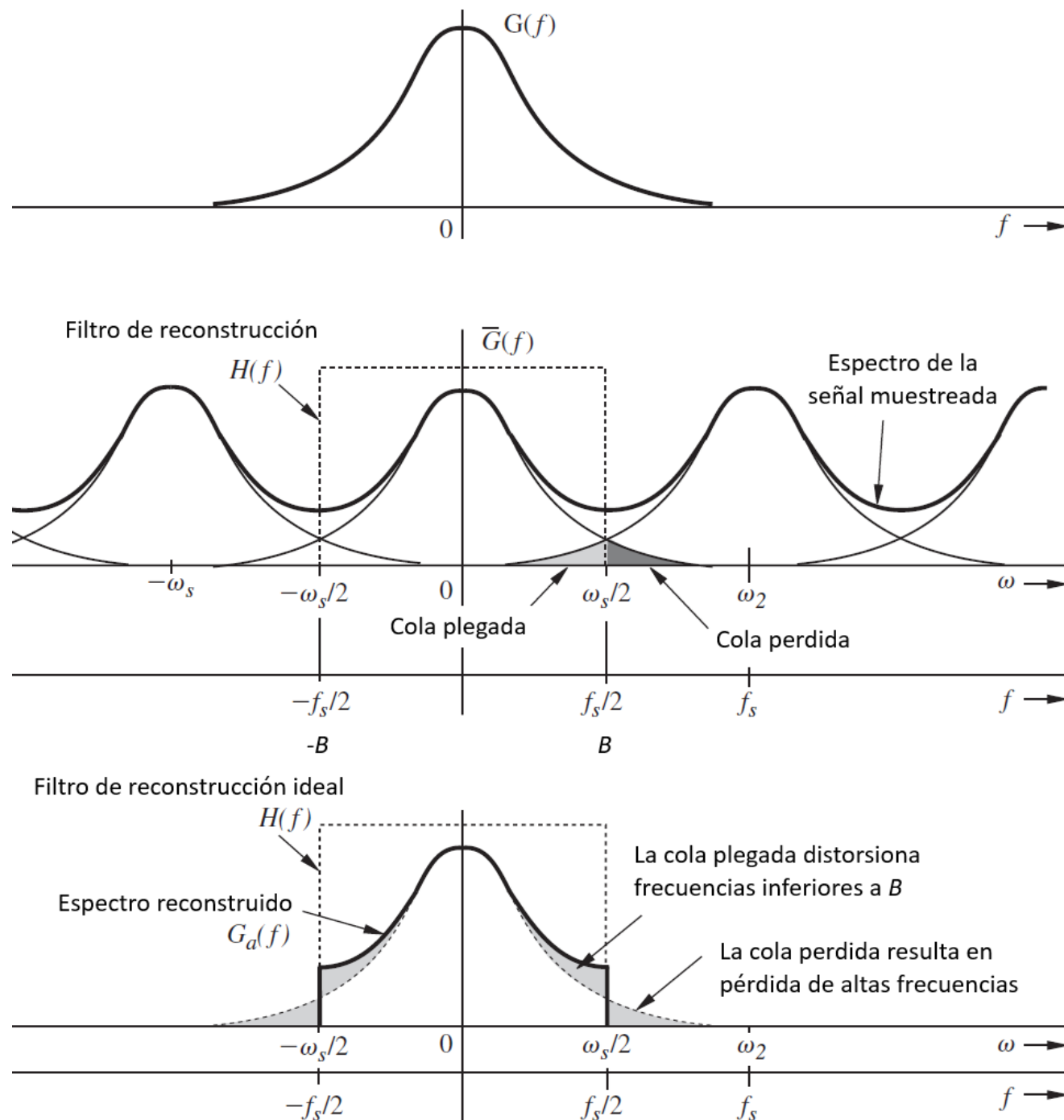
```
title(sprintf('El producto escalar es %1.4f',ProdEsc))
```

3.c. Consideraciones prácticas

1. Implementación real de los filtros de reconstrucción.

- Si muestreamos una señal a la frecuencia de Nyquist ($f_s = 2B$), el espectro $\bar{G}(f)$ consistirá en repeticiones de $G(f)$ en el dominio de la frecuencia, sin ningún hueco entre ellas, por lo que para recuperar $g(t)$, deberemos pasar las muestras $\bar{g}(t)$ por un filtro de reconstrucción ideal.
- Como hemos visto en el ejercicio de clase, tal filtro ideal es irrealizable, puesto que exigiría una duración infinita.
- Una solución práctica a este problema consiste en muestrear la señal a una tasa mayor a la frecuencia de Nyquist ($f_s > 2B$), de manera que dejemos un hueco entre las sucesivas repeticiones de $G(f)$, y poder utilizar de este modo, un filtro paso bajo realizable.



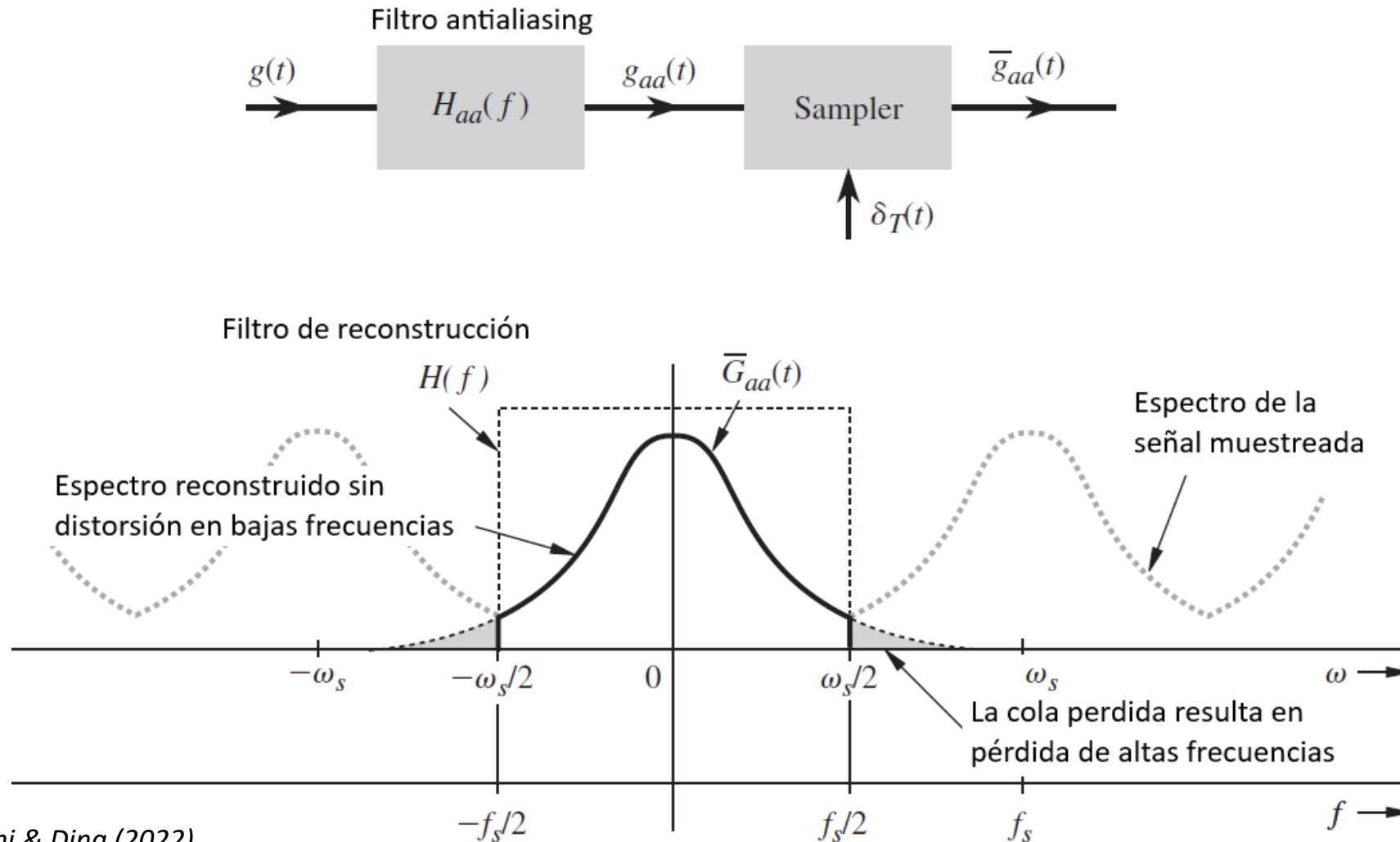


2. Efecto de solapamiento (*aliasing*)

- En la práctica, todas las señales reales son de duración finita, y por tanto, presentan una duración espectral infinita (una señal no puede ser limitada en el tiempo y la frecuencia a la vez).
- Por consiguiente, siempre existirá cierto grado de solapamiento, independientemente de cómo de alta sea la frecuencia de muestreo.
- Considerando un filtro ideal de reconstrucción con $B = f_s/2$ (conocida como frecuencia de plegado):
 1. Las frecuencias superiores a B se atenuarán,
 2. Como consecuencia del plegado, las frecuencias superiores a B distorsionarán frecuencias inferiores a B .

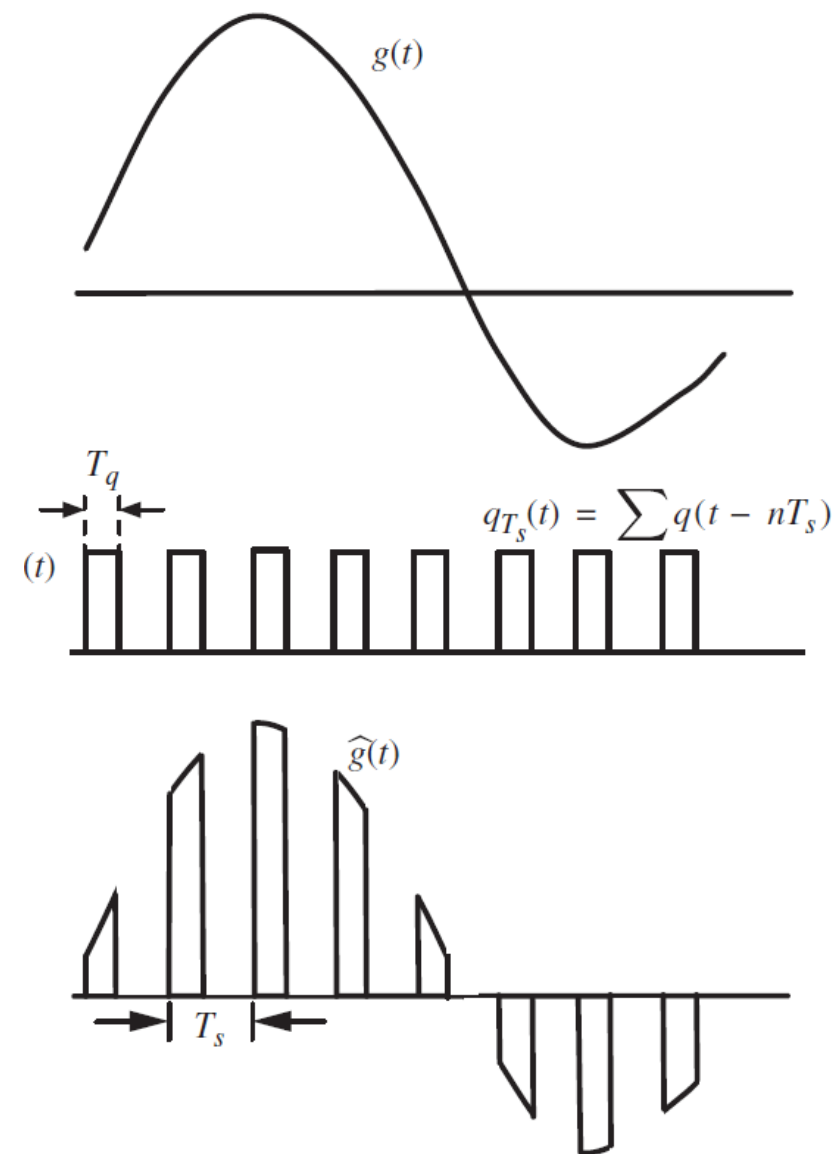
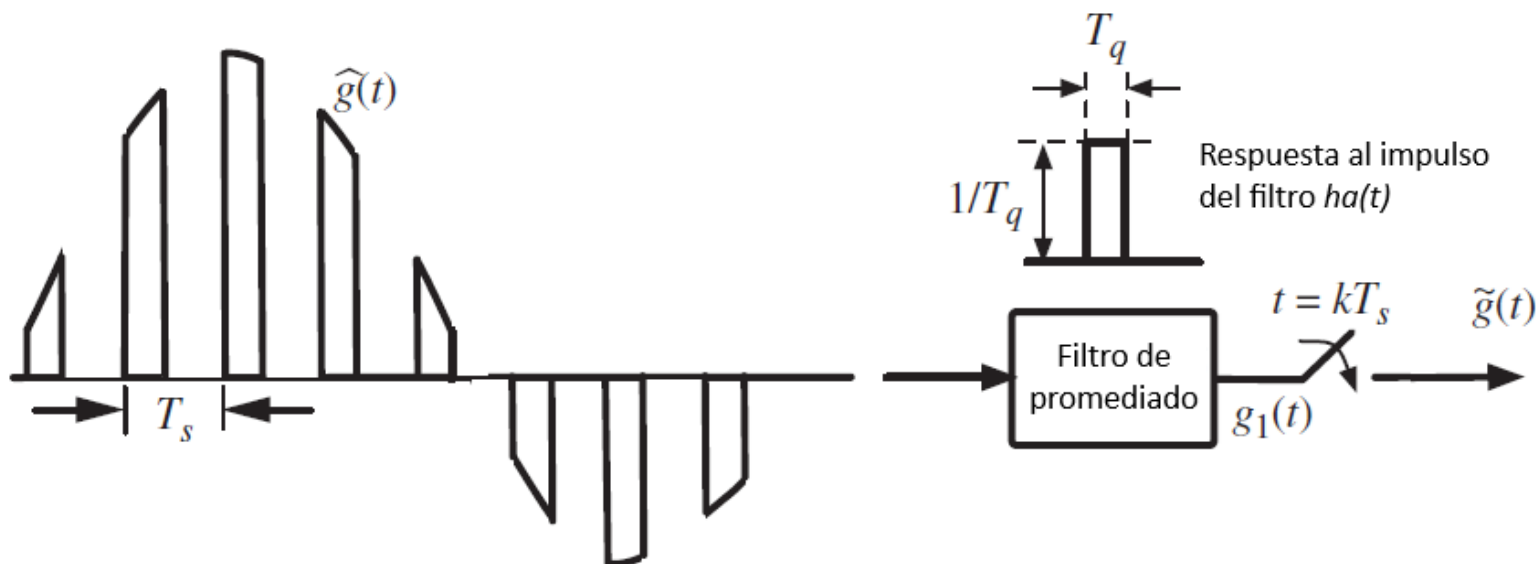
3. Solución al efecto de solapamiento → El filtro de pre-muestreo o *antialiasing*

- Filtrar paso bajo la señal antes de muestrear (filtro antialiasing) eliminará (atenuará) el efecto de distorsión por la cola plegada.

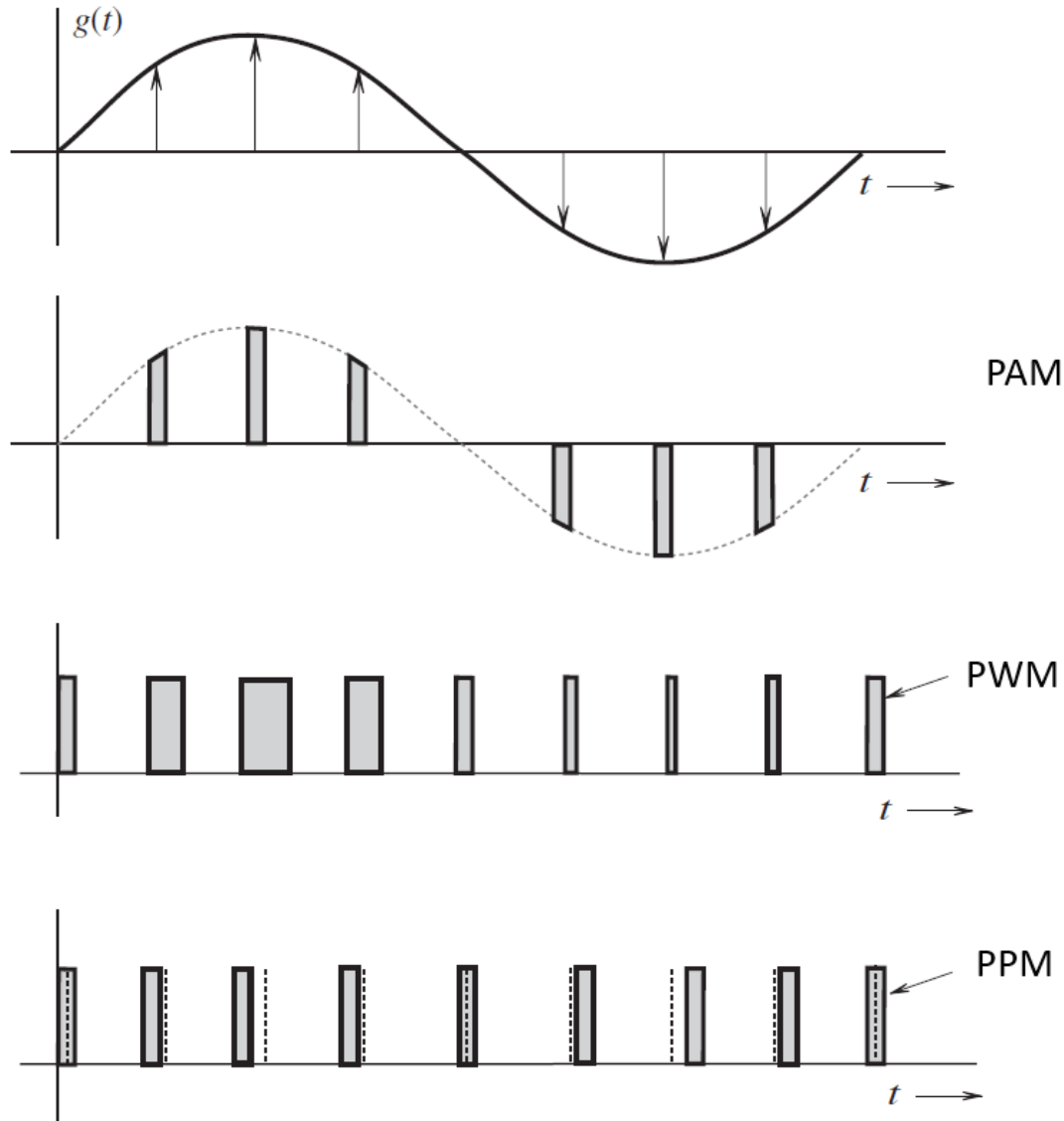


4. Implementación práctica del proceso de muestreo

- Hasta ahora hemos considerado que el muestreo utiliza un tren de pulsos ideales $\delta(t)$ que permiten extraer de manera precisa los valores de la señal $g(kT_s)$ en los instantes de tiempo $t = kT_s$.
- Sin embargo, ningún dispositivo puede realizar esa tarea.
- En la práctica, el muestreador estima la muestra de una señal considerando un intervalo de tiempo T_q alrededor de $t = kT_s$.

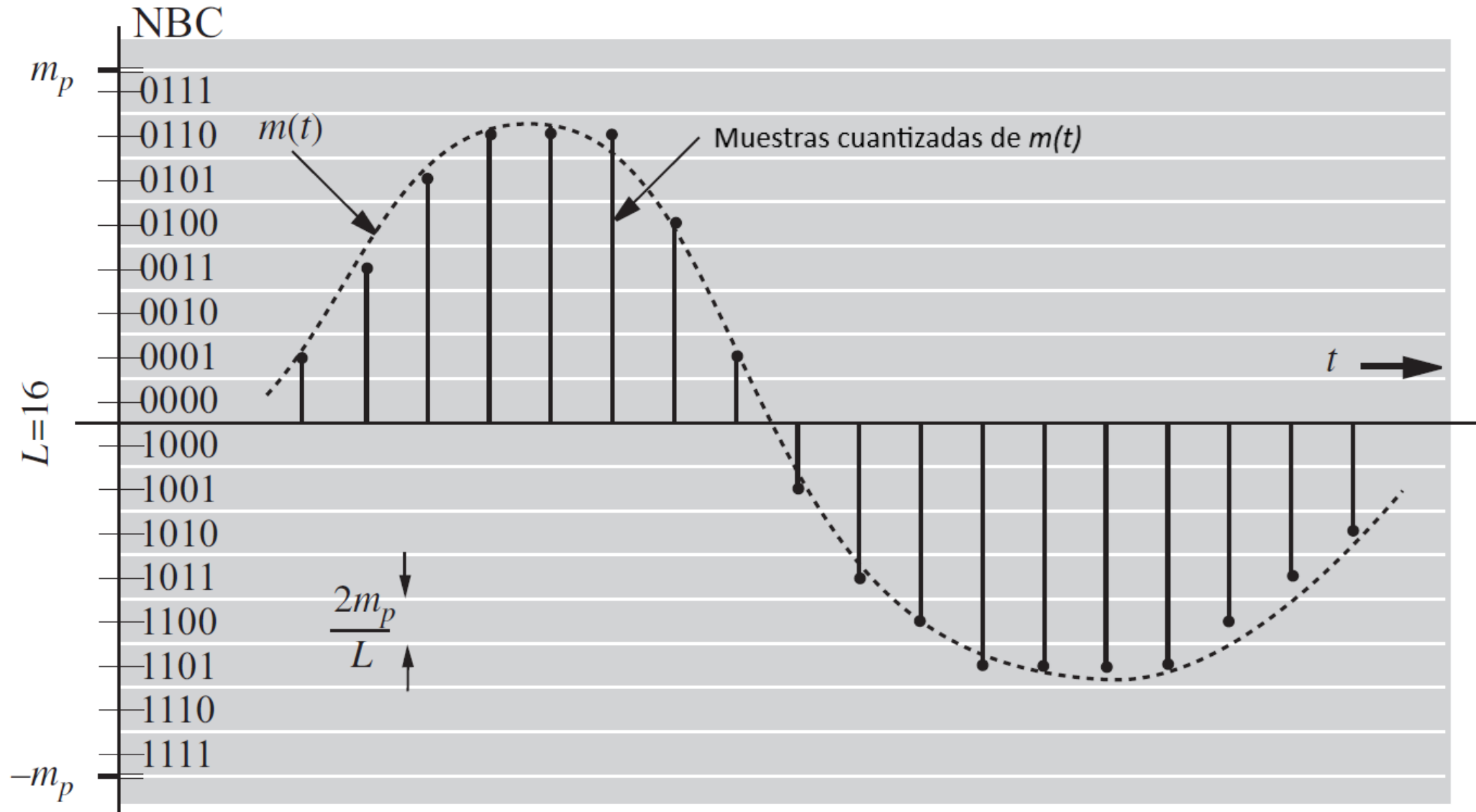


3.d. Cuantificación

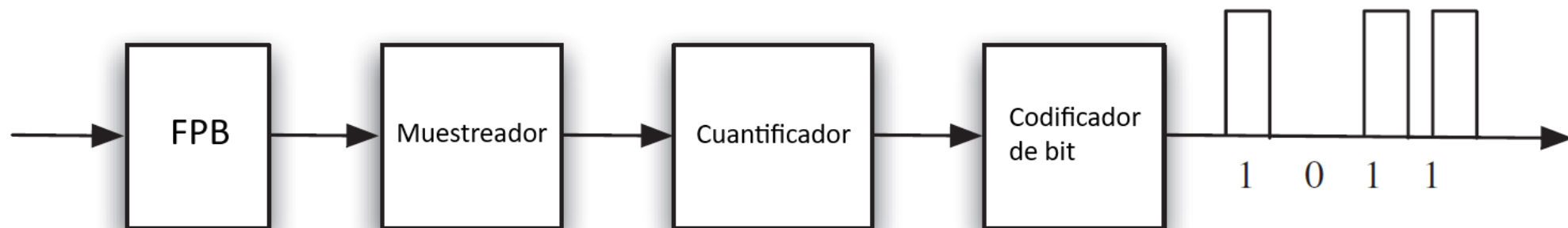


- Una vez muestreada la señal $g(t)$, las muestras resultantes pueden modular diferentes parámetros de un tren de pulsos:
 - Pueden variar la amplitud, dando lugar a una modulación de amplitud de pulsos (PAM, *Pulse Amplitude Modulation*),
 - el ancho del pulso (PWM, *Pulse Width Modulation*), o
 - la posición del pulso con respecto a una presentación periódica (PPM, *Pulse Position Modulation*).
- Una de las formas de modulación de pulso más importantes hoy día es la **modulación por codificación de pulsos** (PCM, *Pulse Code Modulation*)

■ Pulse Code Modulation (PCM)



- PCM es una técnica sencilla de **digitalización** de una señal analógica utilizando muestreo (tras un filtro *antialiasing*), cuantificación y codificación digital. La figura muestra el diagrama de un sistema PCM.
- La cuantificación redondea el valor de cada muestra al valor discreto permitido más cercano (**niveles de cuantificación**).
- Un cuantificador uniforme divide el rango de amplitud $[-m_p, m_p]$ de la señal analógica $m(t)$ en L intervalos iguales, cada uno con una resolución de $\Delta_v = 2m_p/L$.
- Posteriormente, la amplitud de cada muestra es aproximada por valor central del subintervalo en el que caiga la muestra. En este punto, cada muestra ha sido aproximada por alguno de los L posibles valores.
- Convertir una señal digital de L posibles valores en una señal digital binaria (que pueda tomar sólo dos valores) es necesario para procesar la señal de manera digital en un ordenador.
- Una estrategia sencilla de codificación de bit (bit: **binary digit**) se conoce como NBC (*Natural Bit Code*). En el ejemplo de la figura anterior, cada uno de los $L = 16$ niveles se codifican con 4 bits ($2^4 = 16$).



■ Ejemplo de baja fidelidad (telefonía móvil)

- La señal de audio presenta un $B = 15$ kHz, aunque basta un $B = 3.4$ kHz para preservar la inteligibilidad.
- En telefonía es más importante la comunicación, que la percepción de la voz con alta fidelidad.
- Se puede utilizar un filtro *antialiasing* de frecuencia de corte de 3.4 kHz y muestrear a 8 kHz.
- Si cuantificamos la señal con $L = 256$ niveles, necesitaríamos 8 bits para codificar cada muestra.
- ¿Qué tasa de transmisión necesita soportar la línea telefónica?
 - ✓ $8 \text{ bits/muestra} * 8000 \text{ muestras/segundo} = 64 \text{ kbps}$.

■ Ejemplo de alta fidelidad (compact disc)

- El compact disc (CD) permite codificar información de audio con alta fidelidad.
- El ser humano puede escuchar un rango de frecuencias de $B = 20$ kHz.
- Es por esto por lo que el CD muestrea a 44.100 Hz (algo superior a la frecuencia de Nyquist).
- La señal se cuantifica con $L = 65.536$ niveles (16 bits) para reducir el error de cuantificación.
- Considerando una señal de audio de dos canales (L, left; R, right), el CD se graba a una tasa de
 - ✓ $2 \text{ canales} * 16 \text{ bits/muestra} * 44100 \text{ muestras/segundo/canal} = 1.4 \text{ Mbps}$

Error de cuantificación.

- Sea $m(kT_s)$ la muestra k de la señal $m(t)$, y $\hat{m}(kT_s)$ la correspondiente muestra cuantificada.
- Utilizando la ecuación de interpolación descrita en el apartado 3.b (figura derecha y ecuación recuadrada), las señales reconstruidas a partir de las muestras originales y las muestras cuantificadas serían:

$$m(t) = \sum_k m(kT_s) \cdot \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) \quad \hat{m}(t) = \sum_k \hat{m}(kT_s) \cdot \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)$$

- La componente de distorsión en la señal reconstruida es $q(t) = \hat{m}(t) - m(t)$, es decir:

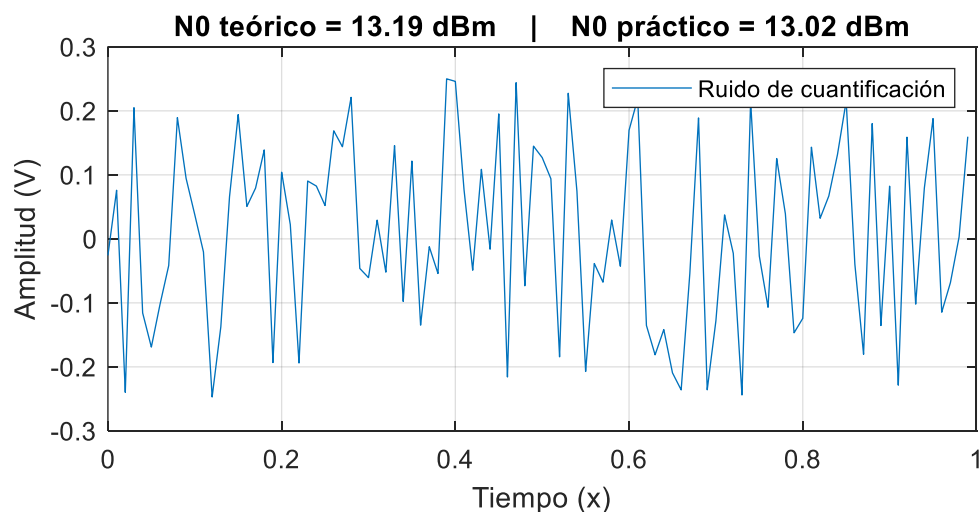
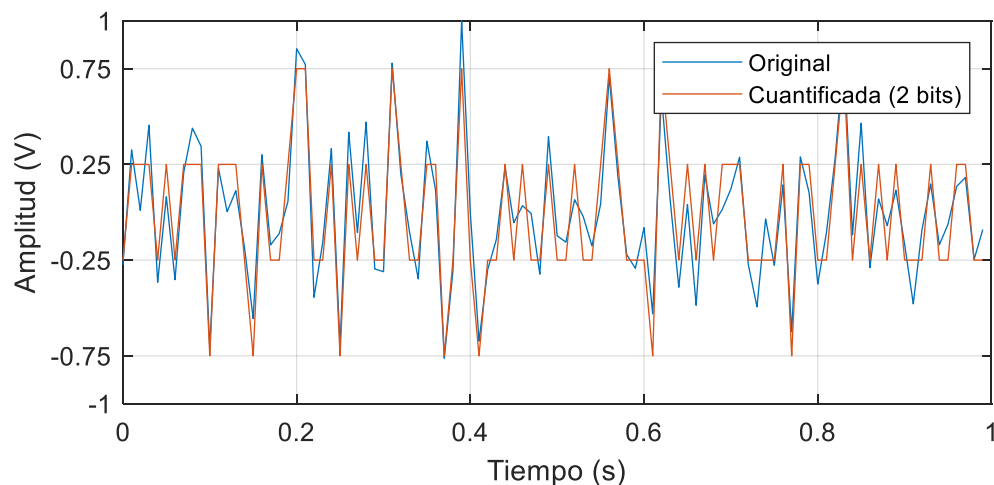
$$q(t) = \sum_k [\hat{m}(kT_s) - m(kT_s)] \cdot \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) = \sum_k q(kT_s) \cdot \text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)$$

donde $q(kT_s)$ es el error de cuantificación de la muestra k -ésima.

- Puesto que el valor muestreado se aproxima por el valor medio del subintervalo con altura $\Delta_v = 2m_p/L$, el error de cuantificación $q(t)$ estará en el rango $[-\Delta_v/2, \Delta_v/2]$.
- La potencia promedio* del ruido de cuantificación viene dado por $N_0 = \overline{q^2} = \frac{(\Delta_v)^2}{12} = \frac{m_p^2}{3L^2}$.
- Considerando la potencia de la señal $m(t)$ como $S_0 = \overline{m^2(t)}$, la SNR $\frac{S_0}{N_0} = 3L^2 \frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2}$.

* Demostración en Lathi & Ding (2022), sección 5.2.2.

- **Ejercicio en clase.** Compara la potencia de ruido de cuantificación estimada de manera teórica según la ecuación $N_0 = \overline{q^2} = \frac{(\Delta_v)^2}{12} = \frac{m_p^2}{3L^2}$ y de manera práctica en una señal ejemplo.



```
%% Sección 3.d. Ruido de cuantificación de manera práctica y teórica
clear,clc
```

```
% Parámetros de la cuantificación
Nbits = 2; % Número de bits
L = 2^Nbits; % Número de niveles
mp = 1; % Rango de los valores de entrada
DeltaV = 2*mp/L; % Amplitud del subintervalo
Rangos = -mp:DeltaV:mp; % Rangos
SampleLevels = (Rangos(2:end)+Rangos(1:end-1))/2;
```

```
% Señal original (alta resolución)
fs = 1000; % Frecuencia de muestreo
t = 0:1/fs:1-1/fs; % Eje de tiempo
x = randn(size(t)); % Señal ejemplo: Ruido blanco
x = x/max(abs(x))*mp; % Normalizamos al rango de entrada
```

```
% Señal cuantificada (a la resolución de L niveles)
```

```
x_q = nan(size(x));
for k=1:length(x)
    Diff_Levels = abs(x(k)-SampleLevels);
    [~,Level] = min(Diff_Levels);
    x_q(k) = SampleLevels(Level);
end
```

```
% Estimación de la potencia del ruido de cuantificación
```

```
N0_Teo_dBm = 10*log10(mp^2/(3*L^2)/0.001); % Potencia teórica (dBm)
x_n = x-x_q; % Ruido de cuantificación
N0_Prac = dot(x_n,x_n)/length(x_n); % Potencia práctica
N0_Prac_dBm = 10*log10(N0_Prac/0.001); % Potencia práctica (dBm)
```

```
% Representación del resultado
```

```
clf(ffigure(1))
subplot(211),hold on,grid on,box on
plot(t,x,t,x_q)
set(gca,'ytick',[-mp,SampleLevels,mp])
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Amplitud (V)')
legend('Original',sprintf('Cuantificada (%d bits)',Nbits))
```

```
subplot(212),hold on,grid on,box on
```

```
plot(t,x_n)
xlabel('Tiempo (x)')
ylabel('Amplitud (V)')
legend('Ruido de cuantificación')
```

```
title(sprintf('N0 teórico = %1.2f dBm | N0 práctico = %1.2f dBm',...
    N0_Teo_dBm,N0_Prac_dBm))
```

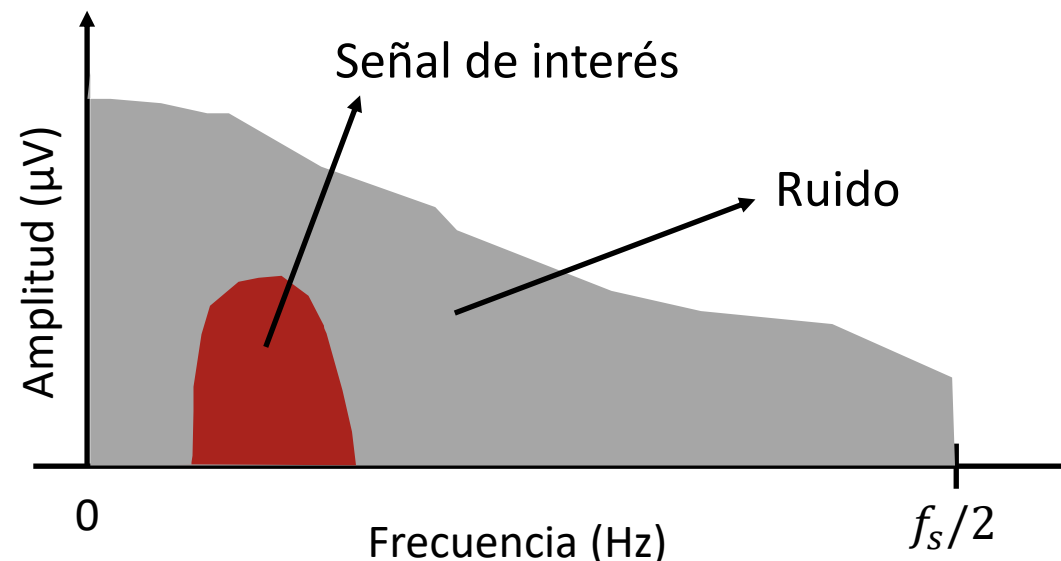
Diseño de Filtros digitales

- a. ¿Qué es filtrar y por qué es necesario?*
- b. Filtrado como sistema*
- c. Transformada Z*
- d. Filtros FIR vs IIR*
- e. Diseño de filtros en MATLAB*

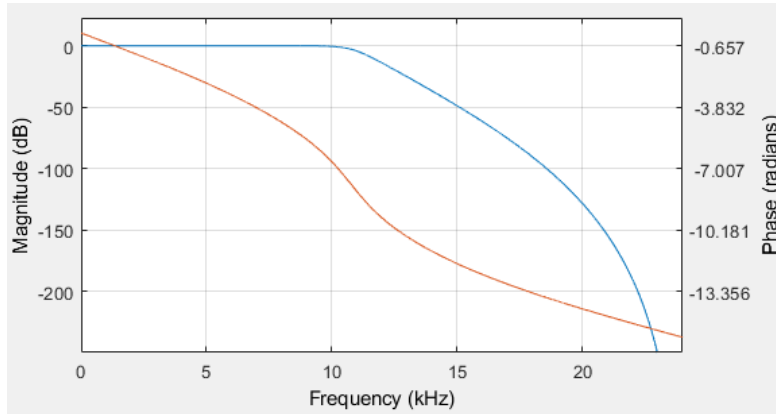
4.a. ¿Qué es filtrar y por qué es necesario?

- En la sección anterior vimos que al registrar una señal utilizando una frecuencia de muestreo f_s , registramos componentes de frecuencia hasta $f_s/2$.

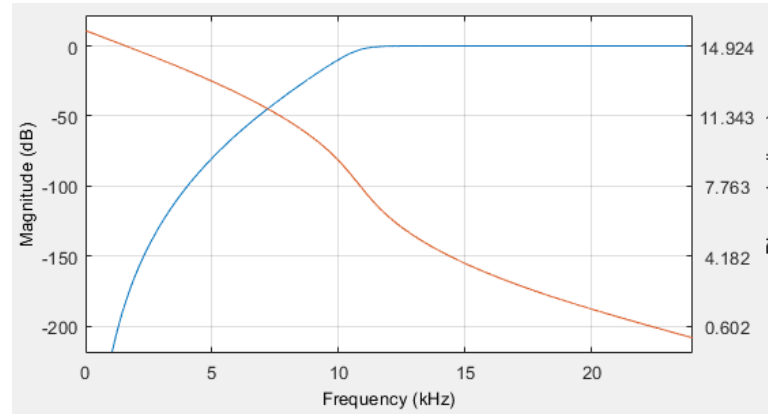
Si nuestra señal de interés contiene energía en una banda específica de frecuencia, podemos mejorar la calidad de nuestra señal registrada atenuando las componentes de frecuencia fuera de la banda de interés, mejorando por tanto la relación señal-ruido (SNR por sus siglas en inglés, *signal-to-noise ratio*).



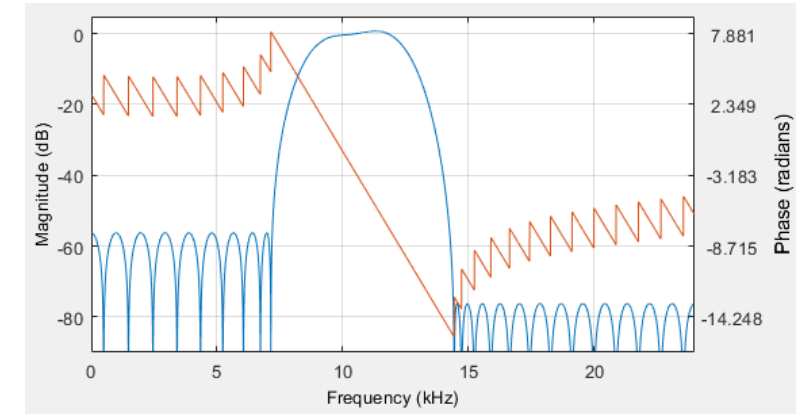
- Existen numerosas topologías de filtros. Las siguientes figuras presentan ejemplos de la respuesta en frecuencia de varios tipos de filtros, utilizando una f_s de 48 kHz.



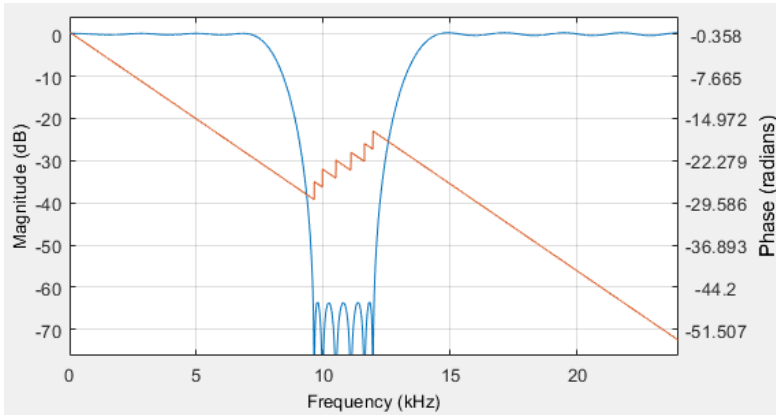
Paso bajo



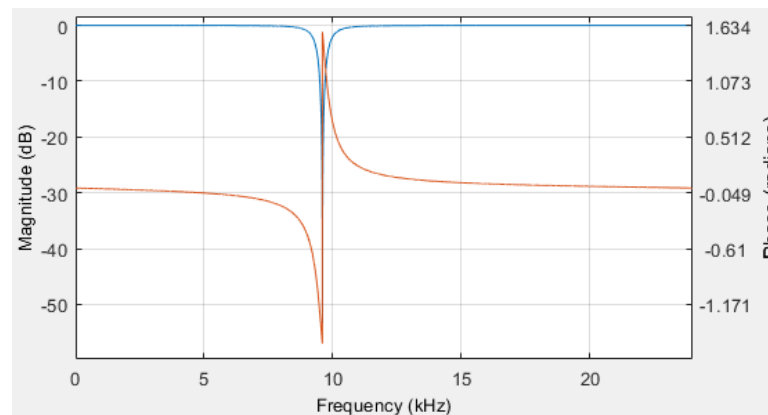
Paso alto



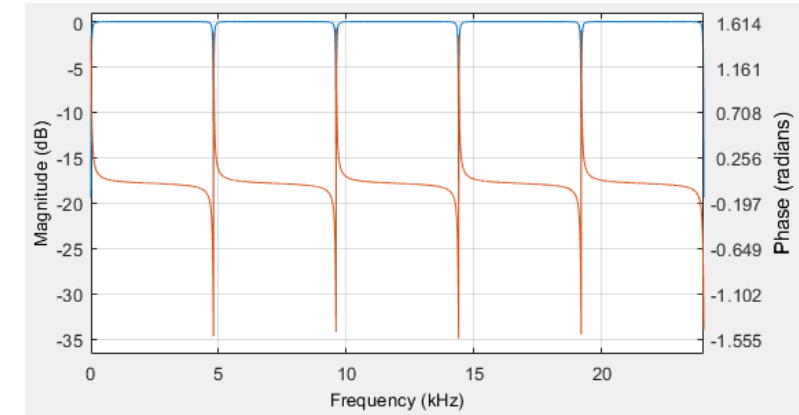
Paso banda



Rechazo banda



Notch

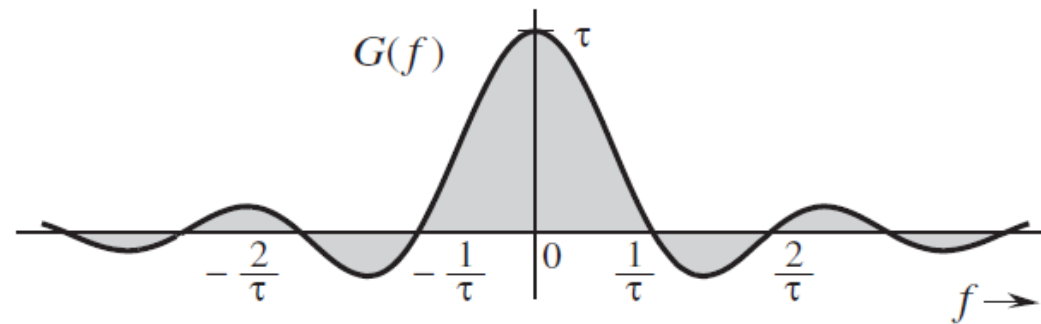
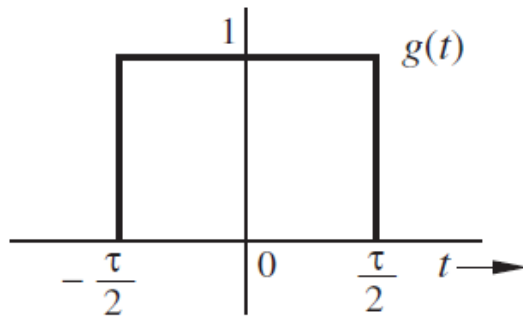


Peine

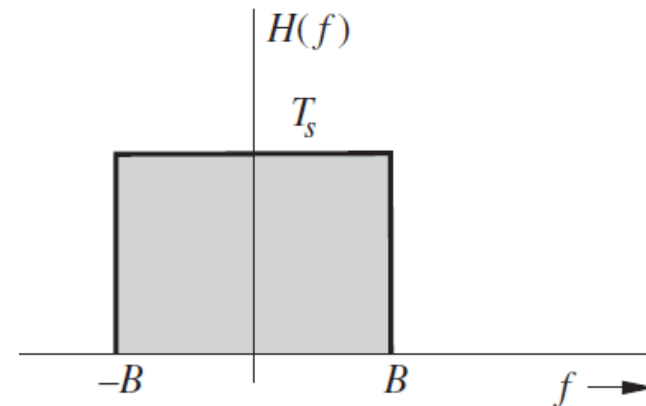
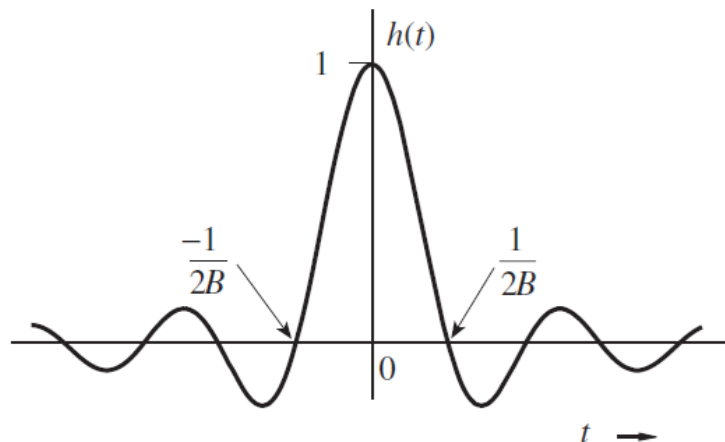
- ¿Qué **morfología** tienen los filtros?

Filtrar paso bajo una señal es similar a promediar.

Promediar utilizando una ventana cuadrada en el tiempo resulta en una respuesta en frecuencia infinita con muy poca selectividad en frecuencia.



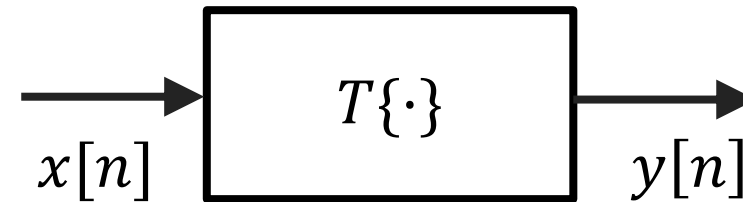
Para conseguir alta selectividad en frecuencia, se utilizan respuestas al impulso del tipo función *sinc*.



4.b. Filtrado como sistema

- Un sistema en tiempo discreto se define como una transformación u operador que transforma una secuencia de entrada $x[n]$ en una secuencia de salida $y[n]$.

$$y[n] = T\{x[n]\}$$



- Se define la **respuesta al impulso** de un sistema $h[n]$ como la salida $y[n]$ cuando la entrada es un pulso unitario $x[n] = \delta[n]$.
- Sistemas **sin memoria**. Se dice que un sistema es sin memoria si la salida $y[n]$ para cualquier valor de n depende sólo de la entrada $x[n]$ en el mismo valor de n .

Ejemplo. $y[n] = (x[n])^2$ es un sistema sin memoria, mientras que $y[n] = x[n - 3]$ (sistema de retardo ideal) no lo es, pues la salida depende de instantes pasados de x .

- Sistemas **lineales**. Si $y_1[n]$ e $y_2[n]$ son las respuestas de un sistema cuando $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son las respectivas entradas, el sistema es lineal si y sólo si

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n] \quad \text{aditividad}$$

y además

$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n] \quad \text{homogeneidad}$$

Las dos propiedades pueden combinarse en el *principio de superposición*:

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$

Ejemplo. El sistema *acumulador* $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ en el que la salida en el instante n es la suma o acumulación de la muestra actual y todas las muestras anteriores de la señal entrada es un sistema lineal (demostración en ejemplo 2.5, Oppenheim and Shaffer, 2009), mientras que $y[n] = \log_{10}(|x[n]|)$ no lo es. Esto es fácilmente demostrable considerando las entradas $x_1[n] = 1$ y $x_2[n] = 10$:

$$\log_{10}(1 + 10) = \log_{10}(11) \neq \log_{10}(1) + \log_{10}(10) = 1$$

- Un sistema **invariante en el tiempo** es un sistema para el que un desplazamiento temporal o retardo de la secuencia de entrada $x[n]$ provoca el mismo desplazamiento o retardo en la secuencia de salida $y[n]$.

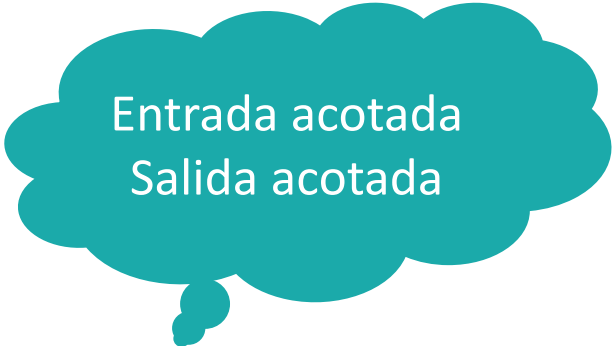
Diremos que un sistema es invariante en el tiempo si, para todo n_0 , la secuencia de entrada de valores $x[n - n_0]$ produce una secuencia de salida $y[n - n_0]$.

Ejemplo. El sistema *compresor* $y[n] = x[Mn]$ (con M entero positivo), el cual descarta $M - 1$ muestras cada M , no es un sistema invariante en el tiempo.

- **Causalidad.** Un sistema es causal si para cualquier valor de n_0 , la secuencia de salida en el índice n_0 depende sólo de los valores de la secuencia de entrada para $n < n_0$. Es decir, el sistema es *no anticipativo*.

Ejemplo. El sistema *acumulador* $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ y el sistema $y[n] = (x[n])^2$ son causales, mientras que el sistema *compresor* $y[n] = x[2n]$ no es causal, ya que $y[1] = x[2]$. Otro ejemplo de sistema no causal sería el *sistema de diferencia progresiva* definido por $y[n] = x[n + 1] - x[n]$.

- **Estabilidad.** Un sistema es estable en el sentido entrada acotada, salida acotada (*BIBO* por sus siglas en inglés, *bounded-input, bounded-output*), si y sólo si para cualquier secuencia acotada a su entrada produce una secuencia de salida acotada.



Entrada acotada
Salida acotada

IMPORTANTE: Esta propiedad se traduce en que la respuesta al impulso del sistema $h[n]$ sea absolutamente sumable, es decir, que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$.

Ejemplo. El sistema $h[n] = a^n u[n]$ es estable sólo para $a < 1$. Para $a = 1/2$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2^n} u[n] \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{2^n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

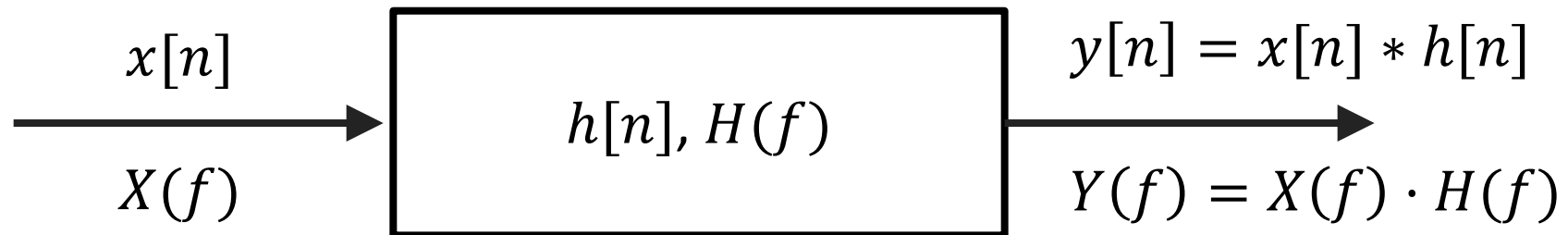
Para valores de $a > 1$ el sistema sería inestable, puesto que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$$

- Los sistemas **lineales e invariantes en el tiempo** (LTI, *Linear Time-Invariant*) que cumplen la combinación de estas dos propiedades presentan importantes aplicaciones en el campo del procesamiento de señal.

IMPORTANTE. Los sistemas LTI están completamente caracterizados por su respuesta al impulso $h[n]$.

IMPORTANTE. Dadas las secuencias de entrada $x[n]$ y la respuesta al impulso $h[n]$, es posible calcular la salida $y[n]$ mediante la convolución de $x[n]$ con $h[n]$.



- Filtrar una señal de entrada $x[n]$ consiste en convolucionar dicha señal con un filtro $h[n]$, dando como resultado la señal filtrada $y[n]$.

4.c. Transformada Z

- La Transformada Z (TZ) tiene un papel fundamental en el diseño de filtros digitales.
 - Es una generalización de la Transformada de Fourier: la TF es un caso particular de la TZ.
 - La notación de la TZ es muchas veces más adecuada que la notación de la TF.
- Considerando la Transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

La Transformada Z de una secuencia $x[n]$ se define como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

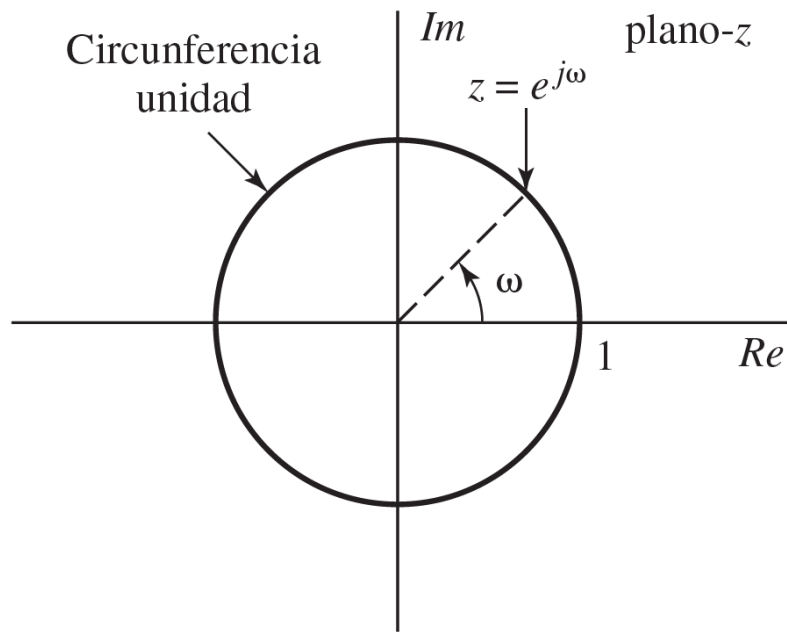
Siendo z una variable compleja, que se puede expresar como $z = re^{j\omega}$.

- Considerando que la TF de $x[n]$ es $X(e^{j\omega})$, es inmediato comprobar que la Transformada de Fourier es un caso particular de la Transformada Z que se da cuando $r = 1$.

- Puesto que la TZ es una función de variable compleja, es conveniente describirla e interpretarla en el plano complejo z .

En el plano z , el contorno correspondiente a $|z| = 1$ es una circunferencia de radio unidad, denominada *circunferencia unidad*.

IMPORTANTE. La TZ evaluada en la circunferencia unidad es la TF.



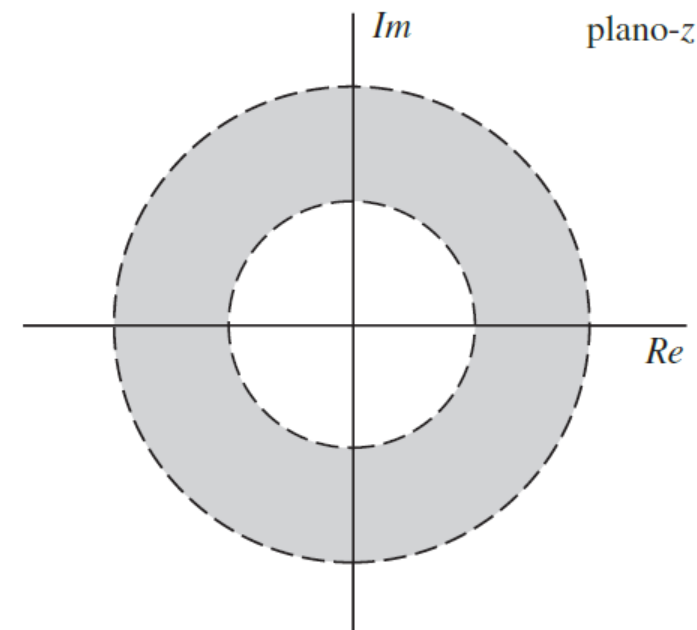
Interpretar la TF como la TZ evaluada en la circunferencia unidad del plano z corresponde conceptualmente a enrollar el eje lineal de frecuencias alrededor de la circunferencia unidad, situando el punto $\omega = 0$ en $z = 1$ y el punto $\omega = \pi$ en $z = -1$.

Con esta interpretación, la periodicidad inherente de la TF se refleja de manera natural, ya que un cambio de 2π radianes en el plano z corresponde a recorrer una vez la circunferencia unidad regresando exactamente al mismo punto.

- La **región de convergencia** (ROC) es el conjunto de valores de z en el plano complejo donde la Transformada Z converge, es decir, es finita.

La ROC nos permite estudiar importantes propiedades como la causalidad y la estabilidad de una secuencia.

IMPORTANTE: Si la ROC incluye la circunferencia unidad, la Transformada de Fourier converge.



- La TZ alcanza toda su utilidad cuando $X(z)$ se expresa como cociente de polinomios

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Siendo $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios en z . Los valores de z para los que $X(z) = 0$ (es decir, $P(z) = 0$) se denominan ceros, y los valores para los que $X(z) = \infty$ (i.e., $Q(z) = 0$) se denominan polos.

- **Ejemplo.** Consideremos la señal $x[n] = a^n u[n]$, siendo a un número complejo. Esta secuencia es un ejemplo de la clase de secuencias *limitadas por la izquierda*, que empiezan en un instante N_1 y sólo toman valores diferentes de cero en el intervalo $N_1 < n < \infty$.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Para que $X(z)$ converja, debe darse que: $\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$ (i.e., $X(z)$ sea absolutamente sumable).

Por tanto, la ROC será el conjunto de valores de z que cumplan que $|az^{-1}| < 1$, o que $|z| > |a|$ (convergencia de serie geométrica).

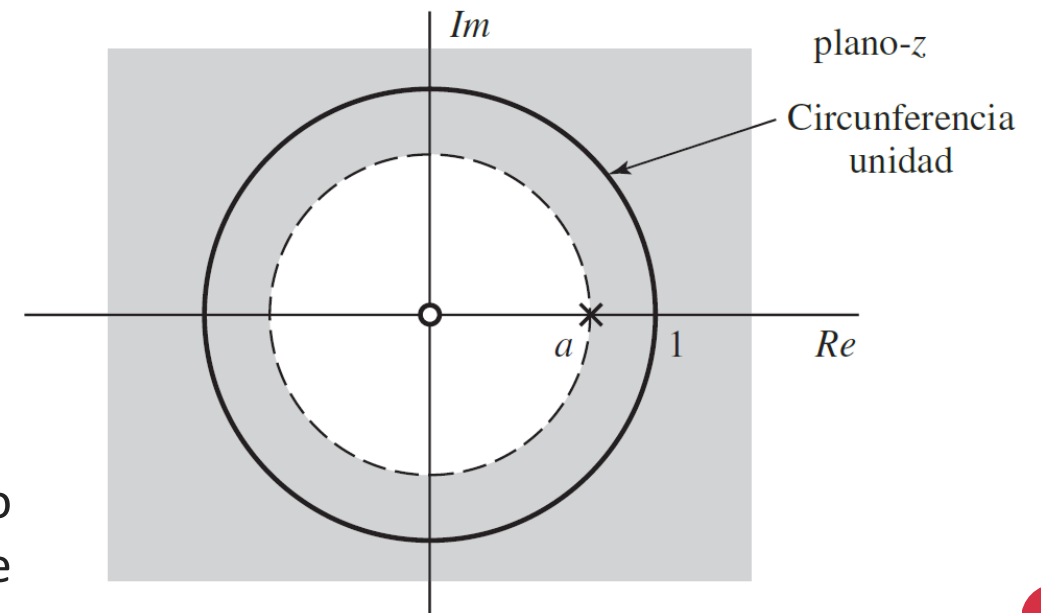
En el interior de la ROC, la serie infinita converge a

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{z}{z - a}$$

La ROC serán los valores de $|z| > |a|$.

$X(z)$ presenta un cero ("o") en 0 y un polo ("x") en a .

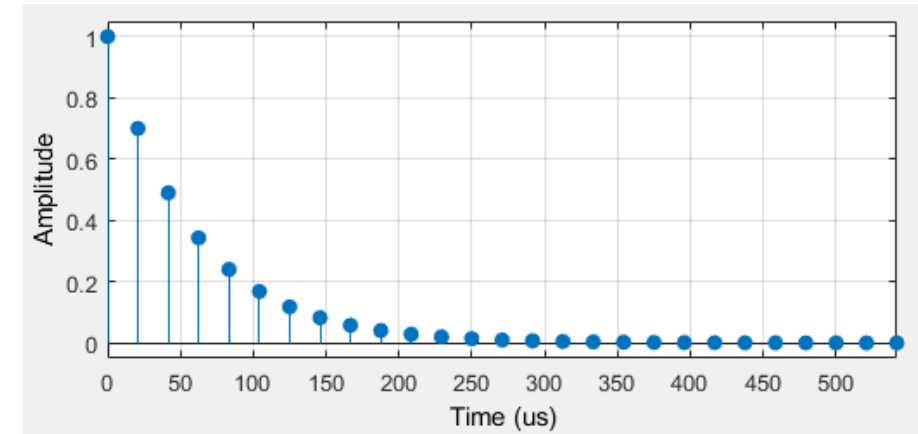
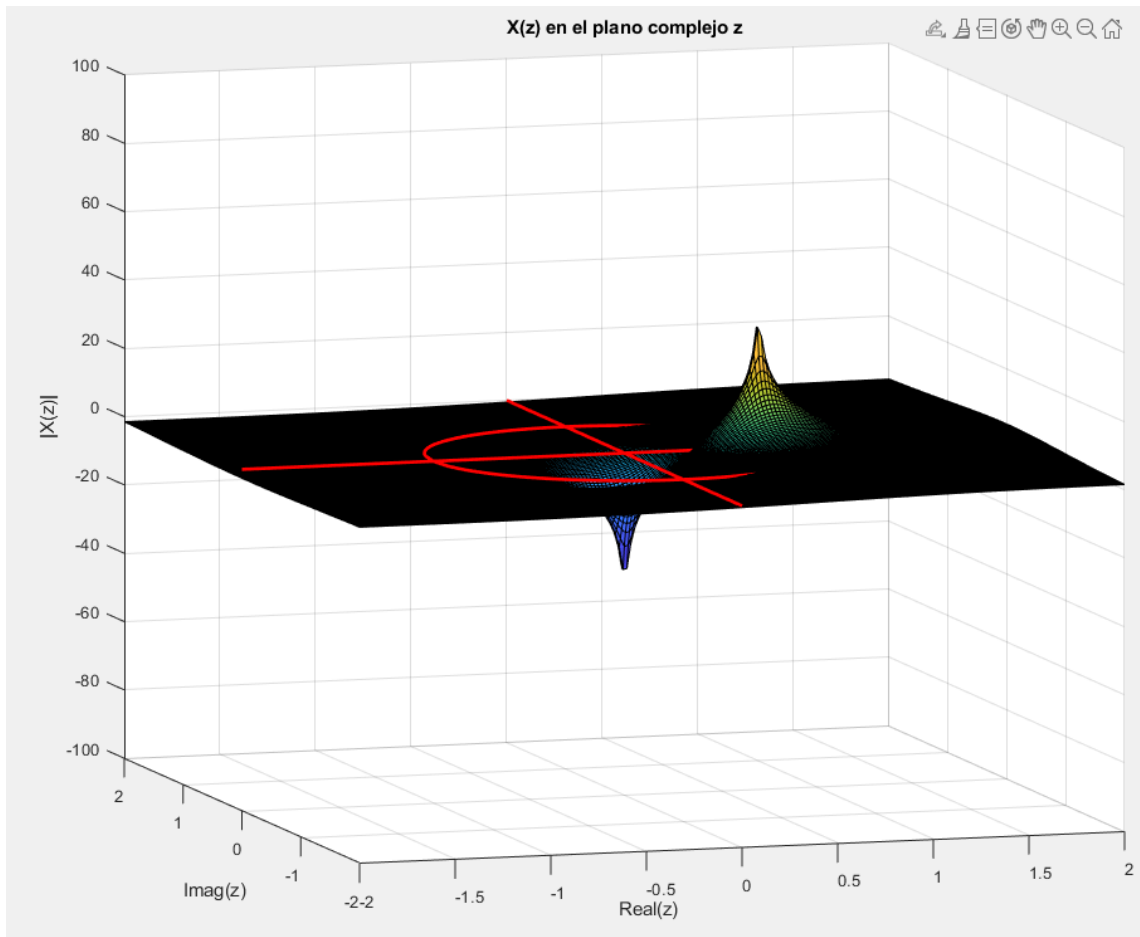
Para $|a| \geq 1$, la ROC no incluye la circunferencia unidad, lo que es consistente con el hecho de que la Transformada de Fourier de la secuencia $a^n u[n]$ no converge.



Fuente de la imagen: Oppenheim & Schaffer (2009).

- Visualicemos $X(z)$ para el ejemplo $a = 0.7$.

$$X(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ con } x[n] = a^n u[n]$$



Respuesta al impulso $x[n]$

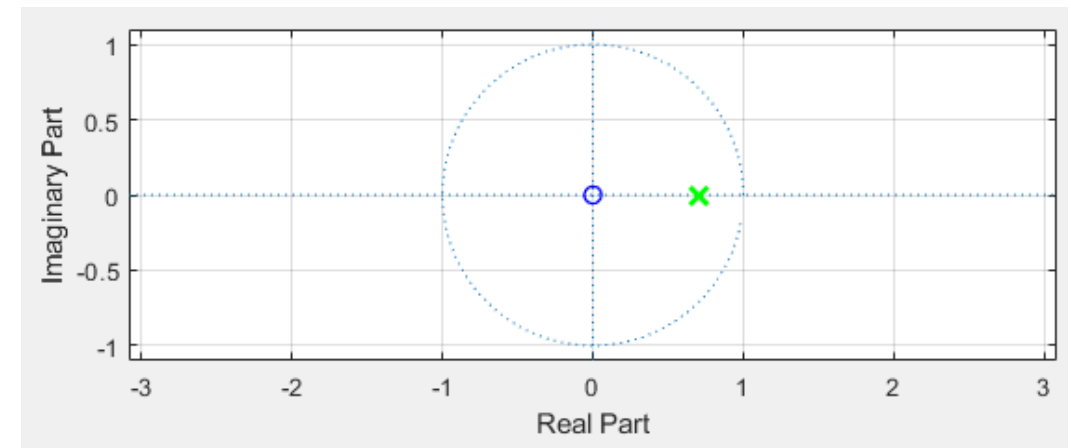


Diagrama de ceros y polos

Representación de $X(z)$

- Los ceros estiran $X(z)$ hacia 0
- Los polos estiran $X(z)$ hacia $+\infty$

■ Propiedades de la Transformada Z.

1. La región de convergencia en el plano z puede ser un anillo o un disco centrados en el origen.
2. La TF de $x[n]$ converge si y sólo si la ROC de la TZ de $x[n]$ contiene la circunferencia unidad.
3. La ROC no contiene ningún polo (valores de z que tienden a $+\infty$).
4. Si $x[n]$ es una *secuencia de duración finita*, la ROC es el plano z completo (a excepción de 0 o ∞).
5. Si $x[n]$ es una *secuencia limitada por la izquierda* (una secuencia que es cero para $n < N_1 < \infty$), la ROC se extiende hacia afuera desde el polo finito de mayor módulo (el más exterior).
6. Si $x[n]$ es una *secuencia limitada por la derecha* (una secuencia que es cero para $n > N_2 > -\infty$), la ROC se extiende hacia dentro desde el polo finito de menor módulo (el más interior).
7. Si $x[n]$ es una *secuencia bilateral* de duración infinita, sin estar limitada ni por la derecha ni por la izquierda, la ROC será un anillo limitado en el interior y el exterior por un polo, que de acuerdo con la propiedad 3, no contendrá ningún polo.

IMPORTANTE. Si la ROC incluye el círculo unitario, un sistema o secuencia es estable y, por tanto, su respuesta al impulso $x[n]$ es absolutamente sumable (tiene energía finita) y tiene TF.

ROC incluye círculo unitario $\Rightarrow$ Sistema estable, tiene Transformada de Fourier

- **La Transformada Z en sistemas LTI.**

Si un sistema es LTI, su salida $y[n]$ se obtiene tras la convolución de la entrada $x[n]$ con la respuesta al impulso del sistema $h[n]$, es decir, $y[n] = x[n] * h[n]$.

Al igual que en la TF, la TZ presenta la propiedad de convolución, en la que $Y(z) = H(z)X(z)$, siendo $H(z)$ la *función de transferencia* del sistema LTI.

En sistemas LTI, causales y en reposo inicial (con entrada nula para $n \leq 0$), la función de transferencia $H(z)$ puede expresarse como cociente de polinomios.

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) \qquad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Como $H(z)$ es causal (secuencia limitada por la izquierda), la ROC se extiende hacia afuera desde el polo de mayor módulo, y puesto que para que el sistema sea estable es necesario que la ROC contenga el círculo unidad, el sistema $h[n]$ será estable si **todos sus polos se encuentran dentro del círculo unidad**.

4.d. Filtros FIR vs IIR

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

- Existen dos clases de sistemas LTI.

- $H(z)$ no tiene polos excepto en $z = 0$ y, por tanto: $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}$

- En este caso, $h[n]$ es finita $\rightarrow$ *Finite Impulse Response (FIR)*.

- $H(z)$ tiene al menos un polo distinto de cero.

- Su respuesta al impulso $h[n]$ es infinita $\rightarrow$ *Infinite Impulse Response (IIR)*.

- Filtros FIR

- El diseño de filtros FIR consiste en estimar los coeficientes b_k de $H(z)$, que son los mismos que en $h[n]$ (!) $\rightarrow$ Se debe a la propiedad de la TZ: $\delta[n - m] \xleftrightarrow{Z} z^{-m}$

- Puesto que $h[n]$ es de duración finita, son estables (propiedad 4 de la TZ).

- Se suelen utilizar órdenes (N) altos, alrededor de decenas o centenas.

- Producen retardos de grupo de $N/2$ muestras en todo el espectro de frecuencia.

- Presentan N polos en 0, y N ceros en el plano complejo z .

■ Ejemplo de filtro FIR con *filterDesigner* (MATLAB).

Response Type

☒ Lowpass

☐ Highpass

☐ Bandpass

☐ Bandstop

☐ Differentiator

Design Method

☐ IIR Butterworth

☒ FIR Window

Filter Order

☒ Specify order: 100

☐ Minimum order

Options

☒ Scale Passband

Window: Kaiser

Beta: 0.5

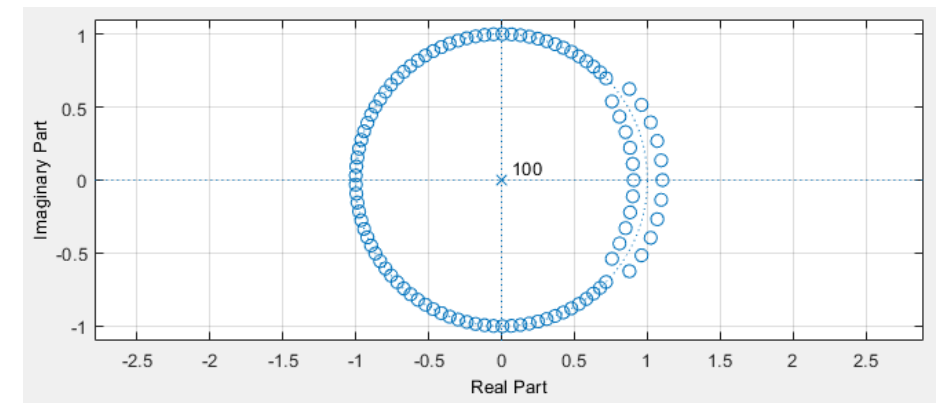
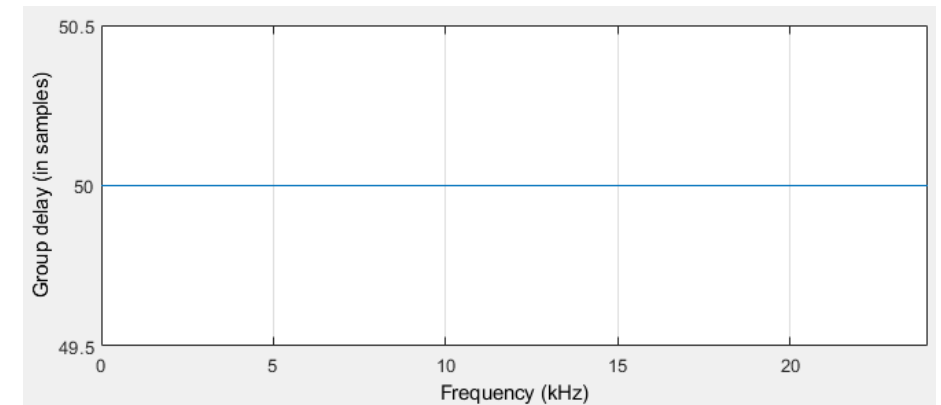
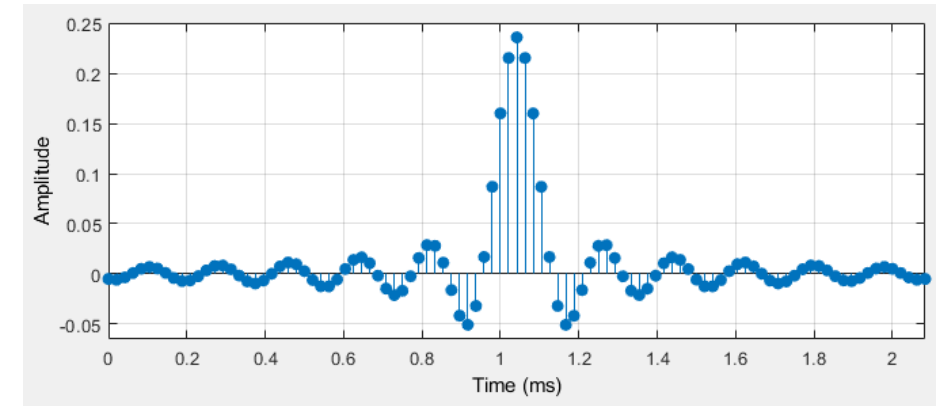
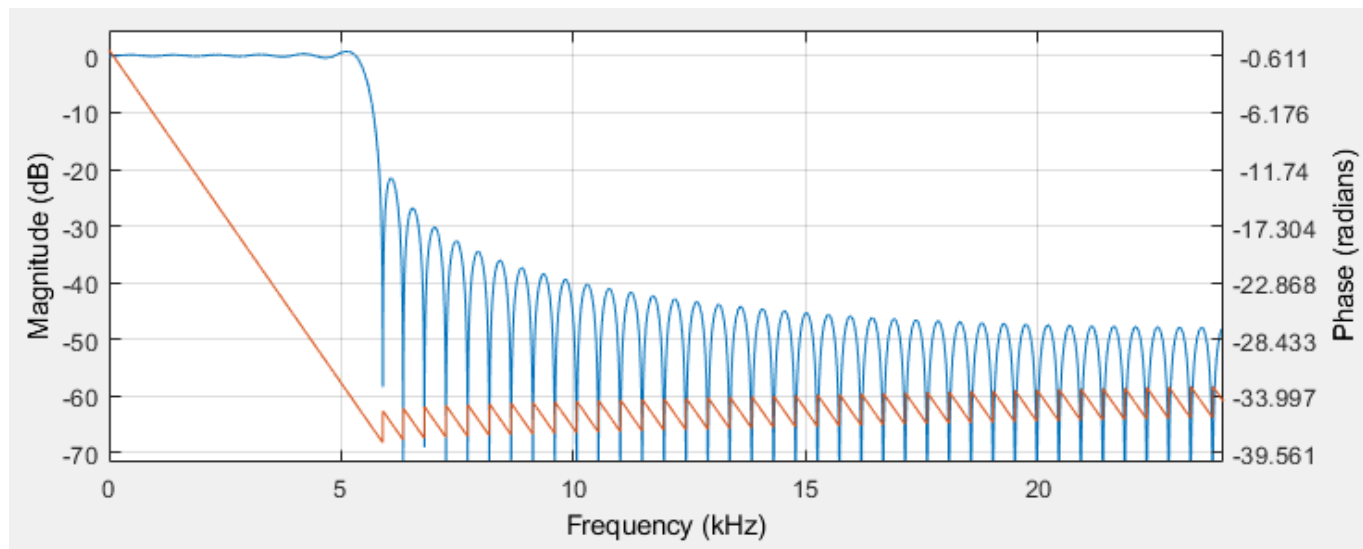
View

Frequency Specifications

Units: Hz

Fs: 48000

Fc: 5600



■ Filtros IIR

- El diseño de filtros IIR consiste en estimar los coeficientes b_k y a_k de $H(z)$.
- Presentan N polos y N ceros en el plano complejo z .
- $h[n]$ presenta una duración infinita, por lo que la estabilidad no está garantizada.
- Para que el filtro sea estable, todos sus polos deben estar dentro del círculo unidad.
- Producen retardos de grupo dependientes de la frecuencia.
- Se suelen utilizar órdenes (N) bajos, en torno a unidades.
- ¿Cómo elegir el orden del filtro? Compromiso entre selectividad en frecuencia y efecto de oscilación: *ringing*, oscilación indeseada asociada a cambios abruptos en la señal (filtros de órdenes altos $\rightarrow$ respuestas al impulso largas $\rightarrow$ mayor ringing). El efecto del ringing se analiza en la respuesta a la función escalón.
- Al igual que en filtro FIR, la Transformada de Fourier $H(e^{j\omega})$ de la respuesta al impulso del filtro $h[n]$ puede visualizarse a partir del diagrama de ceros y polos como $H(z)$ evaluada en el círculo unidad.

- Ejemplo de filtro IIR con *filterDesigner* (MATLAB).

Response Type

☒ Lowpass
☐ Highpass
☐ Bandpass
☐ Bandstop
☐ Differentiator

Design Method

☒ IIR Butterworth
☐ FIR Window

Filter Order

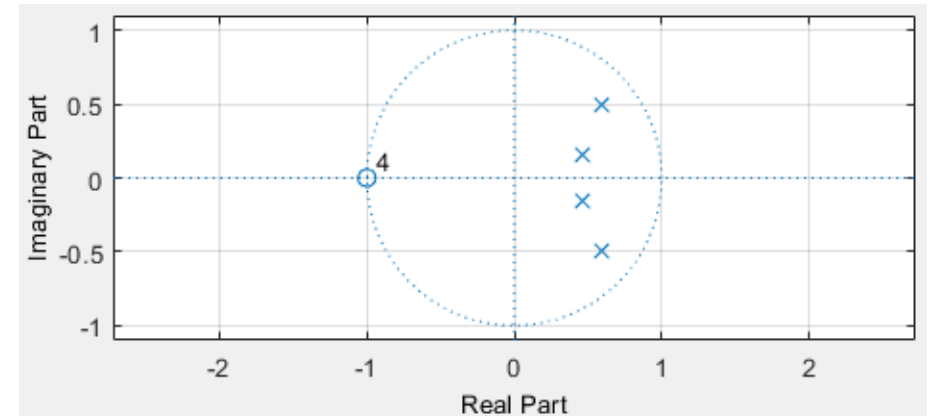
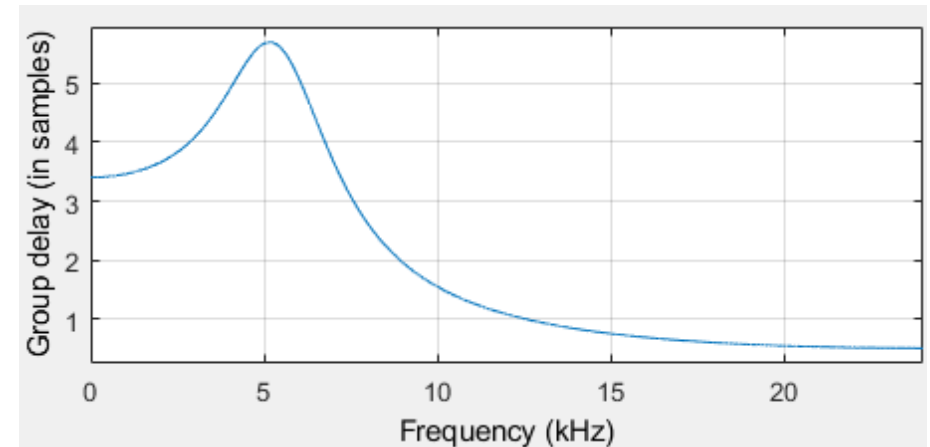
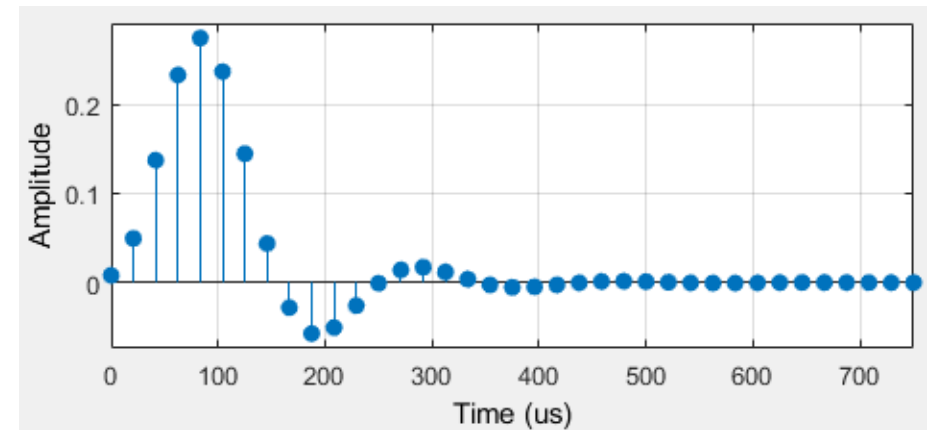
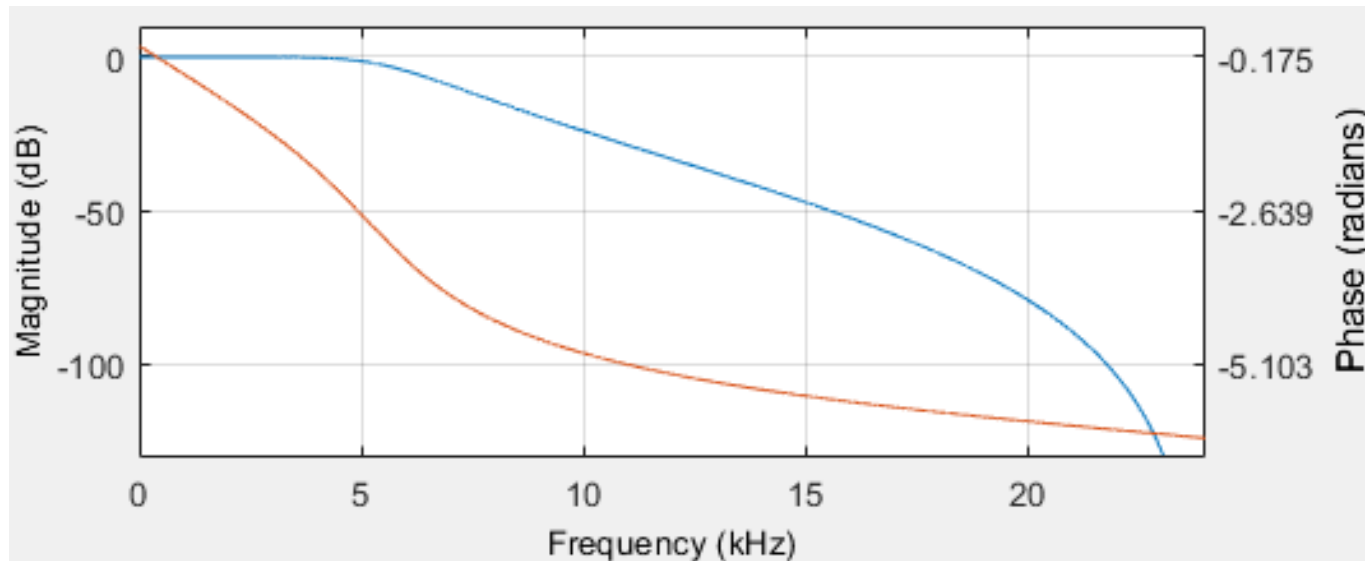
☒ Specify order: 4
☐ Minimum order

Options

There are no optional parameters for this design method.

Frequency Specifications

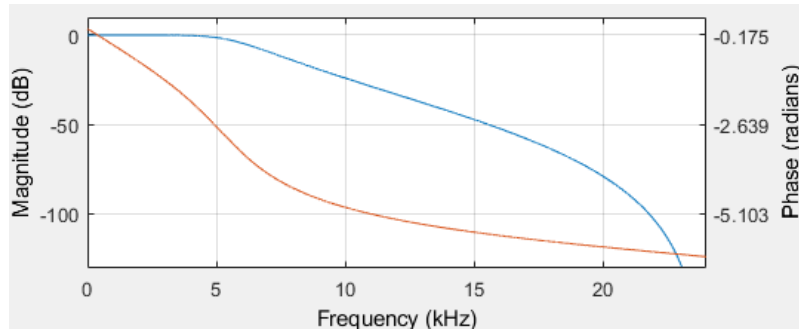
Units: Hz
Fs: 48000
Fc: 5600



■ Tipos de Filtros IIR. Ejemplos de orden 4 con $f_s = 48$ kHz y $f_c = 5600$ Hz.

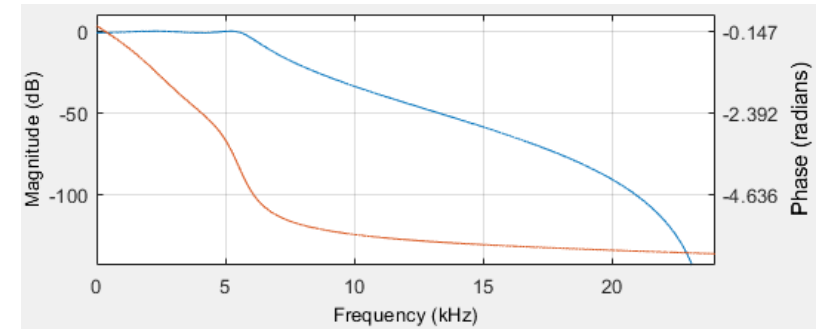
Filtros Butterworth

- Máxima planitud en la banda pasante y en la banda de rechazo, con una transición gradual (no presenta rizado).
- Respuesta en frecuencia monótona.
- Transición gradual entre la banda pasante y de rechazo.



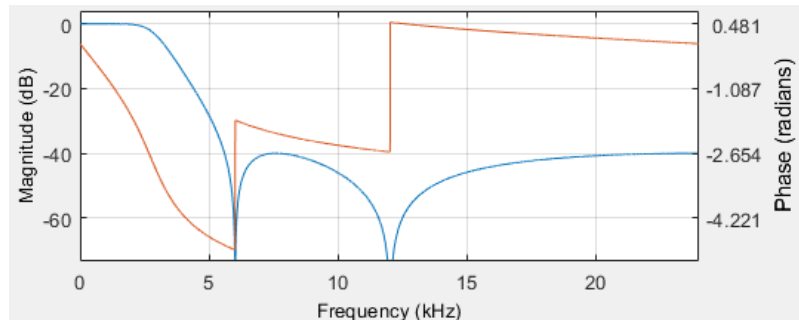
Filtros Chebyshev Tipo I

- Presentan rizado en la banda pasante, pero atenuación monótona en la banda de rechazo.
- Transición más abrupta que Butterworth, logrando menores órdenes para especificaciones similares.



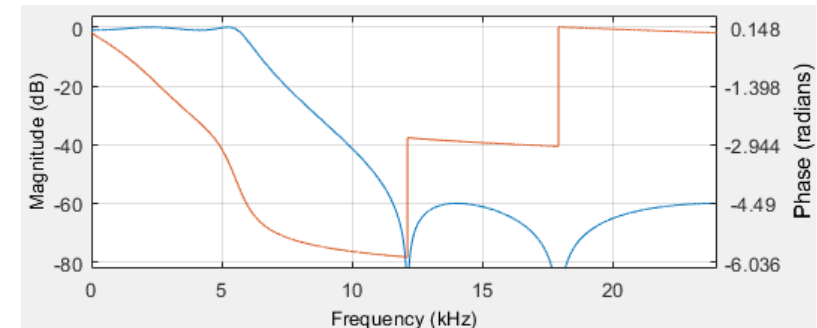
Filtros Chebyshev Tipo II

- Banda pasante completamente plana, pero rizado en la banda de rechazo (lo que hace que se utilice menos que los Tipo I).
- También ofrecen una transición más rápida que Butterworth.



Filtros Elípticos

- Presentan rizado tanto en la banda pasante como de rechazo, con una rápida transición.
- Logran el menor orden posible para especificaciones dadas.



Filtro	Planitud	Ondulaciones	Transición	Orden típico
Butterworth	Muy plana	Ninguna	Gradual	Más alto
Chebyshev Tipo I	Rizado en pasante	Sólo en banda pasante	Más abrupta	Menor que Butterworth
Chebyshev Tipo II	Plana en pasante	Sólo en banda de rechazo	Más abrupta	Menor que Butterworth
Elíptico	Ninguna	Ambas bandas	Extremadamente abrupta	Menor de todos

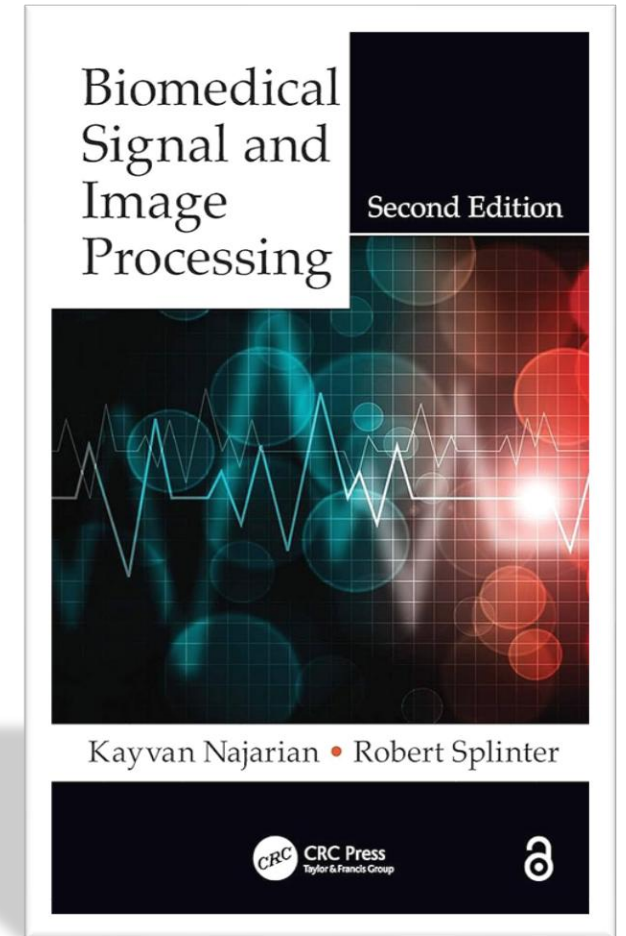
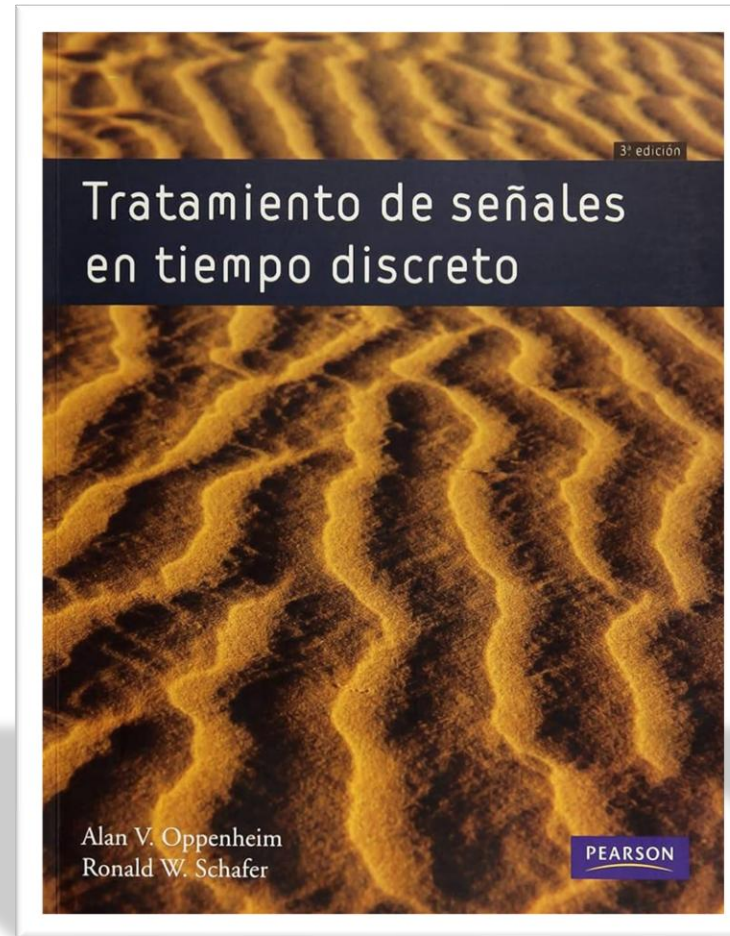
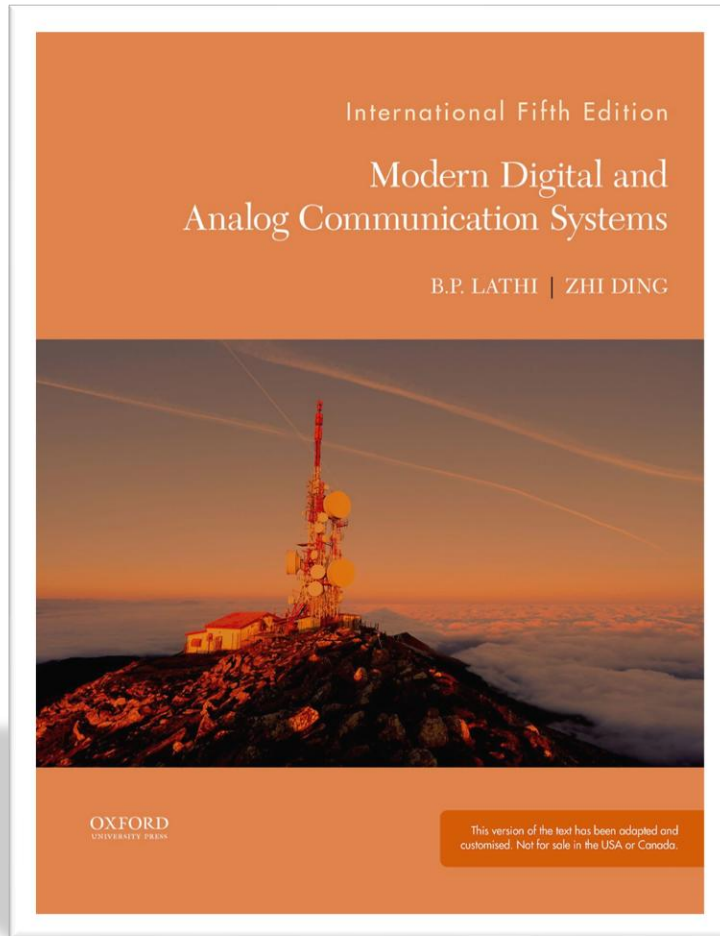
Consideraciones adicionales

- Los filtros **Butterworth** son ideales si la suavidad de la respuesta en frecuencia es prioritaria.
- Los **Chebyshev** y **elípticos** se eligen cuando se busca eficiencia en el diseño (transición rápida y de menor orden).
- Los filtros **elípticos** son los más eficientes en términos de orden, pero el rizado en ambas bandas pueden ser un problema en algunas aplicaciones.

4.e. Diseño de filtros en MATLAB

- Diseña un filtro Butterworth paso bajo de orden 1 con $f_s = 48$ kHz y $f_c = 5600$ Hz.
 - Compara el diagrama de ceros y polos con la función $H(z)$ en el plano complejo.
 - Visualiza el efecto de modificar la f_c en el diagrama de ceros y polos.
 - Visualiza el efecto de modificar la f_c en la función de transferencia.
 - Visualiza el efecto del orden del filtro en la función de transferencia.
 - Visualiza el efecto del orden del filtro en el retardo de grupo.
 - Visualiza el efecto del orden del filtro en la función escalón (ringing).
- Repite el análisis para un filtro Butterworth paso alta.
- Obtén los coeficientes de un filtro IIR notch que atenúe la frecuencia 4200 Hz.
 - Analiza el efecto del factor de calidad Q en la función de transferencia, la respuesta al impulso y la respuesta al escalón. Prueba los valores $Q = 45, 10$ y 1 .

Referencias



Referencias

- **Modern Digital and Analogue Communication Systems**, International Fifth edition (2022). Lathi B.P., Ding Z. Oxford University Press (New York, NY, USA). ISBN:9780190686864.
 - Secciones 2.2, 2.3, 2.4, 2.6, 3.1, 3.2, 3.3, 5.1, 5.2.
- **Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto**, Tercera edition. (2009) Oppenheim A.V., Schafer R.W. Pearson Educación S.A. (Madrid, España). ISBN: 9788483227183.
 - Secciones 2.1, 2.2, 2.3, 3.0, 3.1, 3.2, 3.5, 5.2.
- **Biomedical Signal and Image Processing**, Second edition. (2012) Najarian K., Splinter R. CRC Press Taylor & Francis Group (Boca Ratón, FL, USA). eBook ISBN: 9780429106774.
 - Secciones 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.6.